Β΄ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ	
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ	**Βαθμός:** ____________________
Σχολική Χρονιά: 2025-2026	**Ολογράφως:**________________
	Υπ. καθηγητή:_______________
	Υπ. Κηδεμόνα:_______________

ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ενότητα: 07-Παραβολή

Ονοματεπώνυμο καθηγητή: Ιωακείμ Ιωάννης   Ημερομηνία: Διάρκεια: 40΄

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας:_________________________________

Τμήμα: ___ __________

Να γράφετε με μπλε ή μαύρο ανεξίτηλο μελάνι.
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Να απαντήσετε σε ΟΛΕΣ τις ερωτήσεις.

Άσκηση 1

Δίνεται η παραβολή

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Χρησιμοποιώντας **συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο**, να γράψετε την f στη μορφή

$$f(x) = \alpha(x+\kappa)^2 + \lambda.$$

(Μονάδες: 2)

Απάντηση

Συμπλήρωση τελείου τετραγώνου:

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 2$$
$$= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] + 2$$
$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 2$$
$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

(β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε:

i. την **κορυφή** της παραβολής:

Απάντηση

(Μονάδες: 0.5)

1ος τρόπος

Από το προηγούμενο ερώτημα:

$$\kappa = \frac{5}{4},\ \ \lambda = -\frac{9}{8} \Longrightarrow K(-\kappa, \lambda) = K\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

2ος τρόπος

Με χρήση τύπων:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma} = -\frac{\beta}{2\alpha}}} = -\frac{-5}{2\cdot 2} = \frac{5}{4}$$

$$y_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma} = f\left(x_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma}\right) = f\left(-\frac{5}{4}\right) = \cdots = -\frac{9}{8}$$

$$\Longrightarrow K\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

3ος τρόπος

Με χρήση τύπων:

$$\boxed{\boldsymbol{x_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma} = -\frac{\beta}{2\alpha}}} = -\frac{-5}{2\cdot 2} = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma} = -\frac{\Delta}{4\alpha}}} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}{4\cdot 2} = -\frac{25-16}{8} = -\frac{9}{8}$$

$$\Longrightarrow K\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$$

ii. τον **άξονα συμμετρίας** της παραβολής:

(Μονάδες: 0.5)

Απάντηση

$$x = -\kappa = \frac{5}{4}$$

iii. το **σύνολο τιμών** της παραβολής:

(Μονάδες: 0.5)

Απάντηση

$\alpha = 2 > 0 \Longrightarrow$ η παραβολή λαμβάνει ελάχιστη τιμή, την:

$$y_{min} = y_{\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\varsigma} = -\frac{9}{8}$$

και άρα το σύνολο τιμών είναι το σύνολο:

$$\left[-\frac{9}{8}, +\infty\right)$$

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\mathrm{x}) \geq 0$.

(Μονάδες: 2.5)

Απάντηση

Εύρεση των ριζών του τριωνύμου $2x^2 - 5x + 2$

1ος τρόπος (με παραγοντοποίηση)

$$2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)(x-2)$$

και άρα

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 2$$

2ος τρόπος (με χρήση του τύπου των ριζών)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{5 \pm 8}{19}$$

και άρα

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

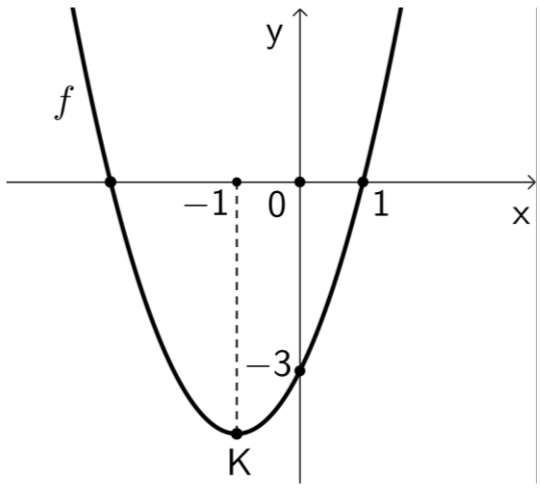
Κατασκευή πίνακα προσήμων

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ 2 $+\infty$
πρόσημο $2x^2 - 5x + 2$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

και άρα $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$

Άσκηση 2

Πιο κάτω, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 + \beta\mathrm{x} + \gamma$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$.



Αν Κ είναι η κορυφή της παραβολής, να απαντήσετε στις πιο κάτω ερωτήσεις:

i. Υπολογίστε τις **ρίζες** του τριωνύμου $x^2+\beta x+\gamma$, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα **συμμετρίας** της παραβολής)

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

Άξονας συμμετρίας $x=-1 \Longrightarrow x_1=1$ και $x_2=-1-2=-3$ (η συμμετρική της x_1).

ii. **Παραγοντοποιήστε** το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$.

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

$$x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)=(x-1)(x+3)$$

(αφού $\alpha=1$)

ή **(ιδέα/λύση από μαθητή)**

$$S=x_1+x_2=1-3=-2$$

$$P=x_1x_2=1\cdot(-3)=-3$$

και άρα το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ γράφεται:

$$x^2+\beta x+\gamma=x^2-Sx+P=x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

iii. Να υπολογίσετε την **τεταγμένη** (y) της κορυφής Κ της παραβολής.

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

1ος τρόπος

$\boxed{\gamma=-3}$ (από το σχήμα: το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα των τεταγμένων)

Κορυφή:

$$x_{κορυφής}=-\frac{\beta}{2\alpha}\Leftrightarrow -1=-\frac{\beta}{2\cdot 1}\Leftrightarrow \boxed{\beta=2}$$

Άρα:

$$f(x)=x^2+2x-3 \Longrightarrow y_{κορυφής}=f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$$

ή

$$y_{κορυφής}=-\frac{\Delta}{4\alpha}=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}=-\frac{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}{4\cdot 1}=-\frac{16}{4}=-4$$

Άσκηση 3

(α) Να γράψετε **μια** εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τις $x_1=\sqrt{5}-1$ και $x_2=\sqrt{5}+1$.

(Μονάδες: 1.5)

Απάντηση

1ος τρόπος

Μια τέτοια εξίσωση είναι η:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow \left(x-(\sqrt{5}\text{-}1)\right)\left(x-(\sqrt{5}\text{+}1)\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{5}+1)(x-\sqrt{5}-1)=0$$

2ος τρόπος

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $x^2-Sx+P=0$:

$$S=x_1+x_2=\sqrt{5}\text{-}1\text{+}\sqrt{5}\text{+}1\text{=}2\sqrt{5}$$
$$P=x_1x_2=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=\left(\sqrt{5}\right)^2-1^1=5-1=4$$
$$\Rightarrow x^2-2\sqrt{5}x+4=0$$

Σημείωση:

$$(x-\sqrt{5}+1)(x-\sqrt{5}-1)=x^2-2\sqrt{5}x+4$$

(β) Αν η εξίσωση $\mathbf{x^2-7x+14=0}$ έχει λύσεις τις x_1, x_2, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, **χωρίς να λύσετε την εξίσωση**:

i. x_1+x_2

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

$\alpha=1, \beta=-7, \gamma=14$

$$x_1+x_2=S=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-7}{1}=7$$

ii. $x_1 \cdot x_2$

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

$$x_1 \cdot x_2=P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{14}{1}=14$$

iii. $2x_1+2x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2$

(Μονάδες: 2)

Απάντηση

$$2x_1+2x_2-x_1^2x_2-x_1x_2^2=2(x_1+x_2)-x_1\cdot x_2(x_1+x_2)$$
$$=2S-PS=S(2-P)=7(2-14)=7\cdot(-12)=-84$$

Άσκηση 4

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{x^2+y^2 = 10} \\ \mathbf{x+y = 2} \end{cases}$$

για **y > 0.**

(Μονάδες: 2.5)

Απάντηση

Λύνουμε την εξίσωση α΄ βαθμού ως προς έναν άγνωστο:

$$x + y = 2 \iff y = 2 - x$$

Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου $y = 3 - x$ ***στην εξίσωση β΄ βαθμού:***

$$x^2 + (2 - x)^2 = 10$$

Κάνουμε προς πράξεις και λύνουμε την εξίσωση β’ βαθμού που προκύπτει:

$$\iff x^2 + 4 - 4x + x^2 = 10$$
$$\iff 2x^2 - 4x + 4 = 10$$
$$\iff 2x^2 - 4x - 6 = 0$$

Διαιρούμε με 2:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 3 \text{ ή } x = -1$$

Αντικαθιστούμε προς τιμές αυτές στην εξίσωση $y = 3 - x$:

Αν $x = 3$, τότε $y = 2 - 3 = -1$, που απορρίπτεται γιατί $y > 0$.
Αν $x = -1$, τότε $y = 2 - (-1) = 3$, που γίνεται δεκτό.
Άρα η λύση είναι

$$\boxed{(x, y) = (-1,3)}$$

Άσκηση 5

Να λύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\frac{(x+1)^3\cdot(x^2-4x+4)}{x-1}\geq 0$$

(Μονάδες: 3)

Απάντηση

$$\frac{(x+1)^3\cdot(x^2-4x+4)}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3\cdot(x-2)^2}{x-1}\geq 0$$

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ (τριπλή ρίζα)
$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (διπλή ρίζα)
$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (μονή ρίζα)

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$		-1		1		$2''$		$+\infty$
πρόσημο $\frac{(x+1)^3\cdot(x-2)^2}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

και άρα

$$\frac{(x+1)^3\cdot(x-2)^2}{x-1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$$