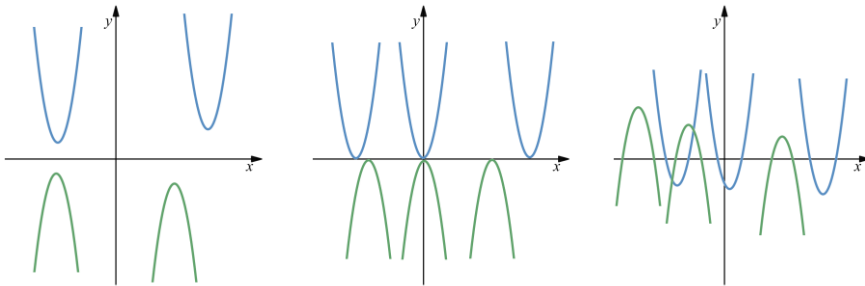


7

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$



$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

$$x_{1,2} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{-2\alpha}$$

7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = a(x+k)^2 + \lambda$, $a \neq 0$

✦ Υπενθυμίσεις

Η εξίσωση 2^{ου} βαθμού

Η εξίσωση

$$ax^2 + bx + \gamma = 0, \text{ με } a \neq 0,$$

ονομάζεται **εξίσωση 2ου βαθμού** και η αλγεβρική παράσταση

$$ax^2 + bx + \gamma, \text{ με } a \neq 0,$$

τριώνυμο.

Η ποσότητα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ λέγεται η **διακρίνουσα** του τριωνύμου.

Οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης (ισοδύναμα, οι ρίζες του τριωνύμου) δίνονται από τον τύπο

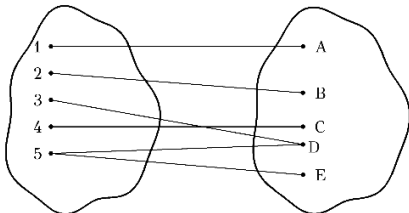
$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha},$$

όταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

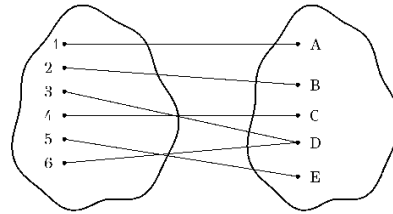
Συνάρτηση

Συνάρτηση λέγεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε ένα άλλο σύνολο B στην οποία επιτρέπεται δύο ή περισσότερα στοιχεία του A να αντιστοιχίζονται σε έναν στοιχείο του B και ΔΕΝ επιτρέπεται ένα στοιχείο του A να αντιστοιχίζεται σε δύο ή περισσότερα στοιχεία του B . Συμβολίζουμε την αντιστοιχία $A \rightarrow B$ με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, π.χ. $f: A \rightarrow B$.

Σε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, το A λέγεται **Πεδίο Ορισμού** (Π.Ο.) και το B το **Σύνολο Τιμών** (Σ.Τ.) της f .



Η αντιστοιχία **δεν είναι** συνάρτηση, αφού ο αριθμός '5' αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικά γράμματα, στο D και στο E.



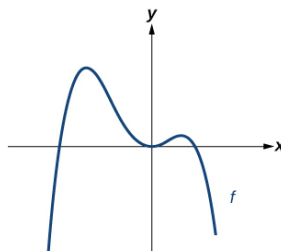
Η αντιστοιχία **είναι** συνάρτηση. Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$ και το σύνολο τιμών της, το σύνολο $\{A,B,C,D,E\}$.

Το πιο πάνω δεξιά σχήμα, αποτελεί μία μορφή αναπαράστασης συνάρτησης, με **βελοειδές διάγραμμα**. Άλλοι τρόποι αναπαράστασης μιας αντιστοιχίας η οποία ορίζει συνάρτηση είναι με **τύπο**, με **πίνακα τιμών** και με **γράφημα**.

Το γράφημα της συνάρτησης στο πάνω δεξιά σχήμα είναι το σύνολο

$$\{(1,A), (2,B), (3,D), (4,C), (5,E), (6,D)\}$$

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης γίνεται σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων:



Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές λύσεις και στην περίπτωση που έχουν, να τις προσδιορίσετε:

$$(α) \quad x^2 - 5x - 14 = 0 \quad (β) \quad x^2 - 8x + 16 = 0 \quad (γ) \quad 5x^2 - 2x + 3 = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(α) \quad x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -5, \quad \gamma = -14$$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81 > 0$$

και συνεπώς η εξίσωση έχει 2 πραγματικές άνισες λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

δηλαδή

$$\boxed{x_1 = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7}, \quad \boxed{x_2 = \frac{5-9}{2} = \frac{-4}{2} = -2}$$

$$(β) \quad x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -8, \quad \gamma = 16$$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

και συνεπώς η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις:

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4}$$

$$(γ) \quad 5x^2 - 2x + 3 = 0$$

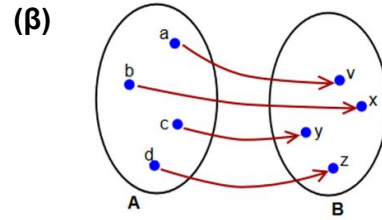
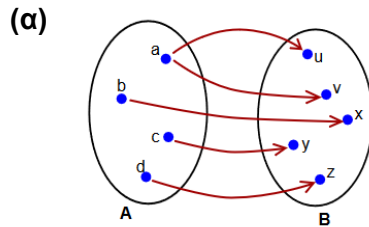
$$\alpha = 5, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 3$$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 - 60 = -56 < 0$$

και συνεπώς η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

2. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω αντιστοιχίες αποτελούν συναρτήσεις και στην περίπτωση που αποτελούν, να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και το γράφημά τους:



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η αντιστοιχία **δεν αποτελεί συνάρτηση** διότι υπάρχει στοιχείο του συνόλου A που αντιστοιχίζεται σε δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου B (το στοιχείο 'a').

(β) Η αντιστοιχία **αποτελεί συνάρτηση** διότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο του συνόλου B.

Πεδίο ορισμού: $\{a, b, c, d\}$

Σύνολο τιμών: $\{v, x, y, z\}$

Γράφημα: $\{(a, v), (b, x), (c, y), (d, z)\}$



7.1.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

Ορισμός

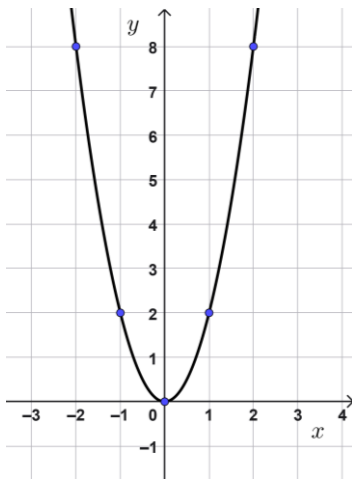
Κάθε συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$, όπου $x \in \mathbb{R}$, λέγεται **παραβολή**.

Πρακτική άσκηση:

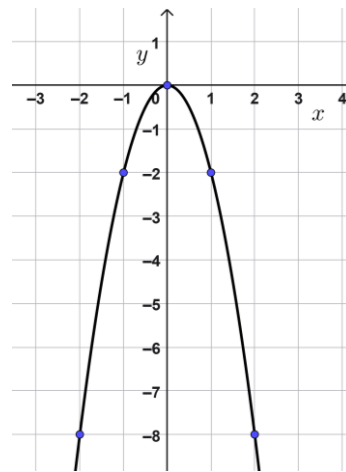
Συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα σημείων και σχεδιάστε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = -2x^2$:

x	$y = f(x)$
0	0
1	2
-1	2
2	8
-2	8

x	$y = g(x)$
0	0
1	-2
-1	-2
2	-8
-2	-8



$$f(x) = 2x^2$$



$$g(x) = -2x^2$$

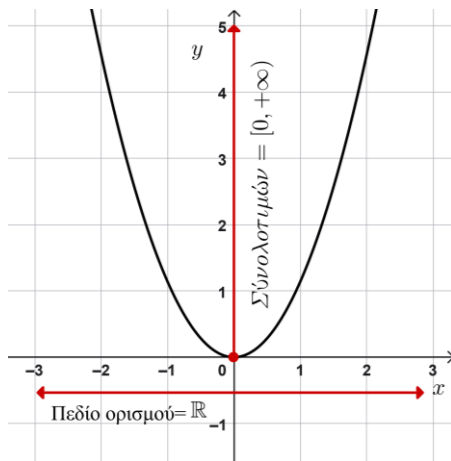
Από τις πιο πάνω γραφικές παραστάσεις εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

Στην περίπτωση που $\alpha > 0$:

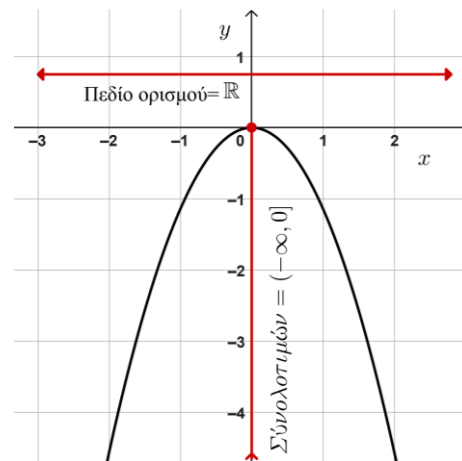
- Η **κορυφή** της παραβολής είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$.
- Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής (= **άξονας της παραβολής**) είναι ο άξονας των τεταγμένων (ο άξονας των y), ο οποίος έχει εξίσωση $x = 0$.
- Η παραβολή λαμβάνει **ελάχιστη** τιμή, την $y_{ελ.} = y_{\min} = 0$.
- Το πεδίο ορισμού της παραβολής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, \mathbb{R} .
- Το **σύνολο τιμών** της παραβολής είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.

Στην περίπτωση που $\alpha < 0$:

- Η **κορυφή** της παραβολής είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή το σημείο $O(0,0)$.
- Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής (= **άξονας της παραβολής**) είναι ο άξονας των τεταγμένων (ο άξονας των y), ο οποίος έχει εξίσωση $x = 0$.
- Η παραβολή λαμβάνει **μέγιστη** τιμή, την $y_{μέγ.} = y_{\max} = 0$.
- Το πεδίο ορισμού της παραβολής είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών, \mathbb{R} .
- Το **σύνολο** τιμών της παραβολής είναι το διάστημα $(-\infty, 0]$.



$\alpha > 0$



$\alpha < 0$

Συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο

Η παράσταση $ax^2 + \beta x + \gamma$ ($a \neq 0$) γράφεται στη μορφή $\alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$, για κάποια $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

✓ Παράδειγμα

$$(a) \quad x^2 + 6x + 1 = x^2 + 2 \cdot 3x + \underbrace{3^2 - 8}_{=1} = (x + 3)^2 - 8$$

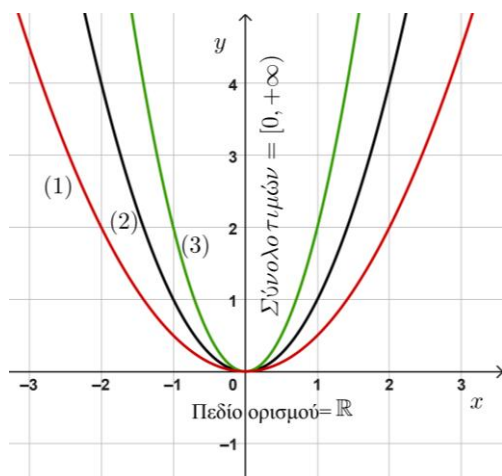
$$\begin{aligned} (b) \quad -x^2 + 3x - 2 &= -(x^2 - 3x + 2) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2\right) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g) \quad 2x^2 - 4x + 5 &= 2x^2 - 4x + 4 + 1 = 2(x^2 - 2x + 2) + 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 + 1) + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 2 + 1 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2(x - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Σημείωση -

Πως ο συντελεστής α του x^2 επηρεάζει τη μορφή της γραφικής παράστασης της παραβολής $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

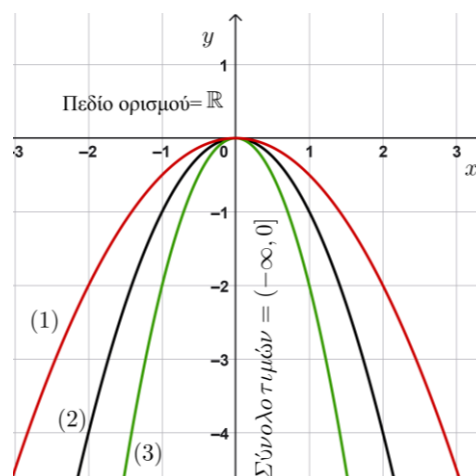
Η παραβολή ‘πλησιάζει’ τον άξονα των τεταγμένων (συμπιέζεται) καθώς οι τιμές του $|\alpha|$ αυξάνονται. Η σύγκριση γίνεται με τις ‘συναρτήσεις αναφοράς’ $f(x) = x^2$ και $f(x) = -x^2$.



(1) $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ (2) $f(x) = x^2$

(3) $g(x) = 2x^2$

$$\frac{1}{2} < 1 < 2$$



(1) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$ (2) $f(x) = -x^2$

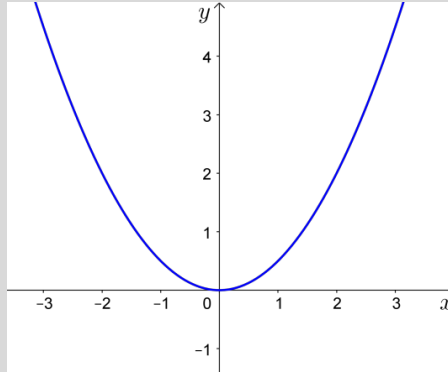
(3) $g(x) = -2x^2$

$$\left| -\frac{1}{2} \right| < |-1| < |-2|$$



Δραστηριότητες σελ. 107-108
(Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2, a \neq 0$)

1. Στο πιο κάτω διάγραμμα, δίνεται η γραφική παράσταση παραβολής με εξίσωση $y = f(x) = ax^2, a \neq 0$.



Να βρείτε:

- (α) το πρόσημο του a
- (β) το πεδίο ορισμού
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- (δ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- (ε) το σύνολο τιμών της παραβολής.

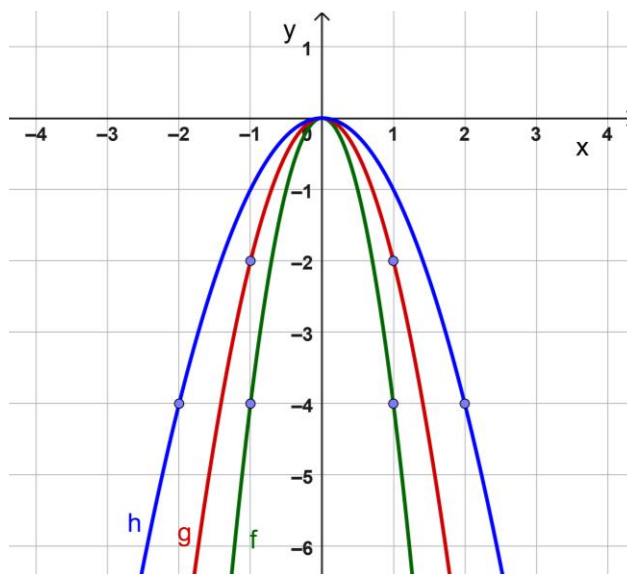
Απάντηση

- (α) $a > 0$ διότι η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.
- (β) Πεδίο ορισμού: \mathbb{R}
- (γ) **Εξίσωση** του άξονα συμμετρίας: $x = 0$
- (δ) Κορυφή: $K(0,0)$
- (ε) Σύνολο τιμών της παραβολής: $[0, +\infty)$

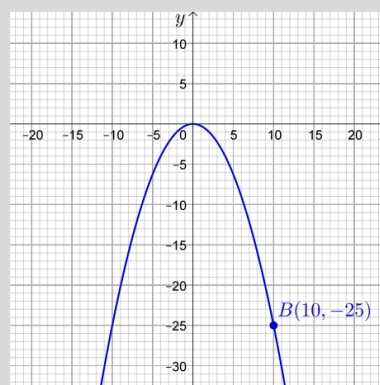
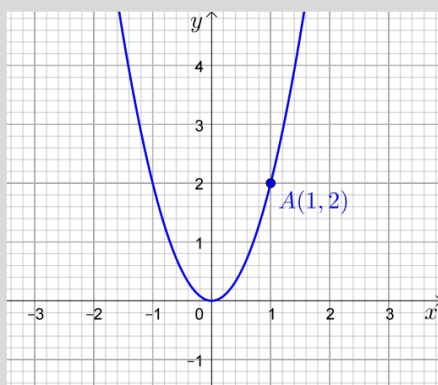
2. Να σχεδιάσετε πρόχειρα στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις παραβολές με εξισώσεις $f(x) = -4x^2, x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Και οι τρεις παραβολές έχουν κορυφή την αρχή των αξόνων.



3. Στα πιο κάτω διαγράμματα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραβολών με εξίσωση $y = ax^2, a \neq 0$.



Να βρείτε σε κάθε περίπτωση:

(α) την τιμή του a

(β) τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με τετμημένη -5 .

Απάντηση

- (α) Για να βρούμε την τιμή του a σε κάθε περίπτωση, αντικαθιστούμε ένα οποιοδήποτε σημείο του γραφήματός της (σύμφωνα με το εκάστοτε σχήμα).

Για την i.:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ A(1,2) \end{cases} \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x^2}$$

Για την ii.:

$$\begin{cases} y = ax^2 \\ B(10, -25) \end{cases} \Rightarrow -25 = a \cdot 10^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x^2}$$

(β) Για την i.:

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \cdot 5^2 = 50 \Rightarrow \boxed{(-5, 50)}$$

Για την ii.:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot 5^2 = -\frac{25}{4} \Rightarrow \boxed{\left(-5, -\frac{25}{4}\right)}$$

4. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω παραβολές παρουσιάζουν μέγιστη τιμή και ποιες ελάχιστη τιμή:

(α) $f(x) = 3x^2$ (β) $f(x) = -5x^2$ (γ) $f(x) = -x^2$

Απάντηση

Η $f(x) = 3x^2$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, διότι $a = 3 > 0$ ενώ οι συναρτήσεις $f(x) = -5x^2$ και $f(x) = -x^2$ παρουσιάζουν μέγιστη τιμή αφού $a = -5 < 0$ και $a = -1 < 0$ αντίστοιχα.

Υπενθύμιση

- Έστω η παραβολή $f(x) = ax^2$.
Αν $a > 0 \rightarrow$ η παραβολή έχει **ελάχιστη τιμή** (ανοίγει προς τα πάνω).
- Αν $a < 0 \rightarrow$ η παραβολή έχει **μέγιστη τιμή** (ανοίγει προς τα κάτω).

5. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία η παραβολή με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να διέρχεται από το σημείο $(2, 12)$.

Απάντηση

Το γράφημα της παραβολής με εξίσωση $y = (3\lambda - 12)x^2$ περνά από το σημείο $(2, 12)$ αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξίσωση αυτή:

$$\begin{cases} y = (3\lambda - 12)x^2 \\ x = 2, y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow 12 = (3\lambda - 12)2^2 \Leftrightarrow 3 = 3\lambda - 12 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

6. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2$, $x \in \mathbb{R}$ να είναι παραβολή και να παρουσιάζει μέγιστη τιμή.



Απάντηση

Για να εκφράζει το γράφημα της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = (-8\kappa + 16)x^2$ παραβολή με μέγιστο, πρέπει (και αρκεί)

$$-8\kappa + 16 < 0 \Leftrightarrow -8\kappa < -16 \Leftrightarrow \kappa > \frac{16}{8} = 2.$$

7. Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που παρουσιάζουν τα πιο κάτω ζεύγη παραβολών:

(α) $f(x) = 2x^2$ και $g(x) = 5x^2$

(β) $f(x) = -x^2$ και $g(x) = -\frac{2x^2}{3}$.

Απάντηση

(α) $f(x) = 5x^2$ και $g(x) = 2x^2$.

Ομοιότητες:

Έχουν κορυφή στην αρχή των αξόνων

Διαφορές:

Η f είναι πιο 'συμπιεσμένη' προς τα μέσα σε σχέση με την g .

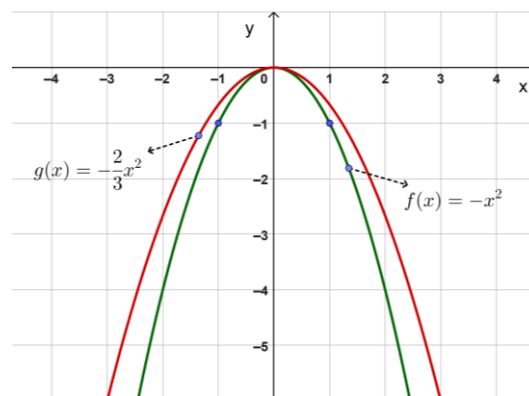
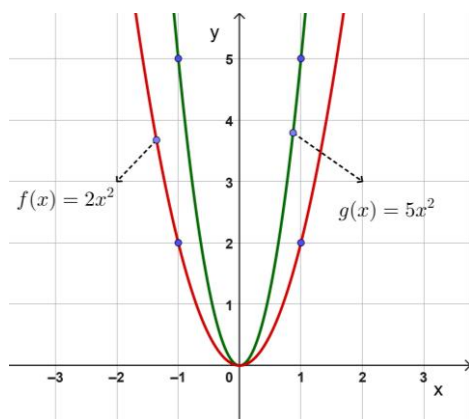
(β) $f(x) = -x^2$ και $g(x) = -\frac{2x^2}{3}$.

Ομοιότητες:

Έχουν κορυφή στην αρχή των αξόνων

Διαφορές:

Η f είναι πιο 'συμπιεσμένη' προς τα μέσα σε σχέση με την g .



► **7.1.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2, +\lambda \alpha \neq 0$**

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε πως αλλάζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2, +\lambda \alpha \neq 0$ καθώς μεταβάλλονται οι τιμές των κ και λ .

Γενικά για συναρτήσεις, έχουμε το πιο κάτω:

Οριζόντιες και κάθετες μετατοπίσεις της f ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$)

Συνάρτηση	Σχέση με την f	Σημεία στη νέα γραφική παράσταση
$f(x) + \lambda$	Κατακόρυφη μετατόπιση της $y = f(x)$ κατά λ μονάδες προς τα πάνω (κατά μήκος του άξονα των y)	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta + \lambda)$
$f(x) - \lambda$	Κατακόρυφη μετατόπιση της $y = f(x)$ κατά λ μονάδες προς τα κάτω (κατά μήκος του άξονα των y)	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \beta - \lambda)$
$f(x - \lambda)$	Οριζόντια μετατόπιση της $y = f(x)$ κατά λ μονάδες δεξιά (κατά μήκος του άξονα των x)	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha + \lambda, \beta)$
$f(x + \lambda)$	Οριζόντια μετατόπιση της $y = f(x)$ κατά λ μονάδες αριστερά (κατά μήκος του άξονα των x)	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha - \lambda, \beta)$

Διαστολές και συστολές της f ($\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$)

Συνάρτηση	Σχέση με την f	Σημεία στη νέα γραφική παράσταση
$y = \lambda f(x)$	Αν $\lambda > 1 \Rightarrow$ Κατακόρυφη διαστολή της $y = f(x)$ κατά παράγοντα λ Αν $0 < \lambda < 1 \Rightarrow$ Κατακόρυφη συστολή της $y = f(x)$ κατά παράγοντα λ	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \lambda\beta)$
$y = f(\lambda x)$	Αν $\lambda > 1 \Rightarrow$ Οριζόντια συστολή της $y = f(x)$ κατά παράγοντα λ Αν $0 < \lambda < 1 \Rightarrow$ Οριζόντια διαστολή της $y = f(x)$ κατά παράγοντα λ	$(\alpha, \beta) \rightarrow (\alpha, \lambda\beta)$

Ειδικές Περιπτώσεις

Η $y = f(-x)$ εκφράζει κατοπτρισμό της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα των y .

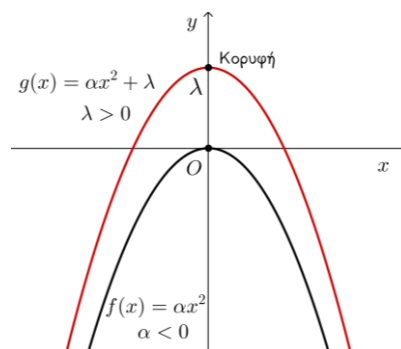
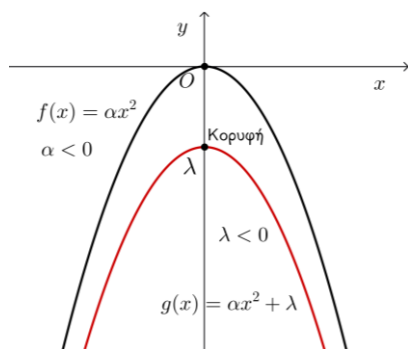
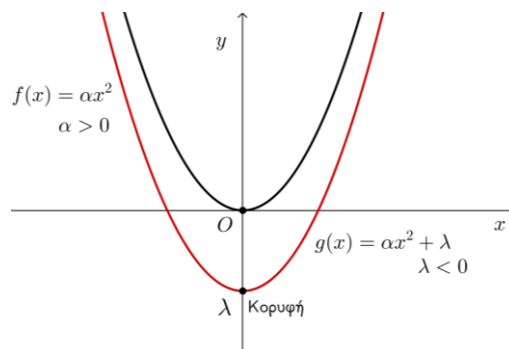
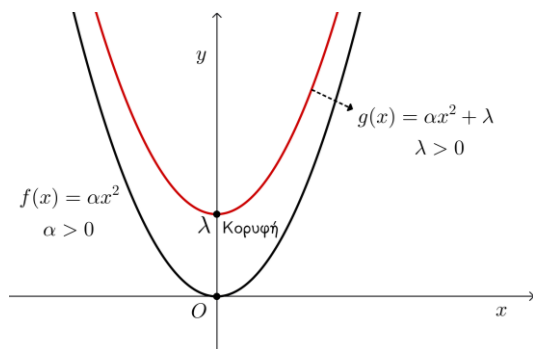
Η $y = -f(x)$ εκφράζει κατοπτρισμό της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα των x .

Στην περίπτωση της παραβολής $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2, +\lambda \alpha \neq 0$, τα πιο πάνω μεταφράζονται ως εξής:

Περίπτωση 1: $f(x) = ax^2 + \lambda$

Η γραφική παράσταση της παραβολής $g(x) = ax^2 + \lambda$ προκύπτει από την **κατακόρυφη μετατόπιση** της $f(x) = ax^2$ κατά κ μονάδες πάνω αν $\lambda > 0$ και **κατακόρυφη μετατόπιση** της $f(x) = ax^2$ κατά κ μονάδες κάτω αν $\lambda < 0$.

Η κορυφή της παραβολής $g(x) = ax^2 + \lambda$ είναι το σημείο $K(0, \lambda)$, σε κάθε περίπτωση.

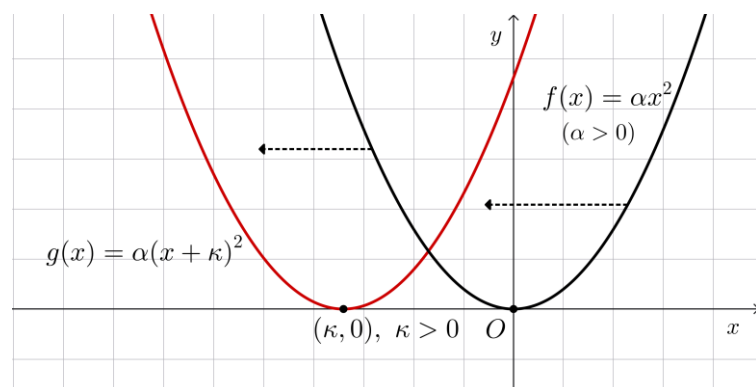
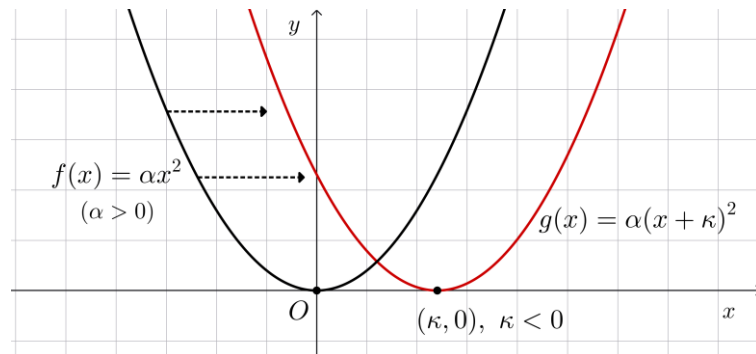


Περίπτωση 2: $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2$

▣ Έστω ότι $\alpha > 0$.

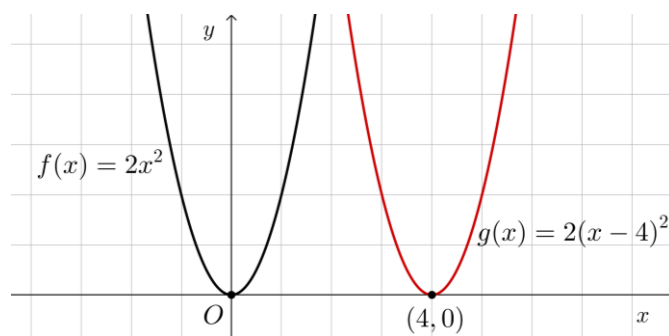
Τότε, η γραφική παράσταση της παραβολής $g(x) = \alpha(x - \kappa)^2$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = \alpha x^2$ κατά κ **μονάδες δεξιά** στον άξονα των x αν $\kappa < 0$ και **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = \alpha x^2$ κατά κ **μονάδες αριστερά** στον άξονα των x αν $\kappa > 0$.

Πράγματι, αφού $f(\kappa) = 0$, η **κορυφή** της παραβολής είναι το σημείο $(\kappa, 0)$ και ο **άξονας συμμετρίας**, η ευθεία $x = \kappa$.



✓ Παράδειγμα

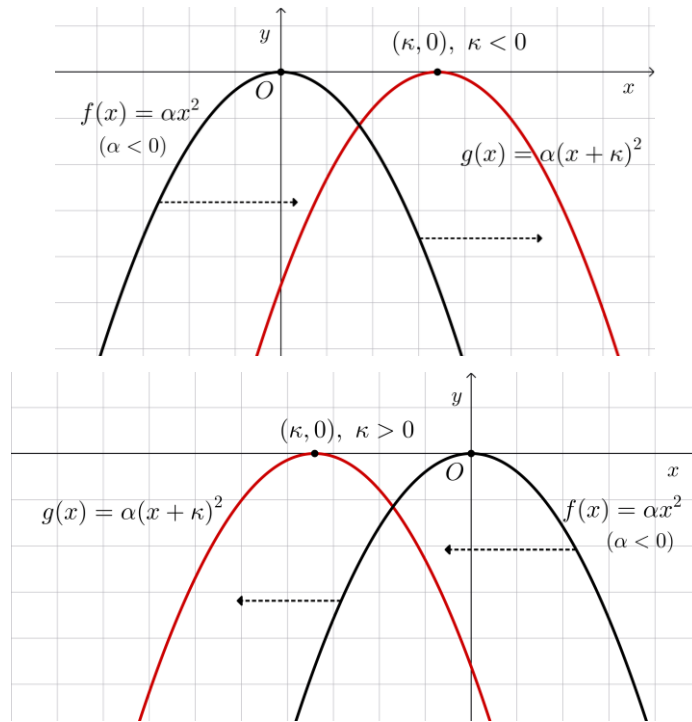
Η γραφική παράσταση της παραβολής $g(x) = 2(x - 4)^2$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = 2x^2$ κατά 4 **μονάδες δεξιά** στον άξονα των x . Η κορυφή της g είναι το σημείο $K(4,0)$ και ο άξονας συμμετρίας η ευθεία $x = 4$.



▣ Έστω ότι $\alpha < 0$.

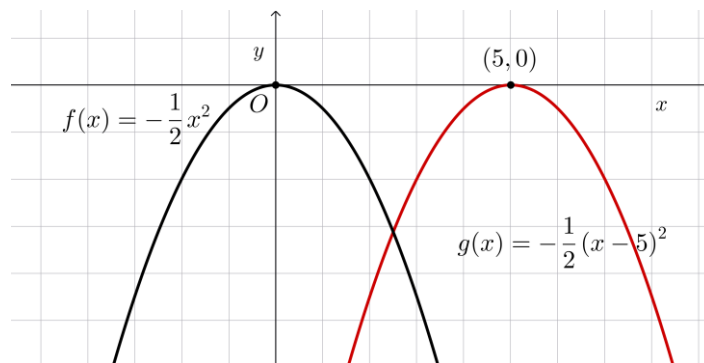
Τότε, η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = \alpha x^2$ κατά κ **μονάδες δεξιά** στον άξονα των x αν $\kappa < 0$ και **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = \alpha x^2$ κατά κ **μονάδες αριστερά** στον άξονα των x αν $\kappa > 0$.

Πράγματι, αφού $f(\kappa) = 0$, η **κορυφή** της παραβολής είναι το σημείο $(\kappa, 0)$ και ο **άξονας συμμετρίας**, η ευθεία $x = \kappa$.



Παράδειγμα

Η γραφική παράσταση της παραβολής $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2$ προκύπτει από την **οριζόντια μετατόπιση** της $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ κατά 5 **μονάδες δεξιά** στον άξονα των x . Η κορυφή της g είναι το σημείο $K(5,0)$ και ο άξονας συμμετρίας η ευθεία $x = 5$.



Συνοψίζοντας:

▣ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = ax^2 + \lambda, \text{ με } a \neq 0, x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R},$$

προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\lambda|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2, a \neq 0$.

Παρατηρήσεις

- Αν $\lambda > 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι λ μονάδες προς τα πάνω.
- Αν $\lambda < 0$, η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $|\lambda|$ μονάδες προς τα κάτω.

▣ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = a(x + \kappa)^2, \text{ με } a \neq 0, x \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R},$$

προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2, a \neq 0$.

Παρατηρήσεις

- Αν $\kappa > 0$, η οριζόντια μετατόπιση είναι κ μονάδες προς τα αριστερά.
- Αν $\kappa < 0$, η οριζόντια μετατόπιση είναι $|\kappa|$ μονάδες προς τα δεξιά.

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

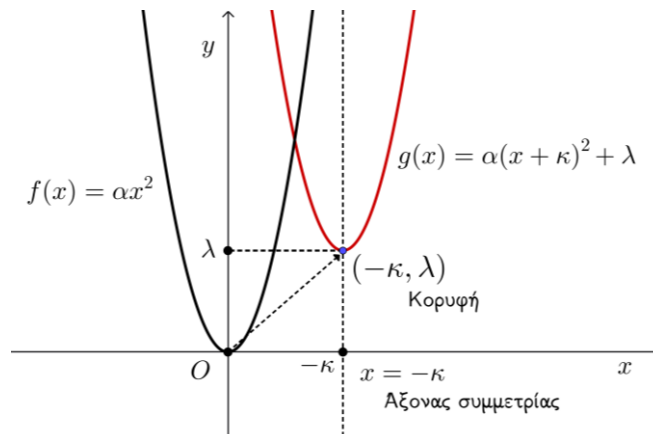
▣ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda, \text{ με } a \neq 0, x \in \mathbb{R}, \kappa, \lambda \in \mathbb{R},$$

προκύπτει από μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες οριζόντια και κατά $|\lambda|$ μονάδες κατακόρυφα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2, a \neq 0$.

Η γραφική παράσταση της g έχει:

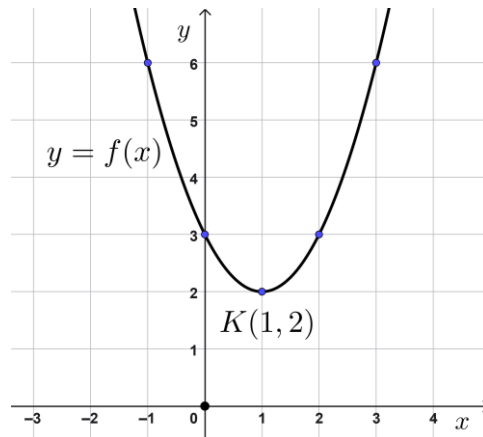
- **Κορυφή** το σημείο $(-\kappa, \lambda)$
- **Άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x = -\kappa$
- **Ελάχιστη τιμή** λ , όταν $a > 0$
- **Μέγιστη τιμή** λ , όταν $a < 0$





✓ Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται το γράφημα της παραβολής $y = f(x) = \alpha(x + \kappa)^2, \alpha \neq 0$.



Να περιγράψετε λεκτικά πως προκύπτουν από την f οι πιο κάτω συναρτήσεις και να προσδιορίζετε την εικόνα των σημείων που αναγράφονται στη γραφική παράσταση της f μέσα από την κάθε μία.

Τέλος, να σχεδιάσετε τη γραφική τους παράσταση:

$$g(x) = f(x + 1), \quad \kappa(x) = 2f(x) + 1$$

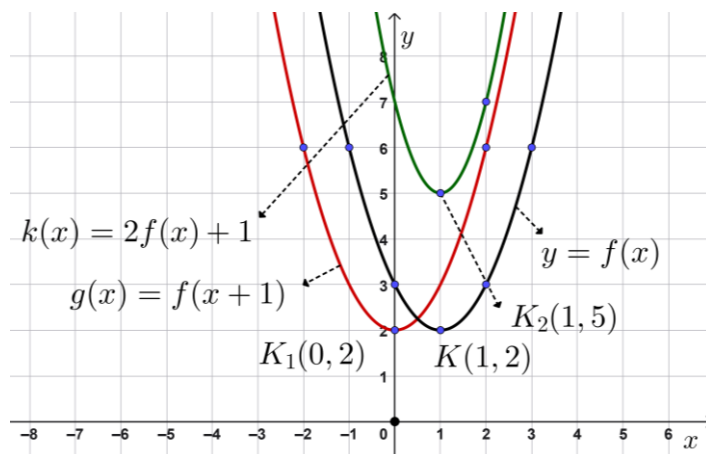
Λύση

Η g αποτελεί μια οριζόντια μετατόπιση της f κατά μια μονάδα αριστερά.

Η κ αποτελεί μια κατακόρυφη συστολή της f κατά 2 μονάδες μαζί με μια κατακόρυφη μετατόπιση (της f) κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

$(x, f(x))$	$(x, g(x))$
(1, 2)	(0, 1)
(2, 3)	(1, 3)
(3, 6)	(2, 6)
(-1, 6)	(-2, 6)

$(x, f(x))$	$(x, \kappa(x))$
(1, 2)	(1, 5)
(2, 3)	(2, 7)
(3, 6)	(3, 13)
(-1, 6)	(-1, 13)

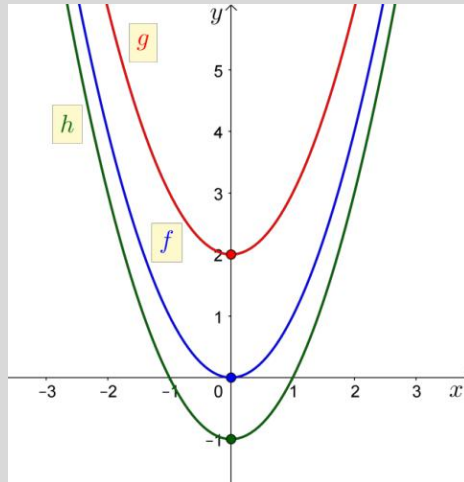




Δραστηριότητες σελ. 116-117

(Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2, \alpha \neq 0$)

1. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και h . Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h , αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2$ και οι συναρτήσεις g και h είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις της f .

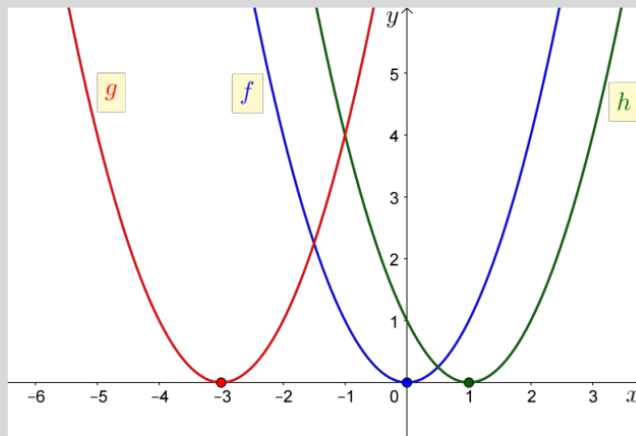


Απάντηση

$$g(x) = x^2 + 2$$

$$h(x) = x^2 - 1$$

2. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και h . Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων g και h , αν η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = x^2$ και οι συναρτήσεις g και h είναι οριζόντιες μετατοπίσεις της f .



Απάντηση

$$g(x) = (x + 3)^2$$

$$h(x) = (x - 1)^2$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
- (α) 2 μονάδες προς τα κάτω (β) 10 μονάδες προς τα πάνω
- (γ) 3 μονάδες προς τα κάτω (δ) 0,5 μονάδα προς τα πάνω

Απάντηση

- (α) $f(x) = x^2 - 2$
- (β) $f(x) = x^2 + 10$
- (γ) $f(x) = x^2 - 3$
- (δ) $f(x) = x^2 + 0,5$

4. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = -2x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
- (α) 1 μονάδα προς τα αριστερά (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά
- (γ) 4 μονάδες προς τα αριστερά (δ) 0,5 μονάδα προς τα δεξιά

Απάντηση

- (α) $f(x) = -2(x + 1)^2$
- (β) $f(x) = -2(x - 2)^2$
- (γ) $f(x) = -2(x + 4)^2$
- (δ) $f(x) = -2(x - 0,5)^2$

5. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που προκύπτει από τη μετατόπιση της παραβολής με εξίσωση $y = x^2$ σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
- (α) 1 μονάδα προς τα αριστερά και 2 μονάδες προς τα πάνω
- (β) 2 μονάδες προς τα δεξιά και 4 μονάδες προς τα πάνω
- (γ) 3 μονάδες προς τα αριστερά και 1 μονάδα προς τα κάτω
- (δ) 5 μονάδες προς τα δεξιά και 3 μονάδες προς τα κάτω

Απάντηση

- (α) $f(x) = (x + 1)^2 + 2$
- (β) $f(x) = (x - 2)^2 + 4$
- (γ) $f(x) = (x + 3)^2 - 1$
- (δ) $f(x) = (x - 5)^2 - 3$

6. Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής των πιο κάτω παραβολών. Στη συνέχεια, να τις παραστήσετε γραφικά.

(α) $f(x) = x^2 + 3$

(β) $f(x) = x^2 - 4$

(γ) $f(x) = -x^2 + 1$

(δ) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

(ε) $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$

(στ) $f(x) = 3(x - 1)^2 + 7$

(ζ) $f(x) = (-x - 2)^2 + 3$

(η) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(θ) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$

(ι) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

Απάντηση

(α) $f(x) = x^2 + 3$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες πάνω, της $y = x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 0$

Κορυφή: $K(0,3)$

(β) $f(x) = x^2 - 4$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδες κάτω, της $y = x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 0$

Κορυφή: $K(0,-4)$

(γ) $f(x) = -x^2 + 1$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα πάνω, της $y = -x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 0$

Κορυφή: $K(0,1)$

(δ) $f(x) = (x - 1)^2 + 3$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες πάνω και οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά, της $y = -x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 1$

Κορυφή: $K(1,3)$

(ε) $f(x) = -(x + 1)^2 + 9$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 9 μονάδες πάνω και οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά, της $y = -x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = -1$

Κορυφή: $K(-1,9)$

(στ) $f(x) = 3(x - 1)^2 + 7$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 7 μονάδες πάνω και οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα δεξιά, της $y = 3x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 1$

Κορυφή: $K(1,7)$

(ζ) $f(x) = (-x - 2)^2 + 3 = (x + 2)^2 + 3$

Η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες πάνω και οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες αριστερά, της $y = 3x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = -2$

Κορυφή: $K(-2,7)$



(η) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2 - 1$$

$$= (x - 2)^2 - 1$$

Άρα, η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 1 μονάδα κάτω και οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες δεξιά, της $y = x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 2$

Κορυφή: $K(2, -1)$

(θ) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$

Συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο:

$$-x^2 + 2x + 5 = -(x^2 - 2x - 5) = -(x^2 - 2x + 1 - 6)$$

$$= -(x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1) + 6 = -(x + 1)^2 + 6$$

$$= -(x - 1)^2 + 6$$

Άρα, η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση 4 μονάδες κάτω και οριζόντια μετατόπιση 1 μονάδα αριστερά, της $y = -x^2$.

Άξονας συμμετρίας: $x = 1$

Κορυφή: $K(1, 6)$

(ι) $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

Συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο:

$$2x^2 - 6x + 1 = 2(x^2 - 3x) + 1 = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + 1$$

$$= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 1 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9}{4} + 1$$

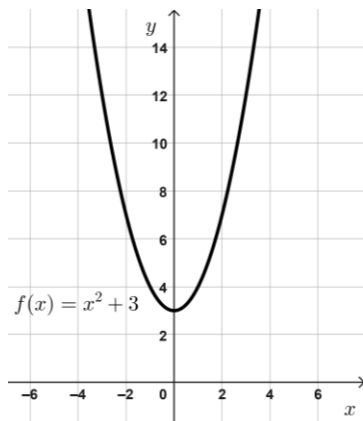
$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 1 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

Άρα, η f αποτελεί κατακόρυφη μετατόπιση $\frac{7}{2}$ μονάδες κάτω και οριζόντια μετατόπιση $\frac{3}{2}$ μονάδες δεξιά, της $y = 2x^2$.

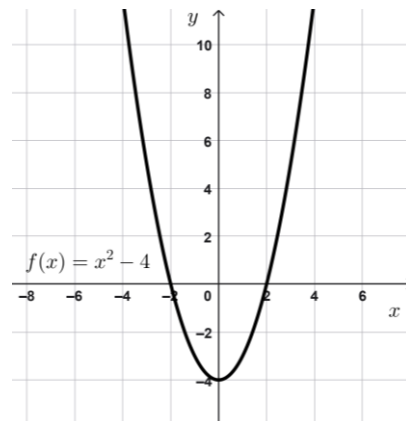
Άξονας συμμετρίας: $x = \frac{3}{2}$

Κορυφή: $K\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

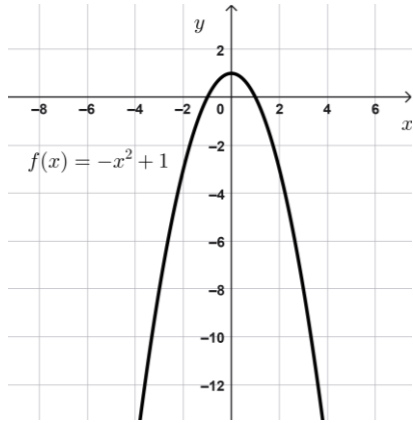
Γραφικές παραστάσεις:



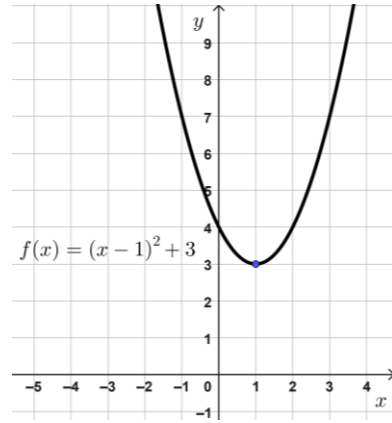
(α)



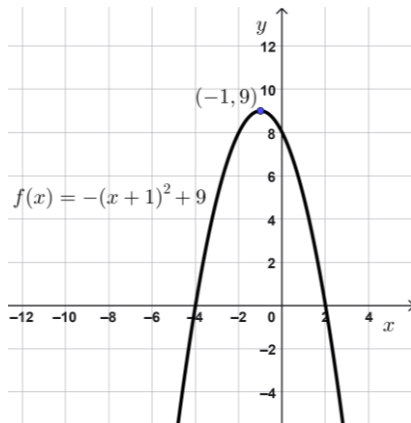
(β)



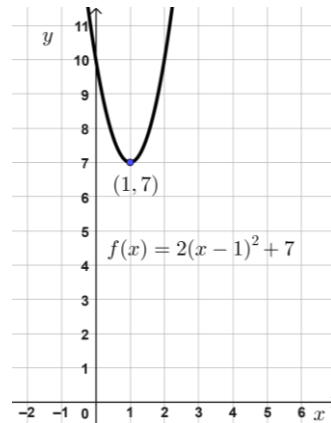
(γ)



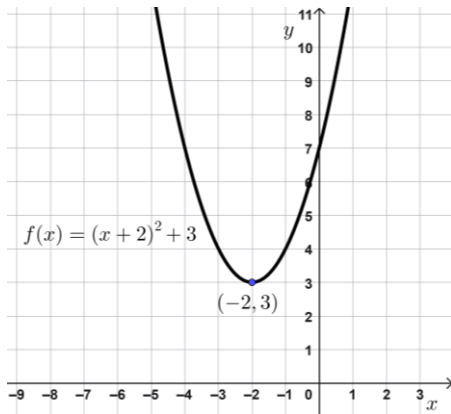
(δ)



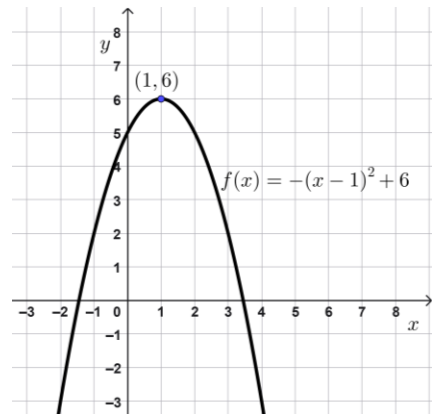
(ε)



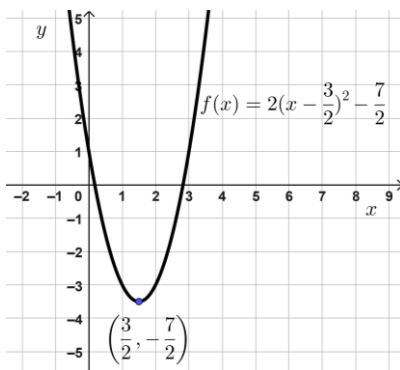
(στ)



(ζ)



(θ)



(ι)

7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ και η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Στην ενότητα αυτή μελετάμε τη δευτεροβάθμια συνάρτηση (παραβολή), δηλαδή τη συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$. Μαθαίνουμε τρόπους υπολογισμού του άξονα συμμετρίας, της κορυφής και γενικότερα τι πληροφορίες μας δίνουν οι συντελεστές a, β και γ για τη γραφική της παράσταση.

Παράλληλα, συνδέουμε τη μελέτη της συνάρτησης με την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, ώστε να κατανοήσουμε πώς οι ρίζες της εξίσωσης σχετίζονται με τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα $x'x$.

✦ Υπενθυμίσεις

Μια εξίσωση της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$, όπου a, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 0$, ονομάζεται **δευτεροβάθμια εξίσωση** (ως προς τη μεταβλητή x).
π.χ. $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $-5x^2 - 8x + 3 = 0$, $x^2 - 10 = 0$.

Ένας πραγματικός αριθμός c ονομάζεται **ρίζα** (ή λύση) της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, αν ισχύει ότι $ac^2 + bc + \gamma = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $x = c$ ικανοποιεί την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

- Για παράδειγμα, ο αριθμός $x = 2$ είναι ρίζα του τριωνύμου

$$x^2 - 5x + 6$$

Πράγματι:

$$x = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 10 - 10 = 0$$

Ο αριθμός $x = 3$ είναι επίσης ρίζα του πιο πάνω τριωνύμου:

$$x = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 15 - 15 = 0$$

7.2.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

Πρόταση

Η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ έχει κορυφή το σημείο

$$K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right).$$

Συγκεκριμένα, αν $a > 0$, τότε λαμβάνει **ελάχιστη τιμή** στο σημείο αυτό ενώ αν $a < 0$ λαμβάνει **μέγιστη τιμή**.

Επίσης, η ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2a}$ είναι ο **άξονας συμμετρίας** της παραβολής.

Απόδειξη

▣ **1ος τρόπος** (Με συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο)

$$\begin{aligned} ax^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left(x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right) + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right] \\ &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 \right] \\ &= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \alpha \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \\ &= \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν το τριώνυμο $\alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$ έχει, όπως είδαμε, άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, \lambda)$, τότε, σύμφωνα με το πιο πάνω αποτέλεσμα, το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει ως άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2a}$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $K\left(-\frac{\beta}{2a}, f\left(-\frac{\beta}{2a}\right)\right)$.

▣ **2ος τρόπος (ως πολυώνυμο)**

Αφού το τριώνυμο $\alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\kappa$ και κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $(-\kappa, \lambda)$, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε τις τιμές των κ και λ στην ισότητα των δυο γραφών του τριωνύμου:

$$\alpha(x + \kappa)^2 + \lambda = ax^2 + \beta x + \gamma:$$

$$\alpha(x + \kappa)^2 + \lambda = ax^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow \alpha(x^2 + 2\kappa x + \kappa^2) + \lambda = ax^2 + \beta x + \gamma$$



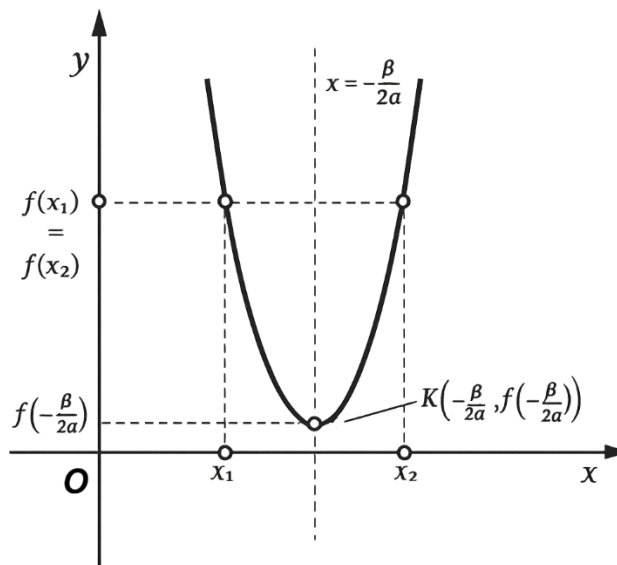
$$\Leftrightarrow \alpha x^2 + 2\alpha\kappa x + \alpha\kappa^2 + \lambda = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

εξισώνω όρο προς όρο $\Leftrightarrow 2\alpha\kappa = \beta$ και $\alpha\kappa^2 + \lambda = \gamma$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{\beta}{2\alpha} \\ \lambda = \gamma - \alpha\kappa^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{\beta}{2\alpha} \\ \lambda = \gamma - \alpha\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{\beta}{2\alpha} \\ \lambda = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{\beta}{2\alpha} \\ \lambda = -\frac{\Delta}{4\alpha} \end{cases}$$



Παρατηρήσεις

• Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει ελάχιστη τιμή, την

$y_{min} = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα

$$\left[f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right), +\infty\right).$$

Για παράδειγμα, η παραβολή $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$, ελάχιστη τιμή την $y_{min} = f(-1) = -1$ και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, +\infty)$.

- Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει μέγιστη τιμή, την

$y_{max} = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα

$$\left(-\infty, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right].$$

Για παράδειγμα, η παραβολή $f(x) = -3x^2 + 12x - 5$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{12}{2 \cdot (-3)} = 2$, μέγιστη τιμή την $y_{max} = f(2) = 7$ και το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-\infty, 7]$.

- Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, f(0)) = (0, \gamma)$.

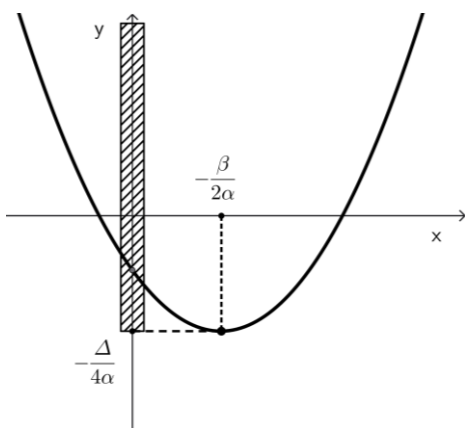
Για παράδειγμα, η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = x^2 - x + 3$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$.

♦ Παρατήρηση

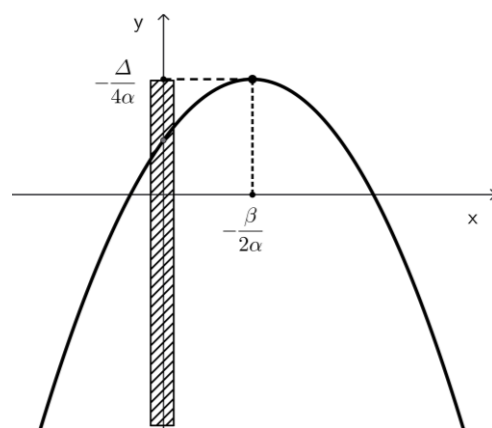
Από την πιο πάνω απόδειξη, έχουμε ότι:

$$f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\frac{\Delta}{4\alpha}$$

♦ Σύνολο τιμών της παραβολής



Σύνολο τιμών: $\left[f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right), +\infty\right) = \left[-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$.



Σύνολο τιμών: $\left(-\infty, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right] = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right]$

✓ Παράδειγμα

Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 2x - 5, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$f(x) = x^2 - 2x - 5 = x^2 - 2x + 1 - 6 = (x - 1)^2 - 6$$

και άρα η παραβολή f έχει κορυφή το σημείο με συντεταγμένες $K(1, -6)$ η οποία λαμβάνει ελάχιστη τιμή $y_{min} = -6$

Έτσι, το σύνολο τιμών της παραβολής αυτής είναι το διάστημα $[-6, \infty)$.

✓ Παράδειγμα

Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = -x^2 + 5x - 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Βήμα 1: Συμπληρώνω σε τέλειο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} -x^2 + 5x - 2 &= -(x^2 - 5x + 2) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2\right) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2\right) = -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}\right) \\ &= -\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + \frac{17}{4} = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

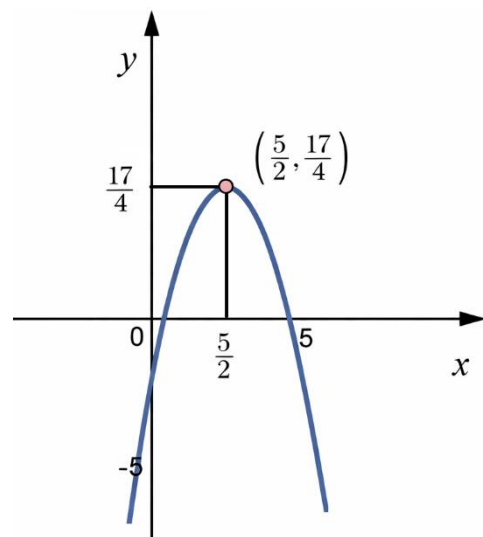
Βήμα 2: Βρίσκω τις συντεταγμένες της κορυφής:

$$K\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$$

Βήμα 3: Διαπιστώνω αν στην κορυφή της η παραβολή έχει ελάχιστη ή μέγιστη τιμή. Αυτό θα μας το δείξει το πρόσημο του συντελεστή α στη γραφή $f(x) = \alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$ της παραβολής:

είναι $\alpha = -1 < 0$ και άρα η παραβολή έχει μέγιστο στο σημείο με συντεταγμένες $K\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$, δηλαδή

$$y_{max} = \frac{17}{4}$$



Βήμα 4: Γράφω το σύνολο τιμών:

$$\left(-\infty, \frac{17}{4}\right]$$

7.2.2 Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Η ποσότητα που μας δείχνει το είδος των λύσεων της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (a \neq 0)$$

είναι η καλούμενη **διακρίνουσα** (του τριωνύμου):

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

✓ Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα των πιο κάτω τριωνύμων:

(α) $2x^2 + 3x - 6$

(β) $-x^2 + 3x$

(γ) $4x^2 - 7x + 5$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $2x^2 + 3x - 6$

$a = 2, \beta = 3, \gamma = -6$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 9 + 48 = 57$$

(β) $-x^2 + 3x$

$a = -1, \beta = 3, \gamma = 0$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0 = 9 - 0 = 9$$

(γ) $4x^2 - 7x + 5$

$a = 4, \beta = -7, \gamma = 5$

Άρα,

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 49 - 80 = -31$$

- ✦ Η διακρίνουσα ενός τριωνύμου, μας δίνει πληροφορία για το είδος και το πλήθος των ριζών του (δηλαδή το πόσες λύσεις έχει, καμία, μία ή δύο) και, στην περίπτωση που έχει, ποιες είναι αυτές.

Συγκεκριμένα, ισχύει το πιο κάτω:

- Αν $\Delta > 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) **έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές λύσεις.**
- Αν $\Delta = 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) **έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.**
- Αν $\Delta < 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) **δεν έχει πραγματικές λύσεις.**



Παράδειγμα

Να βρείτε το είδος των ριζών των πιο κάτω εξισώσεων:

(α) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ (β) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (γ) $4x^2 - 7x + 5 = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $3x^2 + 2x - 5$

$\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -5$

Έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64$$

και συνεπώς η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες.

(β) $x^2 - 4x + 4$

$\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 4$

Έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

και συνεπώς η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

(γ) $4x^2 + 7x + 5$

$\alpha = 4, \beta = -7, \gamma = 5$

Έχουμε:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 49 - 80 = -31$$

και συνεπώς η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

✦ **Υπολογισμός ριζών του τριωνύμου**

- Αν $\Delta > 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει **δύο διακεκριμένες πραγματικές λύσεις**, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αυτό σημαίνει

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

και

$$x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta = 0$, τότε η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$) έχει **δύο πραγματικές και ίσες λύσεις**, τις

$$x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

✓ **Παράδειγμα**

Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές λύσεις και στην περίπτωση που έχουν, να τις προσδιορίσετε:

(α) $x^2 - 5x - 14 = 0$

(β) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(γ) $5x^2 - 2x + 3 = 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $x^2 - 5x - 14 = 0$

$\alpha = 1, \beta = -5, \gamma = -14$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81 > 0$

και συνεπώς η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{5 + 9}{2} = \frac{14}{2} = 7, \quad x_2 = \frac{5 - 9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

(β) $x^2 - 8x + 16 = 0$

$\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = 16$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$

και συνεπώς η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

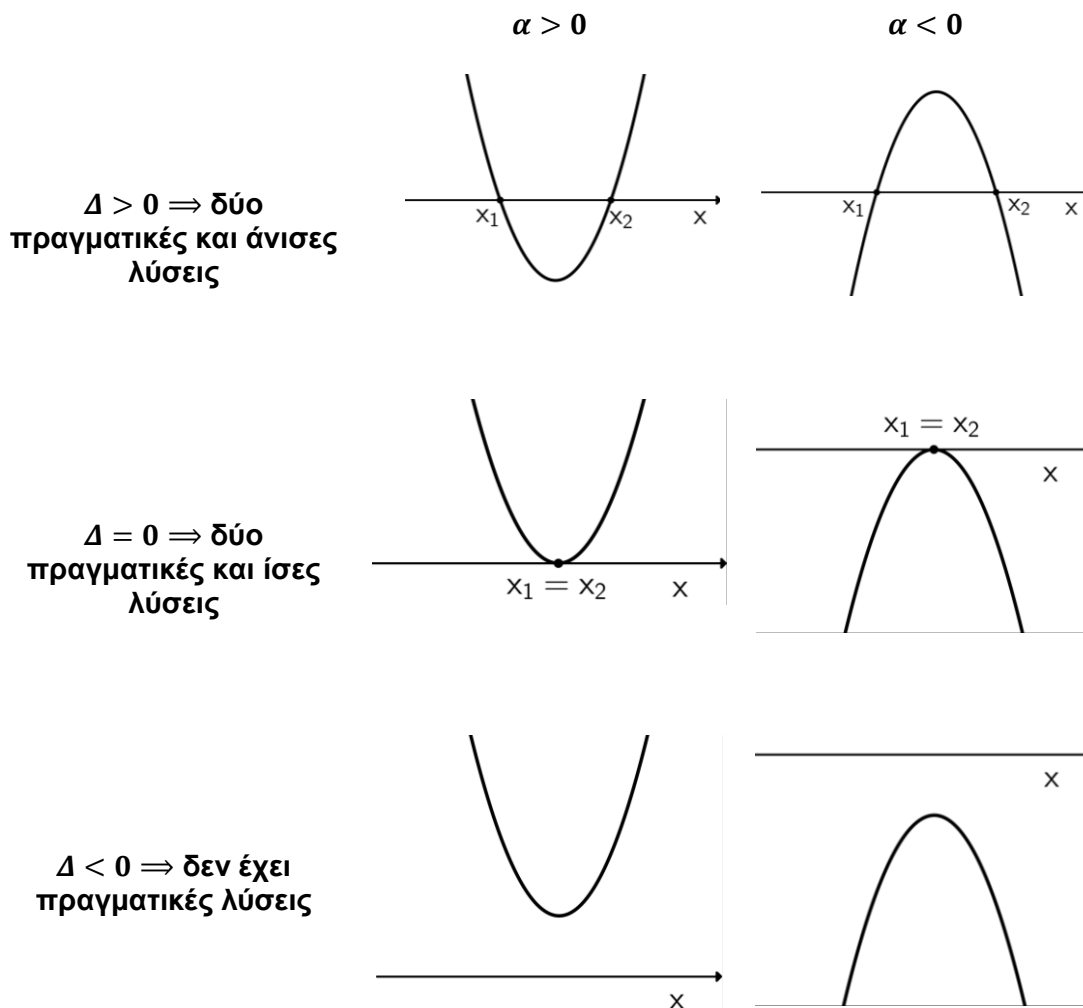
(γ) $5x^2 - 2x + 3 = 0$

$\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 - 60 = -56 < 0$

και συνεπώς η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ



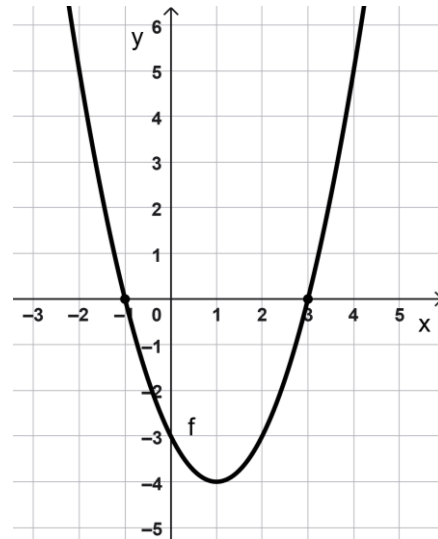
✓ Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραβολής

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad (\alpha \neq 0).$$

Να προσδιορίσετε:

- (α) το πρόσημο του συντελεστή α
- (β) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- (δ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- (ε) τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή και την τιμή $f(0)$
- (στ) το πεδίο ορισμού της παραβολής
- (ζ) το σύνολο τιμών της παραβολής
- (η) τις ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- (α) $\alpha > 0$, διότι η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο
- (β) $\Delta > 0$ διότι η παραβολή τέμνει δύο φορές τον άξονα των τετμημένων
- (γ) $x = 1$
- (δ) $K(1, -4)$
- (ε) $y_{min} = f(1) = -4$ και $f(0) = -3 = \gamma$
- (στ) \mathbb{R}
- (ζ) $[-4, +\infty)$
- (η) $x_1 = -1, x_2 = 3$

✓ Παράδειγμα

Έστω η παραβολή

$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να προσδιορίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες της κορυφής της
- (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (γ) τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της
- (δ) το σύνολο τιμών της.

→ **Υπενθύμιση:**
 Η κορυφή της παραβολής
 $y = \alpha(x + \kappa)^2 + \lambda$
 είναι το σημείο $K(-\kappa, \lambda)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $K(2, -5)$ (β) $x = 2$

(γ) $\alpha > 0 \Rightarrow$ η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο $\Rightarrow y_{min} = -5$

(δ) $[-5, +\infty)$

✓ Παράδειγμα

Έστω η παραβολή

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να προσδιορίσετε:

- (α) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (β) τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της
- (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της
- (δ) το σύνολο τιμών της
- (ε) τα σημεία τομής της παραβολής με τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα των x).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1 ^{ος} τρόπος Με χρήση τύπων	2 ^{ος} τρόπος Με συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο
$\alpha = 2, \quad \beta = -4, \quad \gamma = -5$ (α) Εξίσωση άξονα συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$	$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 5 &= 2(x^2 - 2x) - 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 5 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 - 5 \\ &= 2(x - 1)^2 - 7 \end{aligned}$

(β) $\alpha = 2 > 0 \Rightarrow$ η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, την:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) &= f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 5 \\ &= 2 - 4 - 5 = -7 \\ &\Rightarrow y_{\min} = -7 \end{aligned}$$

(γ) Κορυφή:

$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right) = (1, -7)$$

(δ) Σύνολο τιμών: $[-7, +\infty)$

(ε)

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) \\ &= 16 + 40 = 56 > 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές λύσεις:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{56}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 9}{4} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\boxed{x_1 = \frac{4 + \sqrt{56}}{2}}, \quad \boxed{x_2 = \frac{4 - \sqrt{56}}{2}}$$

Άρα:

(α) Εξίσωση άξονα συμμετρίας:

$$x = 1$$

(β) $\alpha = 2 > 0 \Rightarrow$ η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή, την:

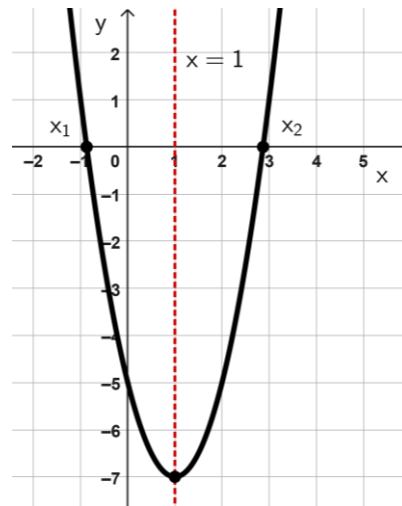
$$y_{\min} = -7$$

(γ) Κορυφή:

$$K(-\kappa, y_{\min}) = K(1, -7)$$

(δ) Σύνολο τιμών: $[-7, +\infty)$

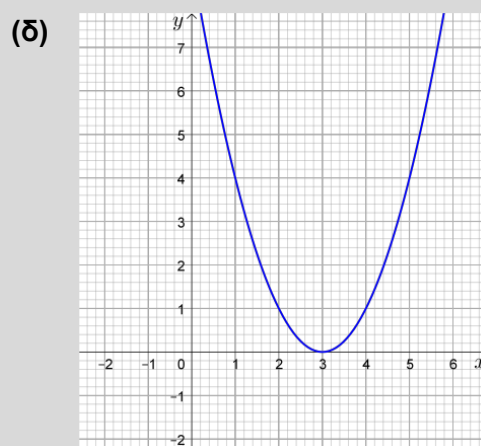
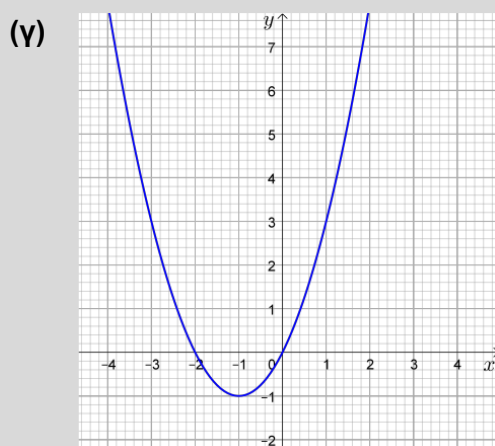
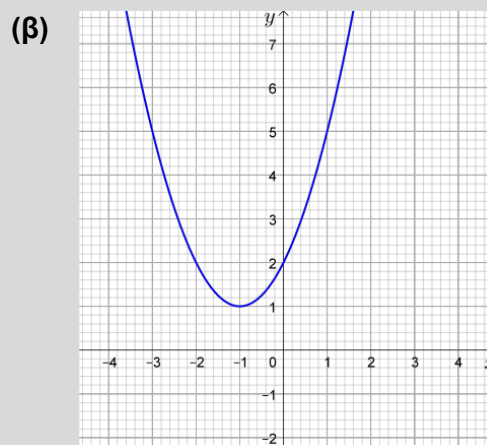
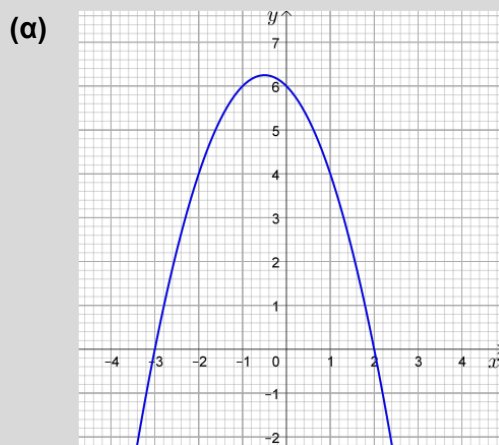
(ε) Όπως στον 1^ο τρόπο.





Δραστηριότητες σελ. 123-124 (Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$)

1. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με $a \neq 0$. Να βρείτε, για κάθε περίπτωση, το πρόσημο της διακρίνουσας Δ και τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.



Απάντηση

Οι λύσεις της εξίσωσης

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

είναι τα σημεία στα οποία η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'x$.

Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ καθορίζεται από τη θέση της παραβολής ως προς τον άξονα $x'x$.

- Αν η παραβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ σε **δύο διαφορετικά σημεία**, τότε

$$\Delta > 0$$

και η εξίσωση έχει **δύο πραγματικές και άνισες λύσεις** $x_1 \neq x_2$.

- Αν η παραβολή **εφάπτεται** στον άξονα $x'x$, τότε

$$\Delta = 0$$

και η εξίσωση έχει **διπλή λύση**.

• Αν η παραβολή **δεν τέμνει** τον άξονα $x'x$, τότε

$$\Delta < 0$$

και η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές λύσεις**.

Έτσι, σε κάθε γραφική παράσταση εξετάζουμε πόσα σημεία τομής έχει η παραβολή με τον άξονα $x'x$ και συμπεραίνουμε το πρόσημο της Δ και τις αντίστοιχες λύσεις.

(α) $\Delta > 0$

$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2$$

(β) $\Delta < 0$

(γ) $\Delta > 0$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0$$

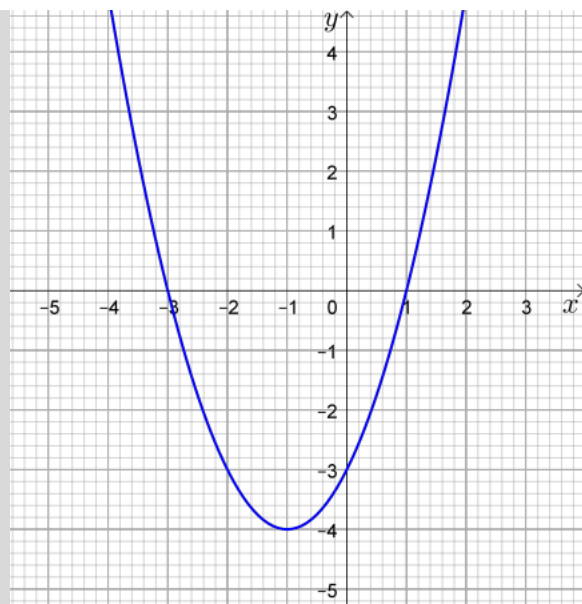
(δ) $\Delta = 0$

$$x_1 = x_2 = 3$$

2. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$).

Με βάση το σχήμα, να απαντήσετε τα πιο κάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας

- (α) Να βρείτε το πρόσημο του a .
- (β) Να υπολογίσετε την τιμή του γ .
- (γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.
- (ε) Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της f .
- (στ) Να βρείτε τις λύσεις x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.



Απάντηση

- (α) $a > 0$, αφού η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστη τιμή
- (β) $\gamma = -3$ (το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα $y'y$)
- (γ) Σύνολο τιμών: $[-4, +\infty)$
- (δ) Άξονας συμμετρίας: $x = -1$
- (ε) $y_{min} = f(-1) = -4$
- (στ) $x_1 = -3, \quad x_2 = 1$

3. Να υπολογίσετε τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - 2x + 6, x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = 4x - x^2, x \in \mathbb{R}$

Απάντηση

(α) $f(x) = x^2 - 2x + 6, x \in \mathbb{R}$

Η παραβολή έχει $a = 1 > 0$, άρα παρουσιάζει **ελάχιστο**.

Συμπληρώνουμε σε τέλειο τετράγωνο:

$$f(x) = x^2 - 2x + 6 = (x^2 - 2x + 1) + 5 = (x - 1)^2 + 5$$

Κορυφή: $K(1,5)$

Άρα:

$$y_{min} = 5$$

(β) $g(x) = 4x - x^2, x \in \mathbb{R}$

Η παραβολή έχει $a = -1 < 0$, άρα παρουσιάζει **μέγιστο**.

Συμπληρώνουμε σε τέλειο τετράγωνο:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - x^2 = -x^2 + 4x = 0(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4) + 4 \\ &= -(x - 2)^2 + 4 \end{aligned}$$

Κορυφή: $K(2,4)$

Άρα:

$$y_{max} = 4$$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda + 4, x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε, για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, τις τιμές του λ , ώστε η γραφική παράσταση της f να:

(α) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 2$

(β) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με συντεταγμένες $(0,2)$

Απάντηση

$$f(x) = x^2 + \lambda x + \lambda + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

(α) $\alpha = 1, \quad \beta = \lambda$

Εξίσωση άξονα συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\lambda}{2 \cdot 1} = -\frac{\lambda}{2}$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 2$

$$\Leftrightarrow -\frac{\lambda}{2} = 2 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

(β) Το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ προκύπτει για $x = 0$.

$$f(0) = \lambda + 4$$

Δίνεται:

$$f(0) = 2$$

οπότε εξισώνοντας:

$$\lambda + 4 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -2.$$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$

(α) έχει λύση το -2

(β) έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις.

Απάντηση

$$x^2 + (\kappa + 1)x + 1 = 0$$

(α) Η εξίσωση έχει λύση το $x = -2 \Leftrightarrow$ επαληθεύει την εξίσωση:

$$\begin{aligned} (-2)^2 + (\kappa + 1)(-2) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 4 - 2\kappa - 2 + 1 = 0 \\ -2\kappa + 3 = 0 &\Leftrightarrow \kappa = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(β) Η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και ίσες λύσεις $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\alpha = 1, \quad \beta = \kappa + 1, \quad \gamma = 1$$

Άρα:

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow (\kappa + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0 \end{aligned}$$

Λύνω την πιο πάνω εξίσωση:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -3$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$$

Άρα:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

δηλαδή

$$\boxed{x_1 = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1}, \quad \boxed{x_2 = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3}$$

6. Για ποιες τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 + (\beta - 3)x + 2a - 1$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -1$ και ελάχιστη τιμή το 8;

Απάντηση

$$g(x) = x^2 + (\beta - 3)x + 2a - 1$$

Η g είναι παραβολή.

Ο άξονας συμμετρίας έχει εξίσωση

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Εδώ: $\alpha = 1$, $\beta = \beta - 3$, άρα εξίσωση του άξονα συμμετρίας είναι:

$$x = -\frac{\beta - 3}{2}$$

Δίνεται $x = -1$, οπότε

$$-\frac{\beta - 3}{2} = -1 \Leftrightarrow \beta - 3 = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 5}$$

Για την ελάχιστη τιμή:

Η κορυφή έχει τετμημένη $x = -1$. Άρα $g(-1) = 8$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} g(-1) &= (-1)^2 + (5 - 3)(-1) + 2a - 1 \\ &= 1 + 2(-1) + 2a - 1 \\ &= -2 + 2a \end{aligned}$$

Θέλουμε

$$-2 + 2a = 8 \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow \boxed{a = 5}$$

Άρα

$$a = 5, \quad \beta = 5$$

7. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,0)$.

(α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των β και γ .

(γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τεταγμένων.

Απάντηση

(α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,0)$, οι λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι οι $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$.

(β) Είναι:

$$\begin{cases} f(-1) = 0 & \Leftrightarrow 2 - \beta + \gamma = 0 \\ f(2) = 0 & \Leftrightarrow 8 + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις πιο πάνω εξισώσεις, λαμβάνω $\beta = -2$ και αντικαθιστώντας την τιμή αυτή, π.χ. στην πρώτη, παίρνω $\gamma = -4$.

Άρα:

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$$

- (γ) $f(0) = -4$ και άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τεταγμένων είναι το $(0, -4)$.

8. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$.

(α) Να βρείτε το είδος των λύσεών της.

(β) Σε πόσα σημεία η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων;

Απάντηση

(α) Είναι $\alpha = 2, \beta = -3$ και $\gamma = 1$. Συνεπώς, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 8 = 1 > 0$ και άρα η πιο πάνω εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα, έπεται ότι η παραβολή $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων σε 2 σημεία.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 8x + 20$.

(α) Να γράψετε την f στη μορφή $(x + a)^2 + \beta, a, \beta \in \mathbb{R}$.

(β) Να αναφέρετε την ελάχιστη τιμή της f .

(γ) Να εξηγήσετε πώς η ελάχιστη τιμή της f μπορεί να βοηθήσει στην εύρεση του προσήμου της διακρίνουσας (χωρίς να υπολογίσετε την τιμή της διακρίνουσας) της εξίσωσης $x^2 + 8x + 20 = 0$.

Απάντηση

(α)
$$f(x) = x^2 + 8x + 20 = \frac{x^2 + 8x + 16}{(x+4)^2} + 4 = (x + 4)^2 + 4$$



(β) Από το προηγούμενο ερώτημα, η κορυφή της έχει συντεταγμένες $K(-4,4)$. Επιπλέον, αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου της παραβολής ($ο x^2$) είναι θετικός (είναι ίσος με 1), έπεται ότι στην κορυφή της η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο, δηλαδή $y_{min} = 4$.

(γ) Αφού $y_{min} = 4 > 0$, το γράφημα της παραβολής είναι **πάνω** από τον άξονα των τετμημένων και άρα δεν τον τέμνει. Συνεπώς, η παραβολή δεν έχει πραγματικές ρίζες.

10. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ορθογωνίου με σταθερή περίμετρο $400 m$.

Απάντηση

Έστω α και β οι διαστάσεις του ορθογωνίου.

Τότε, από τα δεδομένα του προβλήματος:

$$2\alpha + 2\beta = 400 \Rightarrow \beta = 200 - \alpha.$$

Άρα, το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από:

$$E = \alpha(200 - \alpha).$$

Θεωρώ λοιπόν τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x(200 - x) = -(x^2 - 200x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = -(x^2 - 200x) = -(x^2 - 200x + 100) + 100 = -(x - 100)^2 + 100,$$

δηλαδή η f είναι παραβολή με κορυφή στο σημείο $K(100,100)$ στο οποίο λαμβάνει **μέγιστη** τιμή.

Έτσι, για $\alpha = 100m$, το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγιστοποιείται.

Τότε, θα είναι επίσης $\beta = 200 - \alpha = 100m$.

Με άλλα λόγια, το ορθογώνιο αυτό μεγιστοποιεί το εμβαδόν του όταν είναι τετράγωνο πλευράς $100m$.

Προφανώς, το μέγιστο εμβαδόν ισούται με $100^2 = 10000m^2$.

11. Ο τύπος που δίνει το ύψος h (σε m) ενός βέλους σε συνάρτηση με το χρόνο t (t σε sec), όταν το ρίξουμε προς τα πάνω με ταχύτητα $20 ms^{-1}$, δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = 20t - 5t^2.$$

Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος.

Απάντηση

$$h(t) = 20t - 5t^2 = -5(t^2 - 4t) = -5(t - 2)^2 + 20,$$

δηλαδή η h είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2,20)$ στο οποίο λαμβάνει

μέγιστη τιμή: $h_{max} = 20m$ για χρόνο $t = 2sec$.

7.2.3 Άθροισμα και γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$

Ορισμός

Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες (όχι κατανάγκην άνισες) της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) (με $\Delta \geq 0$), τότε συμβολίζουμε με S το **άθροισμα** και με P το **γινόμενο** των ριζών της εξίσωσης:

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2$$

Πρόταση

Αν x_1, x_2 και S, P όπως στον προηγούμενο ορισμό, τότε ισχύει:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Απόδειξη

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = \frac{-\beta}{\alpha}$$

και

$$\begin{aligned} P = x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \cdot \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) = \frac{(-\beta + \sqrt{\Delta})(-\beta - \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} \\ &= -\frac{(\sqrt{\Delta} - \beta)(\beta + \sqrt{\Delta})}{4\alpha^2} = -\frac{(\sqrt{\Delta})^2 - \beta^2}{4\alpha^2} \\ &= -\frac{\Delta - \beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \\ &= \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha} \end{aligned}$$

✦ Οι παραπάνω τύποι ονομάζονται τύποι Vieta (από το Γάλλο Μαθηματικό **Franciscus Vieta (1540-1603)**) και είναι **συμμετρικοί**:

$$S = x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \quad P = x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

Παράδειγμα

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 5x - 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Βήμα 1: Βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου

$$a = 3, \quad \beta = -5, \quad \gamma = -2$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$$

Άρα:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

δηλαδή

$$\boxed{x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2}, \quad \boxed{x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}}$$

Βήμα 2: Παραγοντοποιώ

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 2 &= 3(x-2) \left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (x-2) \left(3x + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= (x-2)(3x+1) \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω η εξίσωση $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ η οποία έχει τις λύσεις x_1 και x_2 με $x_1 \neq x_2$.

Τότε $x_1 + x_2 = -\beta$ και $x_1 \cdot x_2 = \gamma$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ = -\beta \end{array}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ = \gamma \end{array}$$

7.2.4 Μορφές του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$

Το τριώνυμο αποτελεί βασική μορφή πολυωνύμου και εμφανίζεται συχνά στη μελέτη συναρτήσεων και εξισώσεων. Όταν το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, μπορεί να γραφτεί σε παραγοντοποιημένη μορφή με βάση τις ρίζες του. **Η σύνδεση αυτή μεταξύ των συντελεστών της εξίσωσης και των ριζών της**, επιτρέπει να μετατρέπουμε το τριώνυμο σε γινόμενο δύο πρώτου βαθμού παραγόντων, γεγονός που διευκολύνει τόσο τη μελέτη της συνάρτησης όσο και την επίλυση εξισώσεων.

Θεωρούμε το τριώνυμο

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$$

και έστω x_1, x_2 οι δύο πραγματικές ρίζες του, όχι κατ' ανάγκην άνισες. Βγάζουμε κοινό παράγοντα το συντελεστή a του όρου x^2 :

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = a \left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) = a(x^2 - Sx + P)$$

όπου

$$S = x_1 + x_2, \quad P = x_1x_2$$

Άρα:

$$f(x) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$

Για να παραγοντοποιήσουμε λοιπόν το τριώνυμο

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

αρκεί να βρούμε δύο παράγοντες με άθροισμα $-(x_1 + x_2)$ και γινόμενο x_1x_2 .

Οι παράγοντες αυτοί είναι $-x_1$ και $-x_2$. Έτσι προκύπτει:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Άρα: κάθε τριώνυμο

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

όπου x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (αν υπάρχουν).

Ειδικά, αν $\Delta = 0$, τότε έχουμε $x_1 = x_2$ και το τριώνυμο παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)^2}$$



Παρατήρηση

Στην περίπτωση που $\Delta = 0$, τότε $x_1 = x_2$ και άρα:

$$ax^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)^2 = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$$

Από τα πιο πάνω συνάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Αν $\Delta > 0$ και $P > 0$ τότε οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι **ομόσημες** (είτε και οι δυο θετικές, είτε και οι δυο αρνητικές):

$S > 0$	$S < 0$
$x_1, x_2 > 0$	$x_1, x_2 < 0$

- Αν $\Delta > 0$ και $P < 0$ τότε οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι **ετερόσημες**:
 - $S > 0$. Τότε, η ρίζα με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι η θετική.
 - $S < 0$. Τότε, η ρίζα με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή είναι η αρνητική.

Πράγματι, αν γράψουμε $x_1 > 0$ και $x_2 < 0$, τότε:

$$S = x_1 + x_2$$

και άρα:

- Αν $S > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow x_1 > |x_2|$

άρα η **απόλυτα μεγαλύτερη ρίζα είναι η θετική**.

Για παράδειγμα, αν $x_1 = 5$ και $x_2 = -2$, τότε $S = x_1 + x_2 = 3 > 0$ και

$$P = x_1 x_2 = -10 < 0 \text{ με } x_1 = 5 > |x_2| = 3.$$

- Αν $S < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow |x_2| > x_1$

άρα η **απόλυτα μεγαλύτερη ρίζα είναι η αρνητική**.

Για παράδειγμα, αν $x_1 = 2$ και $x_2 = -7$, τότε $S = x_1 + x_2 = -5 < 0$ και

$$P = x_1 x_2 = -14 < 0 \text{ με } |x_2| = 7 > 2 = x_1.$$

$\Delta \geq 0$ ΚΑΙ $P = 1$	$\Delta \geq 0$ ΚΑΙ $S = 0$
$x_1 = \frac{1}{x_2}$ (Ρίζες αντίστροφες)	$x_1 = -x_2$ (Ρίζες αντίθετες)

✓ Παράδειγμα

Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $3x^2 - 5x - 2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Βήμα 1: Βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49 > 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

Βήμα 2: Παραγοντοποιώ

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5x - 2 &= 3(x - 2) \left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (x - 2) \left(3x + 3 \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= (x - 2)(3x + 1) \end{aligned}$$

✓ Παράδειγμα

Να απλοποιήσετε το πιο κάτω κλάσμα:

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Βήμα 1: παραγοντοποιώ το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

και άρα οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$ είναι οι

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

δηλαδή

$$x_1 = \frac{3 + 5}{4} = \frac{8}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

και άρα

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2) \left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x + 1)$$

Βήμα 2: παραγοντοποιώ το τριώνυμο $x^2 - 4$:

(διαφορά 2 τετραγώνων):

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

Βήμα 3: Βάζω περιορισμούς:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2, 2.$$

Τότε,

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(2x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2x + 1}{x + 2}, \quad x \neq -2, 2.$$

7.2.5 Κατασκευή εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με λύσεις x_1, x_2

Συχνά γνωρίζουμε ορισμένες ιδιότητες των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, όπως το άθροισμα και το γινόμενο τους που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, χωρίς να γνωρίζουμε την ίδια την εξίσωση.

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να κατασκευάσουμε **μια** δευτεροβάθμια εξίσωση όταν γνωρίζουμε τις λύσεις της, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του αθροίσματος και του γινομένου των ριζών.

Με βάση αυτές τις σχέσεις, προκύπτει ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει λύσεις με άθροισμα S και γινόμενο P γράφεται στη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Συγκεκριμένα:

Έστω η εξίσωση 2^{ου} βαθμού

$$ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$$

Τότε:

$$\begin{aligned} ax^2 + \beta x + \gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} &= 0 \quad (\text{Διαιρούμε με } a \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{\beta}{a}\right)x + \frac{\gamma}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - Sx + P &= 0 \end{aligned}$$

όπου

$$S = -\frac{\beta}{a}, \quad P = \frac{\gamma}{a}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η εξίσωση 2^{ου} βαθμού, της οποίας οι λύσεις έχουν άθροισμα S και γινόμενο P είναι η:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

✦ Η εξίσωση αυτή όμως δεν είναι η μοναδική που έχει αυτές τις λύσεις. Είναι απλώς η **απλούστερη** (μοναδική μονική) εξίσωση που έχει άθροισμα ριζών S και γινόμενο P . Στην πραγματικότητα, άπειρες εξισώσεις έχουν τις ίδιες λύσεις: Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με οποιονδήποτε μη μηδενικό αριθμό a , παίρνουμε

$$a(x^2 - Sx + P) = 0$$

δηλαδή

$$ax^2 - aSx + aP = 0, \quad a \neq 0$$

η οποία έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Άρα:

- Η $x^2 - Sx + P = 0$ είναι η μοναδική μονική εξίσωση με αυτές τις ρίζες.
- Υπάρχουν όμως άπειρες ισοδύναμες εξισώσεις που έχουν τις ίδιες λύσεις.

✦ Η μορφή $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ που προκύπτει στην παράγραφο (7.2.4) δείχνει ότι κάθε τριώνυμο δευτέρου βαθμού μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων όταν είναι γνωστές οι ρίζες του. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί φυσικά στην αντίστροφη διαδικασία: αν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη εξίσωση δευτέρου βαθμού. Στην παράγραφο (7.2.5) παρουσιάζεται ακριβώς αυτή η διαδικασία, δηλαδή πώς από τις ποσότητες $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$ μπορούμε να σχηματίσουμε την εξίσωση που έχει ως λύσεις τους αριθμούς x_1 και x_2 .

✓ **Παράδειγμα**

Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού, της οποίας οι λύσεις έχουν άθροισμα -2 και γινόμενο -5 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Έχουμε ότι

$$S = -2, \quad P = -5$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$x^2 + 2x - 5 = 0.$$

✓ **Παράδειγμα**

Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού με λύσεις τις $x_1 = 4$ και $x_2 = -1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Υπολογίζουμε το άθροισμα S και το γινόμενο P των δύο λύσεων x_1, x_2 :

$$S = x_1 + x_2 = 4 - 1 = 3$$

$$P = x_1x_2 = 4(-1) = -4$$

Επομένως, η ζητούμενη εξίσωση είναι η

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

✓ **Παράδειγμα**

Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού με λύσεις τις $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Μια τέτοια εξίσωση έχει τη μορφή $x^2 - Sx + P = 0$.

Είναι

$$S = x_1 + x_2 = 4$$

και



$$P = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1.$$

Έτσι, η εξίσωση είναι η

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Διαφορετικά, μια τέτοια εξίσωση βρίσκεται από την $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, δηλαδή:
 $(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) = 0.$

Παράδειγμα

Δίνεται η εξίσωση

$$2x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

με ρίζες x_1 και x_2 . Να βρείτε την τιμή του λ αν

- (α) έχει ρίζες αντίθετες
- (β) έχει ρίζες αντίστροφες
- (γ) ισχύει η σχέση

$$\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} = 2$$

(δ) το άθροισμα των ριζών της είναι μεγαλύτερο από το γινόμενο των ριζών της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ και $S = 0$. Αλλά,

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow [-(\lambda - 2)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 8\lambda^2 + 40\lambda - 48 \geq 0 \Leftrightarrow -7\lambda^2 + 36\lambda - 44 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7\lambda^2 - 36\lambda + 44 \geq 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $7\lambda^2 - 36\lambda + 44 = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{36 \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 44}}{2 \cdot 7} = \frac{36 \pm \sqrt{64}}{14} = \frac{36 \pm 8}{14} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,$$

$$\lambda_2 = \frac{22}{7}$$

Η παραβολή $f(\lambda) = 7\lambda^2 - 36\lambda + 44$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή και άρα είναι

$$7\lambda^2 - 36\lambda + 44 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 2] \cup \left[\frac{22}{7}, +\infty\right) \quad (*)$$

Επίσης,

$$S = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \quad (**)$$

Από τις (*) και (**), πρέπει $\lambda = 2$.

Σημείωση: Θα μπορούσαμε να παραλείψουμε την επίλυση της ανίσωσης $\Delta \geq 0$ και απεναντίας να παρατηρήσουμε ότι η τιμή $\lambda = 2$ που βρήκαμε την επαληθεύει.

(β) Η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$ και $P = 1$. Την $\Delta \geq 0$ την προσδιορίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Είναι

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 5\lambda + 6}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, 3$$

και οι δυο αυτές λύσεις είναι δεκτές.

(γ) Είναι

$$\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_1(x_1 + 1) + x_2(x_2 + 1)}{x_2 x_1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2}{x_2 x_1} = 2$$

$$\frac{\overbrace{x_1^2 + x_2^2}^{S^2 - P} + \overbrace{x_1 + x_2}^S}{\underbrace{x_2 x_1}_P} = 2 \Leftrightarrow \frac{S^2 - P + S}{P} = 2 \Leftrightarrow \frac{S(S + 1) - P}{P} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\lambda - 2}{2} \left(\frac{\lambda - 2}{2} + 1 \right) - \frac{\lambda^2 - 5\lambda + 6}{2}}{\frac{\lambda^2 - 5\lambda + 6}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda(\lambda - 2)}{4} - \frac{(\lambda - 3)(\lambda - 2)}{2} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2\lambda + 6) = 4(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(6 - \lambda) = 4(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(6 - \lambda) = 4(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \Leftrightarrow 5\lambda^2 - 28\lambda + 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(5\lambda - 18) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2, \quad \frac{18}{5}$$

(δ) $S > P \Leftrightarrow S - P > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 2}{2} - (\lambda^2 - 5\lambda + 4) > 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 11\lambda + 10 < 0$

Οι ρίζες της $2\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$ είναι οι $\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{41}}{4}$.

Εύκολα προκύπτει ότι

$$2\lambda^2 - 11\lambda + 10 < 0 \Leftrightarrow \frac{11 - \sqrt{41}}{4} < \lambda < \frac{11 + \sqrt{41}}{4}$$



7.2.6 Εξισώσεις και συστήματα που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Σε αρκετά προβλήματα ζητείται να προσδιοριστούν αριθμοί όταν γνωρίζουμε ορισμένες σχέσεις μεταξύ τους, όπως το άθροισμά τους ή το άθροισμα των τετραγώνων τους. Τα προβλήματα αυτά συχνά οδηγούν σε συστήματα εξισώσεων τα οποία μπορούν να αναχθούν σε εξισώσεις δευτέρου βαθμού. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς και αντικαταστάσεις, το σύστημα μετατρέπεται σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία λύνεται με τις γνωστές μεθόδους. Στα παραδείγματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η διαδικασία αυτή βήμα προς βήμα.

✓ Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε δύο αριθμούς των οποίων το άθροισμα ισούται με 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με 34.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω x και y οι αριθμοί που ψάχνω.

Το άθροισμά τους ισούται με 2: $x + y = 2$

Το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με 34: $x^2 + y^2 = 34$

Βήμα 1: Κατασκευή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Από την πρώτη εξίσωση: $y = 2 - x$ και αντικαθιστώ στη δεύτερη:

$$x^2 + y^2 = 34 \Leftrightarrow x^2 + (2 - x)^2 = 34 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 30 = 0$$

Διαιρώ με το 2 για απλοποίηση των πράξεων μετέπειτα:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Βήμα 2: Λύνω τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4$$

και άρα:

$$x_1 = 1 + 4 = 5, \quad x_2 = 1 - 4 = -3$$

Βήμα 3: Αντικαθιστώ στην $y = 2 - x$

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 2 - 5 = -3$$

και

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = 2 - (-3) = 5$$

Έτσι, οι αριθμοί είναι οι $x = -3$, $y = 5$.

✓ Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε δύο αριθμούς των οποίων η διαφορά ισούται με 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με 74.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω x και y οι αριθμοί που ψάχνω.

Το άθροισμά τους ισούται με 2: $x - y = 2$

Το άθροισμα των τετραγώνων τους ισούται με 74: $x^2 + y^2 = 74$

Βήμα 1: Κατασκευή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

Από την πρώτη εξίσωση: $y = 2 + x$ και αντικαθιστώ στη δεύτερη:

$$x^2 + y^2 = 74 \Leftrightarrow x^2 + (2 + x)^2 = 74 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 0$$

Διαιρώ με το 2 για απλοποίηση των πράξεων μετέπειτα:

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Βήμα 2: Λύνω τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 12}{2} = -1 \pm 6 \end{aligned}$$

και άρα:

$$x_1 = -1 + 6 = 5, \quad x_2 = -1 - 6 = -7$$

Βήμα 3: Αντικαθιστώ στην $y = 2 + x$

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 2 + 5 = 7$$

και

$$\begin{cases} y = 2 + x \\ x_2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = 2 - 7 = -5$$

Έτσι, οι αριθμοί είναι οι $x = 5, y = 7$ ή οι $x = -7, y = -5$

✓ Παράδειγμα

Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

(α) $x + y = 10$

(β) $x + y = 2$

$xy = 9$

$x^2 + y^2 = 4$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$



και αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση:

$$\begin{aligned} xy = 9 &\Leftrightarrow x \cdot (10 - x) = 9 \Leftrightarrow 10x - x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 9)(x - 1) = 0 \end{aligned}$$

δηλαδή $x = 9$ ή $x = 1$.

Αντικαθιστώ $x_1 = 9$ στην $y = 10 - x$ και βρίσκω $y_1 = 10 - 9 = 1$ και $x_2 = 1$ στην $y = 10 - x$ και βρίσκω $y_2 = 9$.

Συνεπώς οι λύσεις είναι οι

$$(x_1, y_1) = (9, 1) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = (1, 9).$$

(β) $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$

και αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 4 &\Leftrightarrow x^2 + (2 - x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώ $x_1 = 0$ στην $y = 2 - x$ και βρίσκω $y_1 = 2$ και $x_2 = 2$ στην $y = 2 - x$ και βρίσκω $y_2 = 0$. Συνεπώς οι λύσεις είναι οι:

$$(x_1, y_1) = (0, 2) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2) = (2, 0).$$

Παράδειγμα

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ xy &= -5 \end{aligned}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$x + 2y = 3 \Leftrightarrow x = 3 - 2y$$

και αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση:

$$xy = -5 \Leftrightarrow (3 - 2y)y = -5 \Leftrightarrow 3y - 2y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow -2y^2 + 3y + 5 = 0$$

Το $-2y^2 + 3y + 5$ είναι ένα τριώνυμο ως προς τη μεταβλητή y . Βρίσκω τις ρίζες του:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 9 + 40 = 49$$

και άρα οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$ είναι οι

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{-4} = \frac{-3 \pm 7}{-4}$$

δηλαδή

$$y_1 = \frac{-3 + 7}{-4} = \frac{4}{-4} = -1, \quad y_2 = \frac{-3 - 7}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$

Άρα, αντικαθιστώντας $y = -1$ στην $x = 3 - 2y$ βρίσκω $x = 5$ και άρα το πρώτο ζεύγος λύσεων είναι το $(x, y) = (5, -1)$ ενώ αντικαθιστώντας $y = \frac{5}{2}$ στην $x = 3 - 2y$ βρίσκω $x = -2$ και άρα το δεύτερο ζεύγος λύσεων είναι το $(x, y) = \left(-2, \frac{5}{2}\right)$.



Δραστηριότητες σελ. 123-124 (Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$)

1. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ με παραγματικές λύσεις x_1, x_2 . Να αποδείξετε ότι:

(α) Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίθετες, τότε $S = 0$.

(β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίστροφες, τότε $P = 1$.

Απάντηση

(α) Έστω ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίθετες, δηλαδή $x_1 = -x_2$.

$$\text{Τότε } \underbrace{x_1 + x_2}_S = 0 \Rightarrow S = 0.$$

(β) Έστω ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι αντίστροφες και υποθέτουμε ότι μια τουλάχιστον λύση είναι διάφορη του μηδενός, έστω η x_2 . Τότε

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow \underbrace{x_1 \cdot x_2}_P = 1 \Rightarrow P = 1.$$

2. Αν η εξίσωση $x^2 - 7x + 3 = 0$ έχει λύσεις τις x_1, x_2 , τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 \cdot x_2$ (γ) $3x_1 + 2x_1 \cdot x_2 + 3x_2$ (δ) $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$

(ε) $(4x_1 + 2)(4x_2 + 2)$ (στ) $x_1^2 + x_2^2$ (ζ) $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^3 x_2^3$

Απάντηση

$x^2 - 7x + 3 = 0$. Κατ' αρχάς είναι $a = 1, \beta = -7, \gamma = 3$ και αφού $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 49 - 12 = 37 > 0$, η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και **άνισες** λύσεις x_1 και x_2 (είναι μη μηδενικές).

(α) $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-7}{1} = 7$

(β) $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{1} = 3$

(γ) $3x_1 + 2x_1 \cdot x_2 + 3x_2 = 3x_1 + 3x_2 + 2x_1 \cdot x_2$
 $= 3(x_1 + x_2) + 2x_1 \cdot x_2 = 3S + 2P = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 27$

(δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{S}{P} = \frac{7}{3}$



$$\begin{aligned} \text{(ε)} \quad (4x_1 + 2)(4x_2 + 2) &= 16 \underbrace{x_1 \cdot x_2}_P + 8 \underbrace{(x_1 + x_2)}_S + 4 \\ &= 16P + 8S + 4 = 108 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(στ)} \quad x_1 + x_2 = 7 &\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 7^2 \Rightarrow x_1^2 + 2 \underbrace{x_1 \cdot x_2}_P + x_2^2 = 49 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 49 - 2 \cdot 3 = 43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ζ)} \quad x_1 + x_2 = 7 &\Rightarrow (x_1 + x_2)^3 = 7^3 \Rightarrow x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_3^2 = 343 \\ &\Rightarrow x_1^3 + x_3^2 + 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 343 \\ &\Rightarrow x_1^3 + x_3^2 + 3PS = 343 \\ &\Rightarrow x_1^3 + x_3^2 = 343 - 3PS = 343 - 3 \cdot 3 \cdot 7 = 280 \end{aligned}$$

και άρα

$$x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2x_2^3 = 280 - 3P^3 = 280 - 81 = 199.$$

3. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda - 8 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει:

- (α) λύση τον αριθμό -2 (β) λύσεις αντίθετες
(γ) λύσεις αντίστροφες (δ) λύσεις με άθροισμα 10

Απάντηση

- (α) Για να έχει λύση η πιο πάνω εξίσωση την αριθμό $x = -2$, πρέπει η τιμή αυτή να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\begin{cases} x^2 - (\lambda - 2)x + 2\lambda - 8 = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4 + 2(\lambda - 2) + 2\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

- (β) Για να έχει η πιο πάνω εξίσωση λύσεις αντίθετες, πρέπει:
 $\Delta \geq 0$ και $S = 0$.

Αν $\Delta = 0$, τότε αναγκαστικά θα είναι $x_1 = x_2 = 0$.

Αν $\Delta > 0$, τότε $S = 0 \Leftrightarrow -\frac{-(\lambda-2)}{1} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

Είναι

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 - 4(2\lambda - 8) > 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 - 8(\lambda - 4) > 0$$

Η $\boxed{\lambda = 2}$ ικανοποιεί την ανίσωση αυτή.

- (γ) Για να έχει η πιο πάνω εξίσωση λύσεις αντίστροφες, πρέπει:
 $\Delta \geq 0$ και $P = 1$.

Είναι

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda - 8}{1} = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 8 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda = 9 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{9}{2}}$$

- (δ) Για να έχει η πιο πάνω εξίσωση λύσεις με άθροισμα 10, πρέπει
 $\Delta \geq 0$ και $S = 10$.

Είναι $S = 10 \Leftrightarrow -\frac{-(\lambda-2)}{1} = 10 \Leftrightarrow \lambda = 12$.

Είναι (από πριν)

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 - 8(\lambda - 4) \geq 0$$

Η $\boxed{\lambda = 12}$ ικανοποιεί την ανίσωση αυτή.

4. Δίνεται η εξίσωση

$$4x^2 + 3\mu x + 3\mu - 5 = 0, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$:

(α) η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες

(β) ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 x_2$

(γ) ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{16}$

Απάντηση

- (α) Για να έχει η πιο πάνω εξίσωση λύσεις αντίστροφες, πρέπει $P = 1$.
 Είναι

$$P = 1 \Leftrightarrow \frac{3\mu - 5}{4} = 1 \Leftrightarrow 3\mu - 5 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{9}{3} = 3}$$

- (β) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow S = P \Leftrightarrow -\frac{3\mu}{4} = \frac{3\mu - 5}{4} \Leftrightarrow -3\mu = 3\mu - 5$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{5}{6}}$$

- (γ) $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$ και άρα:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow S^2 - 2P = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \left(-\frac{3\mu}{4}\right)^2 - 2\frac{3\mu - 5}{4} = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\mu^2}{16} - \frac{6\mu - 10}{4} = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow 9\mu^2 - 24\mu + 40 = 25 \Leftrightarrow 9\mu^2 - 24\mu + 15 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 - 8\mu + 5 = 0$$



Βρίσκουμε τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης:

$$\Delta = 64 - 60 = 4 > 0$$

και άρα

$$\mu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6} = \frac{4 \pm 1}{3}$$

δηλαδή

$$\mu_1 = \frac{4 + 1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{και} \quad \mu_2 = \frac{4 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

5. Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

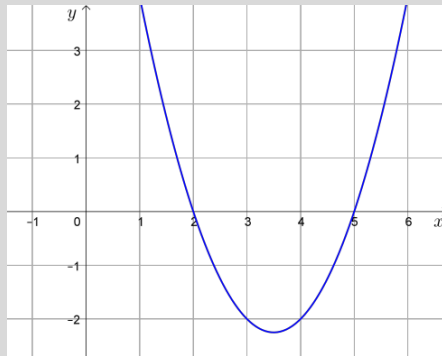
(α) να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\gamma}{\alpha}$

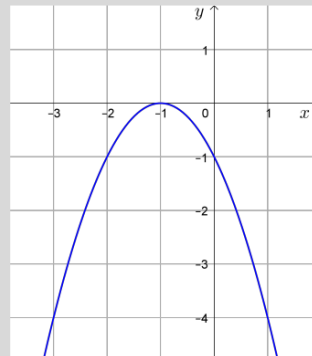
(γ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\beta}{\alpha}$

(δ) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\gamma + 3\beta}{2\alpha}$.

i.



ii.



Απάντηση

(α) i. Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με τον άξονα των τετμημένων:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5.$$

ii. Ομοίως:

$$x_1 = x_2 = -1.$$

(β) i. Είναι:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = P = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 5 = 10.$$

ii. Ομοίως:

$$\frac{\gamma}{\alpha} = P = x_1 \cdot x_2 = (-1)^2 = 1.$$

(γ) i. Είναι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = -S = -(2 + 5) = -7.$$

ii. Ομοίως:

$$\frac{\beta}{\alpha} = -S = -(-1 - 1) = 2.$$

(δ) i. Είναι:

$$\frac{3\gamma + 3\beta}{2\alpha} = \frac{3\gamma}{2\alpha} + \frac{3\beta}{2\alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{2} \cdot P - \frac{3}{2} \cdot S = \frac{3}{2} \cdot 10 - \frac{3}{2} \cdot (-7) = \frac{9}{2}$$

ii. Ομοίως:

$$\frac{3\gamma + 3\beta}{2\alpha} = \frac{3}{2} \cdot P - \frac{3}{2} \cdot S = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{9}{2}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3x^4 - 2x^2 - 5 = 0$$

Απάντηση

Θέτω $w = x^2$.

Τότε, η εξίσωση γράφεται:

$$3w^2 - 2w - 5 = 0.$$

Η πιο πάνω είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση (ως προς τη μεταβλητή w) την οποία θα λύσω:

$$\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = -5$$

$$\Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 4 + 60 = 64 > 0$$

Άρα:

$$w_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

δηλαδή

$$w_1 = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}, \quad w_2 = \frac{2-8}{6} = \frac{-6}{6} = -1$$

Όμως $w = x^2$.

- Για $w_1 = \frac{5}{3}$:

$$x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad +\sqrt{\frac{5}{3}}$$

- Για $w_2 = -1$:



$$x^2 = -1$$

Η εξίσωση αυτή **δεν έχει πραγματικές λύσεις**.

Συμπέρασμα

Οι πραγματικές λύσεις της εξίσωσης $3x^4 - 2x^2 - 5 = 0$ είναι οι

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

7. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα:

$$(\alpha) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

$$(\beta) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3xy = 5 \end{cases}$$

Απάντηση

$$(\alpha) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x^2 + 2(5 - 3x)^2 = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x^2 + 2(25 - 30x + 9x^2) = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 19x^2 - 60x + 50 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 19x^2 - 60x + 44 = 0 \end{cases}$$

Λύνω την εξίσωση $19x^2 - 60x + 44 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{60 \pm \sqrt{256}}{38} = \frac{60 \pm 16}{38} = \frac{30 \pm 8}{19}$$

και άρα

$$x_1 = \frac{30 + 8}{19} = 2, \quad x_2 = \frac{30 - 8}{19} = \frac{22}{19}$$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} y = 5 - 3x \\ x_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = -1, \quad \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x_2 = \frac{22}{19} \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = \frac{29}{19}$$

Άρα, ζεύγη λύσεων: $(2, -1)$ και $(\frac{22}{19}, \frac{29}{19})$.

$$(\beta) \quad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4 \\ 3xy = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4 \\ 3x(3x - 4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 12x - 5 = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$

Λύνω την εξίσωση $9x^2 - 12x - 5 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{12 \pm \sqrt{324}}{18} = \frac{12 \pm 18}{18} = \frac{6 \pm 9}{9}$$

και άρα

$$x_1 = \frac{6+9}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}, \quad x_2 = \frac{6-9}{9} = -\frac{1}{3}$$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ x_1 = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 1, \quad \begin{cases} y = 3x - 4 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = -5$$

Άρα, ζεύγη λύσεων: $(\frac{5}{3}, 1)$ και $(-\frac{1}{3}, -5)$.

8. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που, σε κάθε περίπτωση, να έχουν:

(α) άθροισμα 8 και γινόμενο 12

(β) διαφορά 4 και γινόμενο 21

(γ) άθροισμα 2 και άθροισμα τετραγώνων 26

(δ) διαφορά 2 και άθροισμα τετραγώνων 74

Απάντηση

Έστω x και y οι αριθμοί που ψάχνω (σε κάθε περίπτωση).

$$(\alpha) \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση: $y = 8 - x$ και αντικαθιστώ στη δεύτερη:
 $x \cdot y = 12 \Leftrightarrow x(8 - x) = 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 8x + 12 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = 4 \pm 2$$

και άρα:

$$x_1 = 4 + 2 = 6, \quad x_2 = 4 - 2 = 2$$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x_1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 2$$

και

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = 6$$

Έτσι, οι αριθμοί είναι οι

$$x = 2, \quad y = 6$$

(β)
$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x \cdot y = 21 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση: $y = x - 4$ και αντικαθιστώ στη δεύτερη:
 $x \cdot y = 21 \Leftrightarrow x(x - 4) = 21 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 4x - 21 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{4 \pm 10}{2} = 2 \pm 5$$

και άρα:

$$x_1 = 2 + 5 = 7, \quad x_2 = 2 - 5 = -3$$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ x_1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 3$$

και

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ x_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = -7$$

Συνεπώς, οι αριθμοί είναι οι

$$x = 7 \text{ και } y = 3 \quad \text{ή} \quad x = -7 \text{ και } y = -3$$

(γ) Το άθροισμά τους είναι 2: $x + y = 2$
 Το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 26: $x^2 + y^2 = 26$

Από την πρώτη εξίσωση: $y = 2 - x$

Αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση:

$$x^2 + (2 - x)^2 = 26 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 22 = 0$$

Διαιρώ με το 2:

$$x^2 - 2x - 11 = 0$$

Λύνω την πιο πάνω εξίσωση:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \gamma = -11$$

και άρα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 4 + 44 = 48$$

Έτσι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

Άρα, αν $x = 1 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - x = 1 - 2\sqrt{3}$

και αν $x = 1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 2 - x = 1 + 2\sqrt{3}$

Συνεπώς, οι αριθμοί είναι οι

$$x = 1 + 2\sqrt{3} \text{ και } y = 1 - 2\sqrt{3}$$

- (δ) Η διαφορά τους είναι 2: $x - y = 2$
 Το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 74: $x^2 + y^2 = 74$

Από την πρώτη εξίσωση: $y = 2 + x$

Αντικαθιστώ στη δεύτερη εξίσωση:

$$x^2 + (2 + x)^2 = 74 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 0$$

Διάρω με το 2:

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Λύνω την πιο πάνω εξίσωση:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -35$$

και άρα:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35) = 4 + 140 = 144$$

Έτσι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{-2 \pm 12}{2} = -1 \pm 6$$

Άρα, αν $x = -1 + 6 = 5 \Rightarrow y = 2 + x = 7$

και αν $x = -1 - 6 = -7 \Rightarrow y = 2 + x = -5$

Συνεπώς, οι αριθμοί είναι οι

$$x = 5 \text{ και } y = 7 \quad \text{ή} \quad x = -7 \text{ και } y = -5$$

9. Να εξετάσετε κατά πόσο η ευθεία $y = 2x + 15$ τέμνει και σε ποια σημεία τις πιο κάτω παραβολές:

(α) $f(x) = x^2$

(β) $f(x) = x^2 + 3x + 20$



Απάντηση

(α) $x^2 = 2x + 15 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0.$

Λύνω την πιο πάνω εξίσωση:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = 1 \pm 4$$

και άρα

$$x_1 = 1 + 4 = 5, \quad x_2 = -1 - 4 = -3$$

Έτσι, η ευθεία τέμνει το γράφημα της παραβολής στα σημεία $(5, f(5)) = (5, 25)$ και $(-3, f(-3)) = (-3, 9)$.

(β) $x^2 + 3x + 20 = 2x + 15 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 = 0.$

Είναι $\Delta = -19 < 0$ και άρα η εξίσωση αυτή δεν έχει πραγματικές λύσεις. Συνεπώς, η ευθεία δεν τέμνει τη γραφική παράσταση της παραβολής.

10. Να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τα πιο κάτω τριώνυμα:

(α) $a^2 - 15a - 16$

(β) $2y^2 - y - 21$

(γ) $y^2 - 2\kappa y + \kappa^2 - \lambda^2$

Απάντηση

(α) $a^2 - 15a - 16 = 0.$

Η πιο πάνω εξίσωση γράφεται στη μορφή $1 \cdot (a - \alpha_1)(a - \alpha_2)$, όπου α_1, α_2 οι ρίζες της εξίσωσης $a^2 - 15a - 16 = 0$.

Είναι $\Delta = 289 > 0$ και άρα

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{15 \pm 17}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{15 + 17}{2} = \frac{32}{2} = 16, \quad \alpha_2 = -1$$

Έτσι,

$$a^2 - 15a - 16 = (a - 16)(a + 1).$$

(β) $2\gamma^2 - \gamma - 21 = 0.$

Η πιο πάνω εξίσωση γράφεται στη μορφή $2 \cdot (\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)$ όπου γ_1, γ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $2\gamma^2 - \gamma - 21 = 0.$

Είναι $\Delta = 169 > 0$ και άρα

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{1 \pm 13}{4}$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = \frac{1 + 13}{4} = \frac{7}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1 - 13}{4} = -3$$

Έτσι,

$$2\gamma^2 - \gamma - 21 = 2\left(\gamma - \frac{7}{2}\right)(\gamma - (-3))$$

$$= \left(2\gamma - 2 \cdot \frac{7}{2}\right)(\gamma + 3) = (2\gamma - 7)(\gamma + 3).$$

(γ) $y^2 - (2\kappa)y + \kappa^2 - \lambda^2 = 0.$

Η πιο πάνω εξίσωση γράφεται στη μορφή $(y - y_1)(y - y_2)$, όπου y_1, y_2 οι ρίζες της εξίσωσης.

Είναι

$$\Delta = 4\kappa^2 - 4(\kappa^2 - \lambda^2) = 4\lambda^2 \geq 0$$

και άρα

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\kappa \pm 2|\lambda|}{2} = \kappa \pm |\lambda|$$

$$\Rightarrow y_1 = \kappa + |\lambda| = \frac{7}{2}, \quad y_2 = \kappa - |\lambda|.$$

Έτσι,

$$y^2 - 2\kappa y + \kappa^2 - \lambda^2 = (y - \kappa - |\lambda|) \cdot (y - \kappa + |\lambda|)$$

11. Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού με λύσεις τις:

(α) $2, -3$

(β) $\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}$

(γ) $-4, 4$

(δ) $7 + \sqrt{3}, 7 - \sqrt{3}$

Απάντηση

(α) $(x - (-2))(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$



$$(β) \quad 15 \left(x - \left(-\frac{2}{5} \right) \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 5 \left(x + \frac{2}{5} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x + 2)(3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 + x - 2 = 0$$

$$(γ) \quad (x - (-4))(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$(δ) \quad (x - (7 - \sqrt{3}))(x - (7 + \sqrt{3})) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 7 + \sqrt{3})(x - 7 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((x - 7) + \sqrt{3})((x - 7) - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 46 = 0$$

12. Να απλοποιήσετε τα πιο κάτω κλάσματα:

$$(α) \quad \frac{a^2 + 8a - 9}{a^2 + 9a}$$

$$(β) \quad \frac{3x^2 + 14x - 24}{6x^2 - 26x + 24}$$

$$(γ) \quad \frac{3x^2 - 7yx + 2y^2}{6x^2 - 5xy + y^2}$$

Απάντηση

$$(α) \quad \frac{a^2 + 8a - 9}{a^2 + 9a} = \frac{(a + 9)(a - 1)}{a(a + 9)} = \frac{a - 1}{a}$$

Περιορισμοί:

$$a^2 + 9a \neq 0 \Leftrightarrow a(a + 9) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, \quad a \neq -9$$

(β) Παρατηρώ ότι

$$6x^2 - 26x + 24 = 6x^2 - 26x + 24 = 2(3x^2 - 13x + 12)$$

Εύκολα βρίσκω ότι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 + 14x - 24 = 0$ είναι οι $x_1 = \frac{4}{3}$ και $x_2 = -6$ και άρα

$$3x^2 + 14x - 24 = 3 \left(x - \frac{4}{3} \right) (x + 6) = (3x - 4)(x + 6),$$

ενώ οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 13x + 12 = 0$ είναι οι $x_1 = \frac{4}{3}$ και $x_2 = 3$ και άρα

$$3x^2 - 13x + 12 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 3) = (3x - 4)(x - 3)$$

Συνεπώς:

$$\frac{3x^2 + 14x - 24}{6x^2 - 26x + 24} = \frac{(3x - 4)(x + 6)}{2(3x^2 - 13x + 12)} = \frac{(3x - 4)(x + 6)}{2(3x - 4)(x - 3)} = \frac{x + 6}{2(x - 3)}$$

Περιορισμοί:

$$3x^2 - 13x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow (3x - 4)(x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{4}{3}, x \neq 3$$

(γ) $3x^2 - 7xy + 2y^2 = 3x^2 - 6xy - xy + 2y^2$

$$= 3x(x - 2y) - y(x - 2y) = (x - 2y)(3x - y)$$

και

$$6x^2 - 5xy + y^2 = 6x^2 - 3xy - 2xy + y^2$$

$$= 3x(2x - y) - y(2x - y) = (3x - y)(2x - y)$$

και άρα

$$\frac{3x^2 - 7xy + 2y^2}{6x^2 - 5xy + y^2} = \frac{(x - 2y)(3x - y)}{(3x - y)(2x - y)} = \frac{x - 2y}{2x - y}$$

13. Αν η μία λύση της εξίσωσης $\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ($\kappa \neq 0$) είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές κ, λ, μ .

Απάντηση

$$\kappa x^2 + \lambda x + \mu = 0 \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \kappa \neq 0)$$

Από υπόθεση $x_1 = 2x_2$. Επίσης,

$$S = x_1 + x_2 \Rightarrow -\frac{\beta}{\alpha} = x_1 + x_2 \Rightarrow -\frac{\lambda}{\kappa} = x_1 + x_2.$$

Έτσι,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{\kappa} = x_1 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{\kappa} = x_1 - 2x_2 - x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{\lambda}{3\kappa}$$

Συνεπώς,

$$x_1 = 2x_2 = -\frac{2\lambda}{3\kappa}$$

Τώρα,

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{\mu}{\kappa} \Leftrightarrow \left(-\frac{2\lambda}{3\kappa}\right) \cdot \left(-\frac{\lambda}{3\kappa}\right) = \frac{\mu}{\kappa} \Leftrightarrow 2\lambda^2 = \frac{9\kappa^2\mu}{\kappa} \\ \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 9\kappa\mu$$

14. (α) Να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ μπορεί να πάρει τη μορφή $x = \frac{S}{2}$, όπου S το άθροισμα x_1, x_2 των δύο λύσεων της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.
- (β) Η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(\kappa, 0)$ και $(\lambda, 0)$. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της συνάρτησης των κ και λ ;

Απάντηση

- (α) Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Αλλά, $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και άρα ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει εξίσωση

$$x = \frac{S}{2}$$

- (β) Αφού η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $(\kappa, 0)$ και $(\lambda, 0)$, οι αριθμοί $x_1 = \kappa$ και $x_2 = \lambda$ είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Έτσι,

$$S = x_1 + x_2 = \kappa + \lambda.$$

Αλλά, από το προηγούμενο ερώτημα, $x = \frac{S}{2}$ και άρα ο άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ έχει εξίσωση

$$x = \frac{S}{2} = \frac{\kappa + \lambda}{2}.$$

15. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τις $x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(3 + \sqrt{5})^3 + (3 - \sqrt{5})^3$.

Απάντηση

Θα σχηματίσω μια εξίσωση η οποία έχει ρίζες τις

$$x_1 = 3 - \sqrt{5} \text{ και } x_2 = 3 + \sqrt{5}.$$

Μια τέτοια εξίσωση είναι η $x^2 - Sx + P = 0$.

Είναι

$$S = x_1 + x_2 = 6$$

και

$$P = x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{5}) \cdot (3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4.$$

Έτσι, η εξίσωσή μας είναι η

$$x^2 - 6x + 4 = 0.$$

Τώρα:

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{5})^3 + (3 - \sqrt{5})^3 &= \underbrace{x_1^3 + x_2^3}_{\text{άθροισμα 2 κύβων}} = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2^2) \\ &= S \cdot (S^2 - P - 2P) = 6 \cdot (S^2 - 3P) = 6 \cdot (36 - 12) = 6 \cdot 24 = 144 \end{aligned}$$

16. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 5x + a - 1 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε η εξίσωση να έχει δύο πραγματικές λύσεις.

Απάντηση

$$4x^2 - 5x + a - 1 = 0$$

Για να έχει η εξίσωση **δύο πραγματικές λύσεις** πρέπει:

$$\Delta \geq 0$$

Έχουμε:

$$\alpha = 4, \beta = -5, \gamma = a - 1$$

και άρα:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a - 1) \\ &= 25 - 16(a - 1) = 25 - 16a + 16 \\ &= 41 - 16a \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 41 - 16a \geq 0 \Leftrightarrow 16a \leq 41 \Leftrightarrow a \leq \frac{41}{16}.$$

17. Η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει $\Delta > 0$, $P > 0$, $S < 0$. Να βρείτε το πρόσημο των λύσεών της.

Απάντηση

Αφού $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δυο πραγματικές και άνισες λύσεις και αφού $P > 0$, οι λύσεις είναι ομόσημες και αφού $S < 0$, είναι και οι δυο (γνήσια) **αρνητικές**.

7.3 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τις ρίζες ενός τριωνύμου και τον τρόπο με τον οποίο αυτές προσδιορίζονται. Στην παρούσα ενότητα θα εξετάσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, δηλαδή για ποιες τιμές του x το τριώνυμο είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν.

Η μελέτη αυτή βασίζεται στη σχέση του τριωνύμου με τις ρίζες του και τη γραφική παράσταση της παραβολής που το παριστάνει. Μέσα από αυτή τη διαδικασία μπορούμε να προσδιορίσουμε τα διαστήματα στα οποία το τριώνυμο αλλάζει πρόσημο και να επιλύσουμε ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

7.3.1 Πρόσημο τιμών τριωνύμου

Θα μελετήσουμε τώρα τις τιμές που μπορεί να πάρει το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$). Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

➔ $\Delta > 0$. Τότε, όπως είδαμε,

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

όπου x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $x_1 \neq x_2$. Συνεπώς, το πρόσημο του τριωνύμου αποτελεί άμεση συνέπεια της σχέσης διάταξης που έχουν οι δύο ρίζες του τριωνύμου. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$. Από την πιο πάνω γραφή, έχουμε:

▶ αν $x < x_1 < x_2$, τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$. Συνεπώς,

$$\underbrace{(x - x_1)}_{<0} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{<0} > 0.$$

Έτσι, το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a** .

▶ αν $x_1 < x < x_2$, τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$. Συνεπώς,

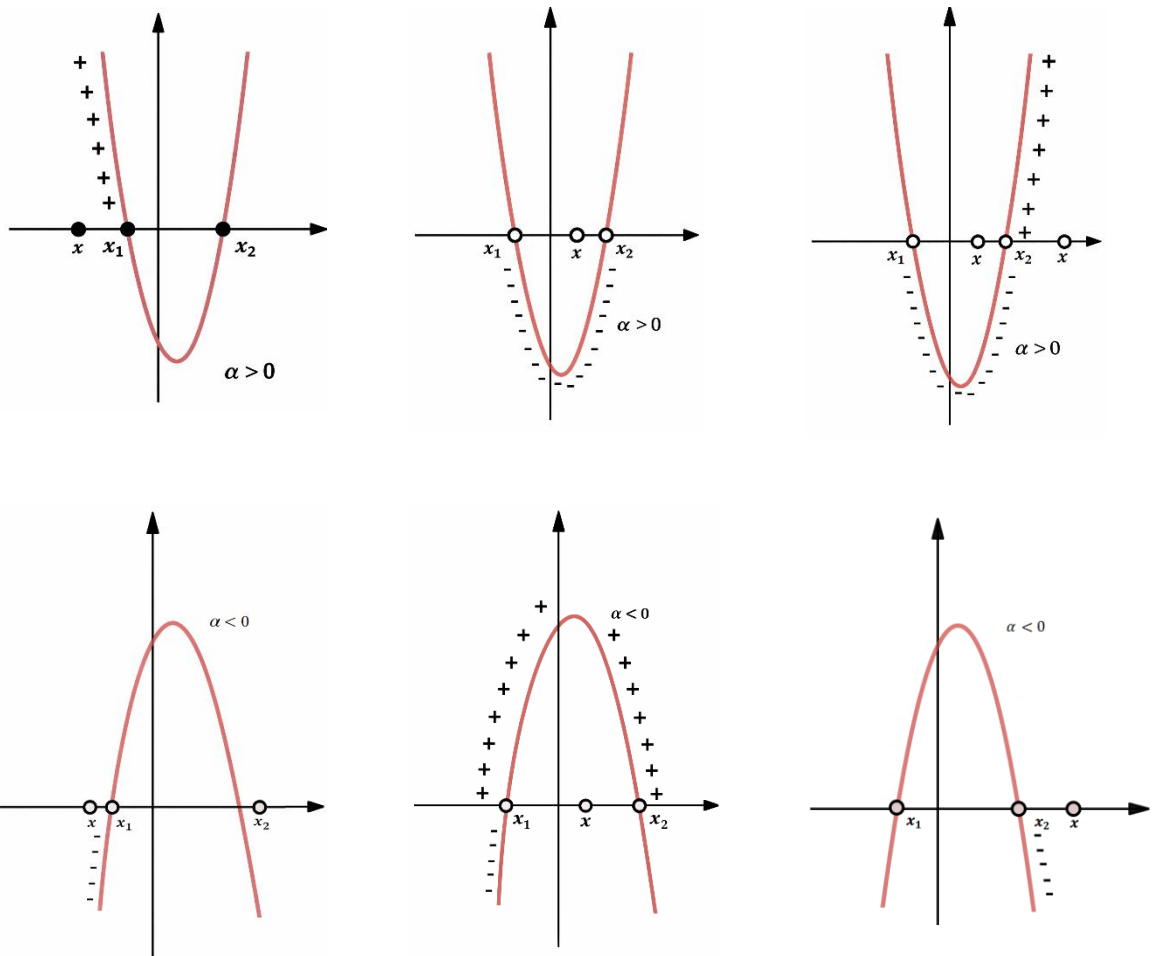
$$\underbrace{(x - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{<0} < 0.$$

Έτσι, το τριώνυμο είναι **ετερόσημο του a** .

▶ αν $x_1 < x_2 < x$, τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$. Συνεπώς,

$$\underbrace{(x - x_1)}_{>0} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{>0} > 0.$$

Έτσι, το τριώνυμο είναι **ομόσημο του a** .



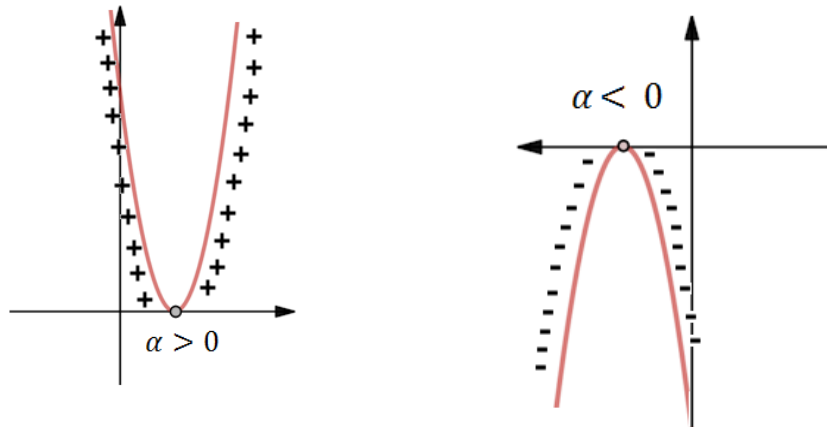
Τα πιο πάνω, συνοψίζονται στον πιο κάτω **πίνακα προσήμων**:

x	$-\infty$	x_1	x_2
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a	Ετερόσημο του a	Ομόσημο του a

→ $\Delta = 0$. Τότε, όπως είδαμε,

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)^2$$

όπου x_1 η λύση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, δηλ. (ισοδύναμα) το σημείο με συντεταγμένες $(x_1, 0)$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $a(x - x_1)^2 \geq 0$ αν $a > 0$ και $a(x - x_1)^2 \leq 0$ αν $a < 0$. Επίσης, $(x - x_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, αφού το γράφημα της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε ένα και μόνο σημείο, έπεται ότι το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο με την τιμή του a για κάθε πραγματική τιμή του x εκτός του σημείου με $x = x_1$.



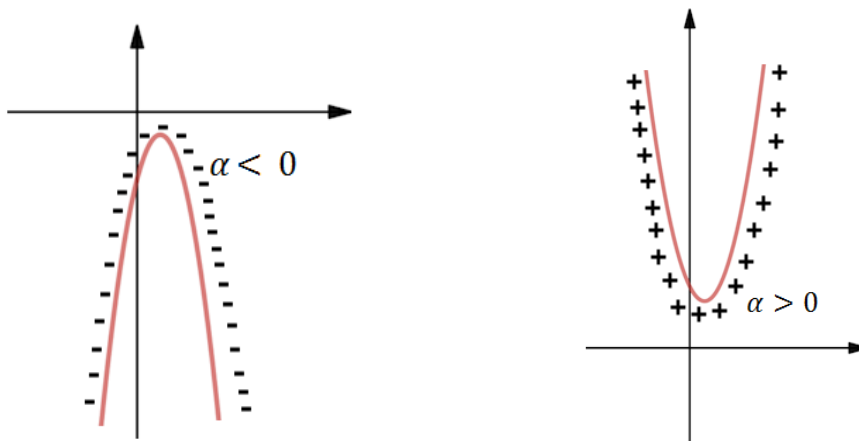
Τα πιο πάνω, συνοψίζονται στον πιο κάτω **πίνακα προσήμων**:

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a		Ομόσημο του a

→ $\Delta < 0$. Τότε, όπως είδαμε, $|\Delta| = -\Delta$ και άρα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \underbrace{\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} \right]}_{>0}$$

Έτσι, αφού $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2} > 0$, για κάθε πραγματική τιμή του x , έπεται ότι το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο με την τιμή του α **για κάθε** πραγματική τιμή του x . Αυτό αντανακλά το ότι το γράφημα της παραβολής δεν τέμνει πουθενά τον άξονα των τετμημένων και άρα είτε θα είναι πάνω είτε κάτω από τον άξονα αυτό.



Τα πιο πάνω, συνοψίζονται στον πιο κάτω **πίνακα προσήμων**:

x	$-\infty$	$+\infty$
Πρόσημο $f(x)$	Ομόσημο του a	

✓ Παράδειγμα

Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2 - 4x + 8$ (β) $(x - 1)(x + 5)$ (γ) $-2x^2 + 8x - 8$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 < 0$

Έχουμε $a = 1 > 0$.

Άρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και είναι θετικό για κάθε x :

$$x^2 - 4x + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $x^2 - 4x + 8$	+	

(β) Ρίζες: $(x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5, x_2 = 1$ και $a = 1 > 0$.

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
πρόσημο $(x - 1)(x + 5)$	-	○	+	○	-

Άρα

$$(x - 1)(x + 5) > 0, \text{ όταν } x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$$

$$(x - 1)(x + 5) < 0, \text{ όταν } x \in (-5, 1)$$

$$(x - 1)(x + 5) = 0, \text{ όταν } x = -5, 1$$

(γ) $\Delta = 8^2 - 4(-2)(-8) = 64 - 64 = 0$

και $a = -2 < 0$. Άρα το τριώνυμο έχει **διπλή** ρίζα:

$$x_1 = x_2 = \frac{-8}{2(-2)} = 2$$

Πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	$2''$	$+\infty$
πρόσημο $-2x^2 + 8x - 8$	-	○	-

Άρα

$$-2x^2 + 8x - 8 < 0, \quad x \neq 2$$

$$-2x^2 + 8x - 8 = 0, \quad x = 2$$



7.3.2 Ανισώσεις β' βαθμού

Οι ανισώσεις β' βαθμού εμφανίζονται όταν θέλουμε να εξετάσουμε για ποιες τιμές του x μια δευτεροβάθμια παράσταση είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Η μελέτη τους βασίζεται στη συμπεριφορά του τριωνύμου και στα σημεία όπου αυτό μηδενίζεται. Έτσι, βρίσκουμε πρώτα τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης και στη συνέχεια, μελετώντας το πρόσημο του τριωνύμου, προσδιορίζουμε τα διαστήματα των τιμών του x που ικανοποιούν την ανίσωση.

Συγκεκριμένα: Επίλυση ανίσωσης β' βαθμού

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση β' βαθμού της μορφής

$f(x) \geq 0, f(x) \leq 0, f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$, όπου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$:

- Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $x, x \in \mathbb{R}$.
- Επιλέγουμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0, f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$.

✓ Παράδειγμα

Να επιλύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $x^2 - 5x + 6 < 0$ (β) $-x^2 + 2x - 8 < 0$ (γ) $2x^2 - 8x - 6 \leq 0$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 2) < 0$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
πρόσημο $y = x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

Άρα η ανίσωση ικανοποιείται στο διάστημα (2,3).

(β)

1ος τρόπος

$$-x^2 + 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 > 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $y = x^2 - 2x + 8$	+	

και άρα η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε τιμή $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$$-x^2 + 2x - 8 < 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = 4 - 32 = -28 < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $y = -x^2 + 2x - 8$	-	

και άρα η ανίσωση ικανοποιείται για κάθε τιμή $x \in \mathbb{R}$.

(γ)

Έχουμε ότι $\alpha = 2 > 0$.

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $2x^2 - 8x - 6$ είναι:

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 64 + 48 = 112 > 0$$

Δηλαδή, το τριώνυμο $2x^2 - 8x - 6$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, τις:

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{112}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{7}}{4} = 2 \pm \sqrt{7}$$

Επομένως, ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου $2x^2 - 8x - 6$ είναι:

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{7}$	$2 + \sqrt{7}$	$+\infty$	
πρόσημο $y = x^2 - 5x + 6$	+	○	-	○	+

Άρα η ανίσωση ικανοποιείται στο διάστημα $[2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7}]$.

Παράδειγμα

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 1$$

έχει δυο λύσεις πραγματικές και άνισες (για κάθε τιμή της παραμέτρου λ).

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης



$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 1,$$

να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq 0.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - 1) = 4 > 0$$

και άρα η εξίσωση έχει δυο λύσεις πραγματικές και άνισες (για κάθε τιμή της παραμέτρου λ).

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + \lambda + 1 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 1,$$

τότε

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \\ P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \end{cases}$$

και άρα (για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$)

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) \geq 0 \Leftrightarrow P \cdot S \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\lambda}{\lambda - 1} \cdot \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda(\lambda + 1) \geq 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου:

Είναι $\alpha = 2 > 0$

λ	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
πρόσημο $2\lambda(\lambda + 1)$	+	○	-	○	+

και άρα

$$2\lambda(\lambda + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq -1 \text{ ή } \lambda \geq 0$$



Δραστηριότητες σελ. 143-145 (Πρόσημο τριωνύμου - ανισώσεις β βαθμού)

1. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2 - 5x - 6$ (β) $(-x - 2)(x - 7)$

(γ) $25 - 4x^2$ (δ) $-x^2 + x - 1$

Απάντηση

(α)

$$x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1)$$

Είναι $\alpha = 1 > 0$

$$\forall x < -1 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 > 0,$$

$$\forall -1 < x < 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 < 0,$$

$$\forall x > 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 > 0$$

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$
πρόσημο $x^2 - 5x - 6$	+	○	-	+

(β)

$$(-x - 2)(x - 7) = -(x + 2)(x - 7)$$

Είναι $\alpha = -1 < 0$

$$\forall x < -2 \Rightarrow -(x + 2)(x - 7) < 0,$$

$$-2 < x < 7 \Rightarrow -(x + 2)(x - 7) > 0,$$

$$\forall x <>$$

x	$-\infty$	-2	7	$+\infty$
πρόσημο $-(x + 2)(x - 7)$	-	○	+	-

(γ)

$$25 - 4x^2 = (5 - 2x)(5 + 2x)$$

Είναι $\alpha = -1 < 0$

$$x < -\frac{2}{5} \Rightarrow (5 - 2x)(5 + 2x) < 0,$$

$$-\frac{2}{5} < x < \frac{2}{5} \Rightarrow (5 - 2x)(5 + 2x) > 0,$$

$$x > \frac{2}{5} \Rightarrow (5 - 2x)(5 + 2x) < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
πρόσημο $(5 - 2x)(5 + 2x)$	-	○	+	-

(δ)

$$-x^2 + x - 1 = -(x^2 + x - 1) = -(x^2 - x + 1).$$

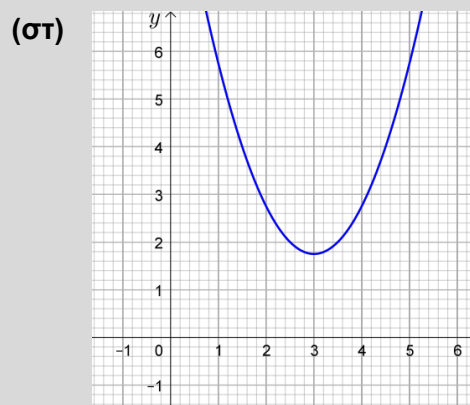
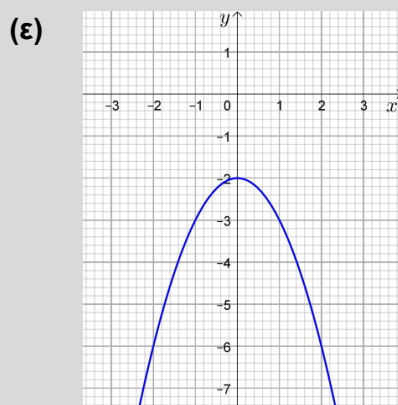
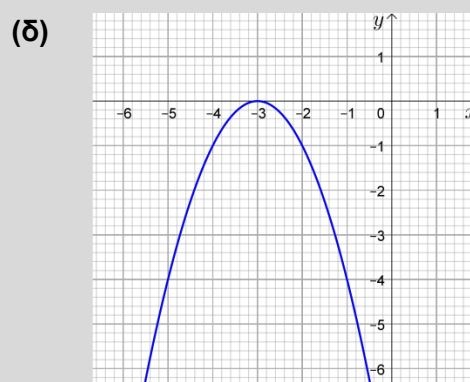
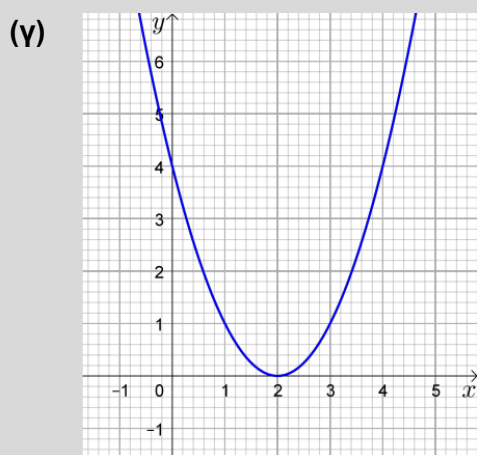
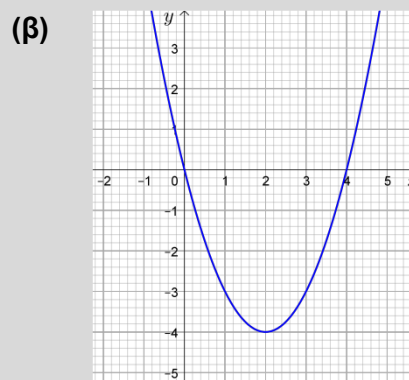
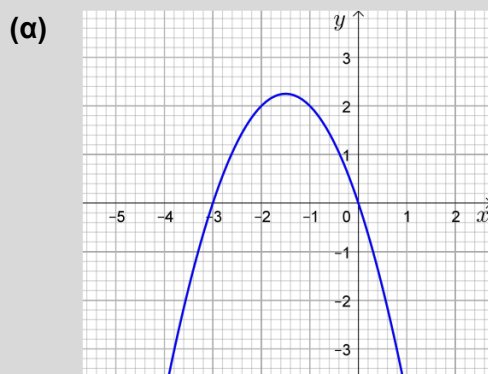
Είναι $\alpha = -1 < 0$ και $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ και άρα

$$-x^2 + x - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$



x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $-x^2 + x - 1$	-	

2. Να μελετήσετε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ σε κάθε περίπτωση στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις, κατασκευάζοντας τον αντίστοιχο πίνακα προσήμου.



Απάντηση

(α)

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
πρόσημο $f(x)$	-	○	+	○	-

Άρα:

Για $x \in (-\infty, -3) \Rightarrow f(x) < 0$

Για $x \in (-3, 0) \Rightarrow f(x) > 0$

Για $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) < 0$

(β)

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
πρόσημο $f(x)$	+	○	-	○	+

Άρα:

Για $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f(x) > 0$

Για $x \in (0, 4) \Rightarrow f(x) < 0$

Για $x \in (4, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$

(γ)

x	$-\infty$	$2''$	$+\infty$
πρόσημο $f(x)$	+	○	+

Άρα:

Για $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$

(δ)

x	$-\infty$	$-3''$	$+\infty$
πρόσημο $f(x)$	-	○	-

Άρα:

Για $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) \Rightarrow f(x) < 0$



(ε)

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $f(x)$	-	

Άρα:

$$f(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(στ)

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $f(x)$	+	

Άρα:

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Να βρείτε το πρόσημο των πιο κάτω τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$:

(α) $5x^2$

(β) $-3x^2$

(γ) $x^2 + 4$

(δ) $-x^2 - 1$

(ε) $(x+4)^2$

(στ) $(x-1)^2$

(ζ) $(x+1)(x-3)$

(η) $x^2 - 3x + 2$

(θ) $-x^2 + 2x - 3$

(ι) $x^2 + x + 1$

(ια) $-5x^2 + 4x - 3$

Απάντηση

(α) $5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ διπλή ρίζα. $\alpha = 5 > 0$. Άρα:

x	$-\infty$	$0''$	$+\infty$
πρόσημο $5x^2$	+	○	+

Δηλαδή:

$$\text{Για } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow 5x^2 > 0$$

(β) $-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ διπλή ρίζα. $\alpha = -3 < 0$. Άρα:

x	$-\infty$	$0''$	$+\infty$
πρόσημο $-3x^2$	-	○	-

Δηλαδή:

$$\text{Για } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \Rightarrow -3x^2 < 0$$

- (γ) $x^2 + 4 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις. $a = 1 > 0$.
Άρα:

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $x^2 + 4$	+	

Δηλαδή:

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + 4 > 0$

- (δ) $-x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις. $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $-x^2 - 1$	-	

Άρα:

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x^2 - 1 < 0$

- (ε) $(x + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ διπλή ρίζα. $a = 1 > 0$.

Άρα:

x	$-\infty$	$-4''$	$+\infty$
πρόσημο $(x + 4)^2$	+	○	+

Δηλαδή:

Για $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty) \Rightarrow (x + 4)^2 > 0$

- (στ) $(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ διπλή ρίζα. $a = 1 > 0$.

Άρα:

x	$-\infty$	$1''$	$+\infty$
πρόσημο $(x - 1)^2$	+	○	+

Δηλαδή:

Για $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow (x - 1)^2 > 0$

- (ζ) $(x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$. $a = 1 > 0$

Άρα:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
πρόσημο $(x + 1)(x - 3)$	+	○	-	○	+

Δηλαδή:

$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow (x + 1)(x - 3) > 0$

$x \in (-1, 3) \Rightarrow (x + 1)(x - 3) < 0$



(η) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$

$a = 1 > 0.$ Άρα:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
πρόσημο $x^2 - 3x + 2$	+	○	-	○	+

Δηλαδή:

$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 > 0$

$x \in (1, 2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0$

(θ) $-x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow$ Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$a = -1 < 0.$ Άρα:

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $-x^2 + 2x - 3$	-	

Δηλαδή:

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x^2 + 2x - 3 < 0$

(ι) $x^2 + x + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow$ Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$a = 1 > 0.$ Άρα:

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $x^2 + x + 1$	+	

Δηλαδή:

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + x + 1 > 0$

(ια) $-5x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta = 16 - 60 = -44 < 0 \Rightarrow$ Δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$a = -5 < 0.$ Άρα:

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $-5x^2 + 4x - 3$	-	

Δηλαδή:

Για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -5x^2 + 4x - 3 < 0$

4. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με ρίζες τους αριθμούς -8 και 2 . Να βρείτε το πρόσημο των:

$$f(-20), f(-7,3), f(-8), f(0), f\left(\frac{1}{2013}\right), f(8)$$

Απάντηση

$$f(x) = -2x^2 + \beta x + \gamma.$$

$$f(-8) = 0 \text{ και } f(2) = 0.$$

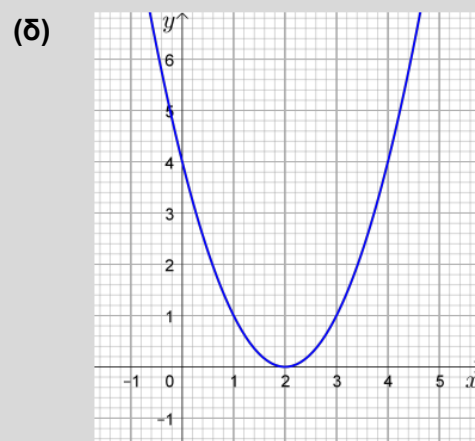
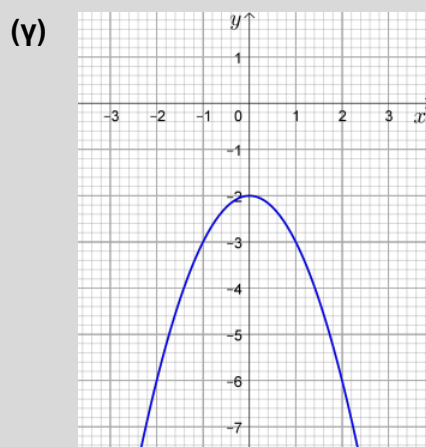
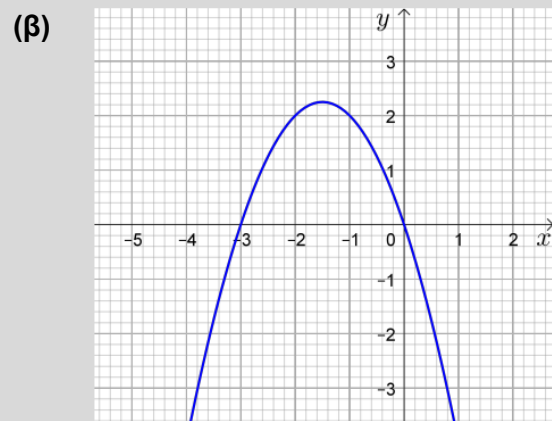
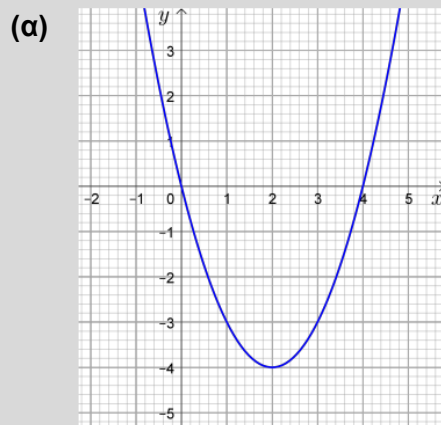
Αφού $\alpha = -2 < 0$, η γραφική παράσταση της παραβολής παρουσιάζει μέγιστη τιμή και τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $x_1 = -8$ και $x_2 = 2$. Άρα αφού $x_1 < x_2$,

$$\forall x < -8 \Rightarrow f(x) < 0, \forall -8 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0 \text{ και } \forall x > 2 \Rightarrow f(x) < 0$$

Έτσι,

$$f(-20) < 0, \quad f(-7,3) > 0, \quad f(-8) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2013}\right) > 0 \text{ και } f(8) < 0.$$

5. Στα πιο κάτω διαγράμματα δίνονται γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής $y = f(x)$. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ σε κάθε περίπτωση.



Απάντηση

(α)

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
πρόσημο $y = f(x)$	+	○	-	○	+

Δηλαδή:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

(β)

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$	
πρόσημο $y = f(x)$	-	○	+	○	-

Δηλαδή:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, 0]$$

(γ)

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $y = f(x)$	-	

Δηλαδή η εξίσωση $f(x) \geq 0$ **δεν έχει λύση** στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(δ)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
πρόσημο $y = f(x)$	+	○	+

Δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \geq 0$

Ιδιαίτερα:

για $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$

και $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

6. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις για τις διάφορες τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$:

(α) $x^2 - 36 > 0$

(β) $6x - 3x^2 \geq 0$

(γ) $(x - 2)(x - 3) \leq 30$

(δ) $x^2 + 3x + 6 < 0$

Απάντηση

- (α) $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$.
Πίνακας προσήμων του τριωνύμου: Είναι $\alpha = 1 > 0$

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$
πρόσημο $x^2 - 36$	+	○	-	○
	+	-	+	+

Δηλαδή:

$$x^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow x < -6 \quad \text{ή} \quad x > 6$$

- (β) $6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$ και άρα
 $6x - 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow x(2 - x) \geq 0$
Πίνακας προσήμων του τριωνύμου: Είναι $\alpha = -1 < 0$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
πρόσημο $x(2 - x)$	-	○	+	○
	-	+	-	-

Δηλαδή:

$$x(2 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

- (γ) $(x - 2)(x - 3) \leq 30 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 \leq 30$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x - 24 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 3) \leq 0$

Πίνακας προσήμων του τριωνύμου: Είναι $\alpha = 1 > 0$

x	$-\infty$	-3	8	$+\infty$
πρόσημο $(x - 8)(x + 3)$	+	○	-	○
	+	-	+	+

Δηλαδή:

$$(x - 8)(x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 8$$

- (δ) $x^2 + 3x + 6 < 0$.
Είναι $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$, άρα:
 $x^2 + 3x + 6 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

και έτσι η ανίσωση $x^2 + 3x + 6 < 0$ είναι αδύνατη (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών), δηλαδή δεν αληθεύει για καμιά πραγματική τιμή της μεταβλητής x .

x	$-\infty$	$+\infty$
πρόσημο $x^2 + 3x + 6$	+	



7. Να λύσετε την ανίσωση $(x + 4)^2 > 4(2x + 5)$ για τις διάφορες τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

$$(x + 4)^2 > 4(2x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 > 8x + 20$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) > 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου: Είναι $a = 1 > 0$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
πρόσημο $(x - 2)(x + 2)$	+	○	-	○	+

και άρα

$$(x - 2)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2$$

8. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2 = 0$ δεν έχει πραγματικές λύσεις;

Απάντηση

$$(\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2 = 0 \quad (\lambda \neq 5).$$

Η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

Είναι:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow [-(\lambda - 5)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot (\lambda - 5) < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 5)^2 - 8(\lambda - 5) < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 8\lambda + 40 < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 18\lambda + 65 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 13) < 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου: Είναι $a = 1 > 0$.

λ	$-\infty$	5	13	$+\infty$	
πρόσημο $(\lambda - 5)(\lambda - 13)$	+	○	-	○	+

και άρα

$$(\lambda - 5)(\lambda - 13) < 0 \Leftrightarrow 5 < \lambda < 13 \text{ ή } \lambda \in (5, 13).$$

9. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών του τριωνύμου

$$f(x) = x^2 + (\mu + 1)x + 2\mu - 1$$

για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Είναι

$$\begin{aligned} \Delta &= (\mu + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2\mu - 1) = \mu^2 + 2\mu + 1 - 8\mu + 4 \\ &= \mu^2 - 6\mu + 5 = (\mu - 5)(\mu - 1) \end{aligned}$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $(\mu - 5)(\mu - 1)$: Είναι $a = 1 > 0$.

μ	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
πρόσημο $(\mu - 5)(\mu - 1)$	+	○	-	○	+

Έτσι:

- ☒ αν $\mu < 1$ ή $\mu > 5$, τότε $\Delta > 0$ και άρα το τριώνυμο έχει 2 πραγματικές (άνισες) ρίζες
- ☒ αν $\mu = 1$ ή $\mu = 5$, τότε $\Delta = 0$ και άρα το τριώνυμο έχει 2 πραγματικές (ίσες) ρίζες
- ☒ αν $1 < \mu < 5$, τότε $\Delta < 0$ και άρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες.

10. Η εξίσωση $(\kappa - 1)x^2 + 4x + (6 - \kappa) = 0$ με $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες. Να δείξετε ότι το επαληθεύει την ανίσωση $\kappa^2 - 7\kappa + 10 > 0$.

Απάντηση

Η εξίσωση $(\kappa - 1)x^2 + 4x + (6 - \kappa) = 0$ ($\kappa \in \mathbb{R}, \kappa \neq 1$) έχει δυο πραγματικές λύσεις και άνισες $\Rightarrow \Delta > 0$.

Είναι:

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow 16 - 4(6 - \kappa)(\kappa - 1) > 0 \Leftrightarrow 16 - 4(-\kappa^2 - \kappa - 6) > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - (-\kappa^2 + 7\kappa - 6) > 0 \\ &\Leftrightarrow 4 + \kappa^2 - 7\kappa + 6 > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 7\kappa + 10 > 0 \end{aligned}$$

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} \leq 0$$

(γ) Αν $\lambda = 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4$ και $3x_1 + 3x_2$.

Απάντηση

(α) Είναι

$$\Delta = (-5\lambda)^2 - 4(-1) = 25\lambda^2 + 4 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και άρα η εξίσωση έχει δυο πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή της (πραγματικής) παραμέτρου λ .

(β) Είναι $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = 5\lambda$ και $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = -1$ και άρα

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 \cdot x_2)^{24} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (5\lambda)^2 - 18 - 7(-1)^{24} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 25 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 25(\lambda^2 - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \leq 0$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$:
Είναι $a = 1 > 0$.

λ	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
πρόσημο $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$	+	○	-	○	+

Έτσι, $(\lambda - 1)(\lambda + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1$ ή $\lambda \in [-1, 1]$.

(γ) Αν $\lambda = 1$, τότε $x_1 + x_2 = 5$ και $x_1 \cdot x_2 = -1$ και άρα

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 4 = x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) = -5$$

και

$$3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3 \cdot (-1) = -3$$

και άρα

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 4 < 3x_1 + 3x_2$$

12. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 3)x + 2\lambda - 9$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Απάντηση

Το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 3)x + 2\lambda - 9$ διατηρεί σταθερό πρόσημο αν $\Delta < 0$
Είναι

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 - 4(2\lambda - 9)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 8\lambda + 36 &< 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 14\lambda + 45 &< 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 9)(\lambda - 5) &< 0 \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $(\lambda - 9)(\lambda - 5)$:
Είναι $a = 1 > 0$.

λ	$-\infty$	5	9	$+\infty$	
πρόσημο $(\lambda - 9)(\lambda - 5)$	+	○	-	○	+

Έτσι,

$$(\lambda - 9)(\lambda - 5) < 0 \Leftrightarrow 5 < \lambda < 9 \quad \text{ή} \quad \lambda \in (5, 9).$$

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$.

Απάντηση

Η συνάρτηση f έχει νόημα για εκείνες τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες το υπόριζο είναι θετικό, δηλ. για εκείνες τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες $-x^2 - 4x + 12 \geq 0$.

Έχουμε:

$$-x^2 - 4x + 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 2) \leq 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου: Είναι $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	-6	2	$+\infty$	
πρόσημο $(x + 6)(x - 2)$	+	○	-	○	+

Έτσι,

$$(x + 6)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 2, \quad \text{ή} \quad x \in [-6, 2].$$

14. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους.

Απάντηση

Έστω x τέτοιος αριθμός. Τότε

$$x > x^2 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x - 1) < 0.$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $x(x - 1)$: Είναι $a = 1 > 0$.

	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
πρόσημο $x(x - 1)$	+	○	-	○	+

Έτσι,

$$x(x - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \quad \text{ή} \quad x \in (0, 1).$$

15. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ώστε η περιμέτρος του να είναι 20 m και το εμβαδόν του να είναι τουλάχιστον 16 m².

Απάντηση

Έστω x και y οι διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Τότε

$$\Pi = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

Έτσι,

$$E \geq 16 \Leftrightarrow x \cdot y \geq 16 \Leftrightarrow x \cdot (10 - x) \geq 16$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 10x \geq 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 8) \leq 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $(x - 2)(x - 8)$: Είναι $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$	
πρόσημο $(x - 2)(x - 8)$	+	○	-	○	+

Έτσι,

$$(x - 2)(x - 8) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8 \text{ ή } x \in [2, 8].$$

16. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η εξίσωση να έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες.

(β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή λύση και να την προσδιορίσετε.

(γ) Αν $f(x) = x^2 + 2x + 3$, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

(δ) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

Απάντηση

$$x^2 + 2x + 3 = a \ (a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - a = 0$$

(α) Η πιο πάνω εξίσωση έχει δυο λύσεις πραγματικές και άνισες $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

Είναι

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(3 - a) > 0 \Leftrightarrow 4 - 12 + 4a > 0 \Leftrightarrow 4a > 8 \Leftrightarrow a > 2.$$

- (β) Η πιο πάνω εξίσωση έχει διπλή λύση $\Leftrightarrow \Delta = 0$.
 Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Για $\alpha = 2$, η εξίσωση γίνεται
 $x^2 + 2x + 3 - 2 = 0$, δηλ. $x^2 + 2x + 1 = 0$, δηλ. $(x + 1)^2 = 0$ και η διπλή
 ρίζα είναι η $x = -1$.
- (γ) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, δηλ. το πιο πάνω τριώνυμο για $\alpha = 0$.
 Με συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο παίρνω:

$$f(x) = \underbrace{(x + 1)^2}_{\geq 0} + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (δ)
- $$\begin{aligned} \sqrt{f(x) - 2} \leq 2 &\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + 2 - 2} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2} \leq 2 \Leftrightarrow (\sqrt{(x + 1)^2})^2 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου $(x + 3)(x - 1)$:
 Είναι $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
πρόσημο $(x + 3)(x - 1)$	+	○	-	○	+

Έτσι, $(x + 3)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$ ή $x \in [-3, 1]$.

Διαφορετικά,

Αν $x \geq -1$, τότε $x + 1 \geq 0$ και άρα $\sqrt{(x + 1)^2} = x + 1$. Έτσι η πιο πάνω δίνει
 $0 \leq x + 1 \leq 2$, δηλ. $-1 \leq x \leq 1$. Τώρα, αν $x < -1$, τότε $x + 1 < 0$ και άρα
 $\sqrt{(x + 1)^2} = -(x + 1)$.

Έτσι, $-(x + 1) \leq 2$, δηλ. $-3 \leq x$.

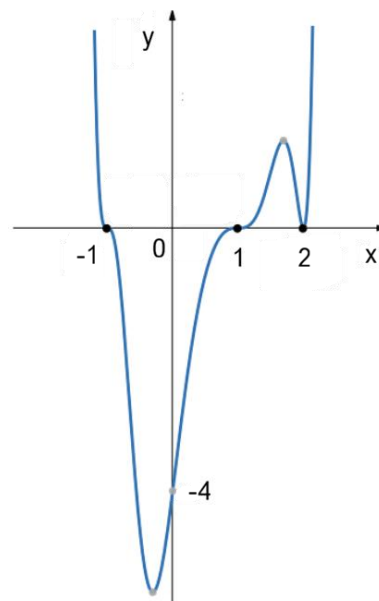
Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, $-3 \leq x < 1$. άρα τελικά, $-3 \leq x \leq 1$.

7.3.2 Ανισώσεις β' βαθμού

Οι ανισώσεις β' βαθμού εμφανίζονται όταν θέλουμε να εξετάσουμε για ποιες τιμές του x μια δευτεροβάθμια παράσταση είναι θετική, αρνητική ή μηδέν. Η μελέτη τους βασίζεται στη συμπεριφορά του τριωνύμου και στα σημεία όπου αυτό μηδενίζεται. Έτσι, βρίσκουμε πρώτα τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης και στη συνέχεια, μελετώντας το πρόσημο του τριωνύμου, προσδιορίζουμε τα διαστήματα των τιμών του x που ικανοποιούν την ανίσωση.

Παράδειγμα εύρεσης λύσης ανίσωσης από τη γραφική της παράσταση

Το διπλανό σχήμα αναπαριστά τη γραφική της παράσταση μιας **συνάρτησης** f .

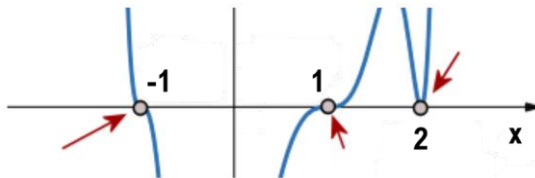


Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

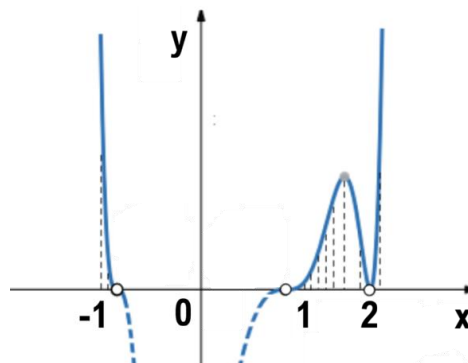
- (α) Για ποια x είναι $f(x) = 0$;
- (β) Για ποια x είναι $f(x) > 0$;
- (γ) Για ποια x είναι $f(x) \geq 0$;
- (δ) Για ποια x είναι $f(x) < 0$;
- (ε) Για ποια x είναι $f(x) \leq 0$;

Απάντηση

(α) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1, 2$
 (σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα των τετμημένων)

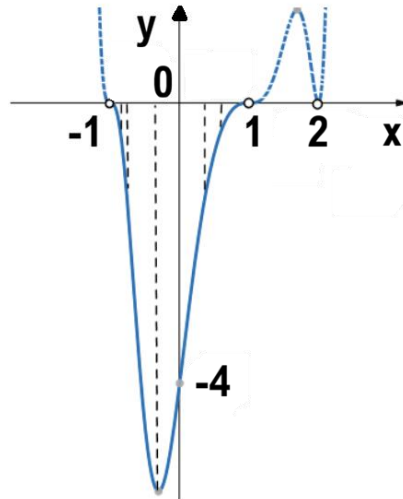


(β) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

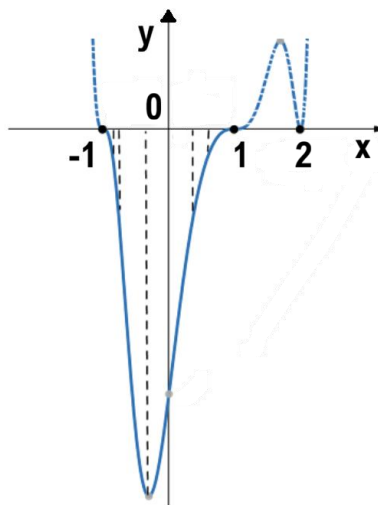


(γ) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(δ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$



(ε) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup \{2\}$



✓ Παράδειγμα

Να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x^2 - 1)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2)^{40}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2)^{40} \\ &= [(x - 1)(x + 1)]^2 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 2)^{40} \\ &= (x - 1)^3 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x^2 + 2)^{40} \end{aligned}$$



Η παράσταση $x - 1$ μηδενίζεται στο $x = 1$ ενώ $x^2 + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ιδιαίτερα, $x^2 + 2 \geq 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Η παράσταση $x + 1$ μηδενίζεται στο $x = -1$ και $(x + 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ιδιαίτερα, $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Κατασκευάζω τον πιο κάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
πρόσημο $(x - 1)^3$	-	-	+	+	
πρόσημο $(x + 1)^2$	+	+	+	+	
πρόσημο $(x^2 + 2)^{40}$	+	+	+	+	
πρόσημο $P(x)$	-	○	-	○	+

Άρα:

Για $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \Rightarrow P(x) < 0$

για $x \in (1, +\infty) \Rightarrow P(x) > 0$

και $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$

Κλασματικές ανισώσεις

Ανισώσεις της μορφής

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0,$$

όπου $P(x)$ και $Q(x)$ πολυωνυμικές παραστάσεις.

Παραδείγματα κλασματικών ανισώσεων:

$$\frac{(x^2 - x + 1)^2}{x - 2} > 0,$$

$$\frac{(x + 2)^4 \cdot (x^2 + 4x - 1)}{(2x + 1)^4} \geq 0,$$

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 2x} \leq 0,$$

$$\frac{2(x^2 - 9)^{25} \cdot (5x - 23)^3}{(x^2 - 4x)^2 \cdot (5x - 23)} < 0,$$

Για την επίλυση τέτοιων ανισώσεων προσέχουμε τα εξής:

▣ Αναλύουμε όλες τις παραστάσεις του αριθμητή και παρονομαστή σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

▣ Η παράσταση ορίζεται για όλα τα x εκτός των ριζών του πολυωνύμου του παρονομαστή, **ασχέτως αν κάποιες από τις ρίζες αυτές είναι κοινές με τις ρίζες του αριθμητή.**

▣ Κάνουμε τον πίνακα προσήμων με τις ρίζες του παρονομαστή και αριθμητή (αφού συνεισφέρουν και οι δυο στο πρόσημο). Σημειώνουμε ότι αν μια παράσταση του αριθμητή ή παρονομαστή είναι σε μια **άρτια** δύναμη, τότε δε συνεισφέρει στο πρόσημο (είναι παντού θετική εκτός στη ρίζα αυτής, όπου και μηδενίζεται)

✓ **Παράδειγμα**

Να επιλύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\frac{x-1}{x-2} \geq 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η παράσταση $P(x) = \frac{x-1}{x-2}$ ορίζεται για $x \neq 2$ (το $x = 2$ είναι ρίζα της παράστασης στον παρονομαστή).

Η ανίσωση ικανοποιείται για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P(x) < 0$ ή $P(x) = 0$.

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων της $P(x)$: Βάζω δύο γραμμές στο $x = 2$ για να δηλώσω ότι η $P(x)$ δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
πρόσημο $x - 1$	-	+	+	+
πρόσημο $x - 2$	-	-	+	+
πρόσημο $P(x)$	+	○	-	+

Άρα

$$\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$$

✓ Παράδειγμα

Να επιλύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$P(x) = \frac{x^2}{x-1} \leq 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η παράσταση ορίζεται για $x \neq 1$.

Επίσης, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Η ανίσωση ικανοποιείται για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P(x) < 0$ ή $P(x) = 0$.

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων της $P(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
πρόσημο x^2	+	+	+	+
πρόσημο $x - 1$	-	-	+	+
πρόσημο $P(x)$	-	○	-	+

Άρα,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

(η τιμή $x = 0$ η οποία μηδενίζει την παράσταση $P(x)$ ευρίσκεται εντός του διαστήματος $(-\infty, 1)$).

✓ Παράδειγμα

Να επιλύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\frac{-x-7}{x^2-9} \leq 1$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$\frac{-x-7}{x^2-9} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x^2-9} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7-x^2+9}{x^2-9} \leq 0 \quad \text{Ομώνυμα}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-x+2}{x^2-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2+x-2)}{x^2-9} \leq 0$$

Παραγοντοποιώ $\Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x+2)}{x^2-9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{\underset{P(x)}{(x-3)(x+3)}} \geq 0$ Πολλαπλασιάζω και τα 2 μέλη της ανίσωσης με το -1,

άρα αλλάζει η φορά της

Είναι

$$(x - 3)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Συνεπώς, η παράσταση $P(x)$ ορίζεται για $x \neq \pm 3$.

Κάνω τον πίνακα προσήμων της $P(x) = \frac{-x-7}{x^2-9}$:

	$-\infty$	-3	-2	1	3	$+\infty$	
πρόσημο $x + 3$	-	○	+	+	+	+	
πρόσημο $x - 1$	-	-	-	○	+	+	
πρόσημο $x - 3$	-	-	-	-	○	+	
πρόσημο $x + 2$	-	-	○	+	+	+	
πρόσημο $P(x)$	+	-	○	+	○	-	+

Άρα:

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2] \cup (1, 3]$$



Δραστηριότητες σελ. 151 (Ανισώσεις Ανώτερου Βαθμού – Κλασματικές Ανισώσεις)

1. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του x , $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 8).$$

Απάντηση

$P(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = (x - 2)(x - 2)(x + 4) = (x - 2)^2 \cdot (x + 4)$
 Η παράσταση $x + 4$ μηδενίζεται στο $x = -4$ μόνο, ενώ $(x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ιδιαίτερα:

$$(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (διπλή ρίζα).}$$

x	$-\infty$	-4	$2''$	$+\infty$	
πρόσημο $P(x)$	-	○	+	○	+

Έτσι, $P(x) > 0, \forall x \in (-4, 2) \cup (2, +\infty)$ και $P(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -4)$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $(x^2 + 2x)(x^2 - 25) > 0$

(β) $(2x + 4)(x^2 - 2x - 15)(x^2 - 4) < 0$

(γ) $6x - 6 \geq x^3 - x^2$

(δ) $(x^2 + 5)(4x^2 - 25) > 0$

Απάντηση

(α) $(x^2 + 2x)(x^2 - 25) > 0 \Leftrightarrow x(x + 2)(x - 5)(x + 5) > 0$

x	$-\infty$	-5	-2	0	5	$+\infty$			
πρόσημο $x(x + 2)(x - 5)(x + 5)$	+	○	-	○	+	○	-	○	+

Άρα,

$$x(x + 2)(x - 5)(x + 5) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-2, 0) \cup (5, +\infty)$$

- (β)

$$(2x + 4)(x^2 - 2x - 15)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 2)(x - 5)(x + 3)(x + 2)(x - 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x + 2)^2(x - 5)(x + 3)(x - 2) < 0$$

x	$-\infty$	-3	$-2''$	2	5	$+\infty$			
πρόσημο $(2x + 4)(x^2 - 2x - 15)(x^2 - 4)$	-	○	+	○	+	○	-	○	+

Άρα,

$$(x + 2)^2(x - 5)(x + 3)(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$$

$$\begin{aligned} \text{(γ)} \quad 6x - 6 \geq x^3 - x^2 &\Leftrightarrow 0 \geq x^3 - x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow 0 \geq x^2(x - 1) - 6(x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 6) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \leq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$	1	$\sqrt{6}$	$+\infty$	
πρόσημο $(x - 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$	-	+	○	-	○	+

Άρα,

$$(x - 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{6}] \cup [1, \sqrt{6}]$$

$$\text{(δ)} \quad (x^2 + 5)(4x^2 - 25) > 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5)(2x - 5)(2x + 5) > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
πρόσημο $(x^2 + 5)(4x^2 - 25)$	+	○	-	○	+

Άρα,

$$(x^2 + 5)(4x^2 - 25) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

3. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ αληθεύουν οι πιο κάτω ανισώσεις;

$$\text{(α)} \quad \frac{x^2}{x-3} \leq 0$$

$$\text{(β)} \quad \frac{x^2 - x - 12}{7 - x} \leq 0$$

$$\text{(γ)} \quad \frac{2x-1}{x^2-4} \leq 1$$

$$\text{(δ)} \quad \frac{4x}{3x-x^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{(ε)} \quad \frac{x}{(x-3)^2} \leq 0$$

$$\text{(στ)} \quad \frac{x^2 - x - 20}{3 - x} \leq 0$$

Απάντηση

$$\text{(α)} \quad P(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

Το κλάσμα $P(x)$ ορίζεται για $x \neq 3$. Επίσης, $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (διπλή ρίζα).

x	$-\infty$	$0''$	3	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	-	○	-	+

Άρα,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3)$$

(β)
$$P(x) = \frac{x^2 - x - 12}{7 - x} = \frac{(x - 4)(x + 3)}{7 - x}$$

Το κλάσμα $P(x)$ ορίζεται για $x \neq 7$. Επίσης,

$$(x - 4)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -3, 4.$$

x	$-\infty$	-3	4	7	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	+	○	-	○	+

Άρα,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3, -4] \cup (7, +\infty)$$

(γ)
$$\frac{2x - 1}{x^2 - 4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x^2 - 4} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1 - x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x - 3)(x + 1)}{x^2 - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 3)(x + 1)}{\underbrace{(x - 2)(x + 2)}_{P(x)}} \geq 0$$

Το κλάσμα $P(x)$ ορίζεται για $x \neq \pm 2$. Επίσης,

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 3.$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	+	○	+	○	+	+

Άρα, $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 2) \cup (3, +\infty)$

(δ)
$$\frac{4x}{3x - x^2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4x}{3x - x^2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8x - 3x + x^2}{2(3x - x^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x}{2x(3 - x)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x + 5)}{2x(3 - x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x + 5)}{\underbrace{2x(x - 3)}_{P(x)}} \leq 0$$

x	$-\infty$	-5	$0''$	3	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	+	○	-	-	+

Συνοπτικά,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 0) \cup (0, 3)$$

Το κλάσμα $P(x)$ ορίζεται για $x \neq 0, 3$. Για $x \neq 0, 3$ λοιπόν είναι 'ισοδύναμο' με την

$$\frac{x+5}{2(x-3)} \leq 0$$

(ε) $P(x) = \frac{x}{(x-3)^2} \leq 0$

x	$-\infty$	0	$3''$	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	-	○	+	+

Συνεπώς,

$$P(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0]$$

(στ) $\frac{x^2 - x - 20}{3 - x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x+4)}{3-x} \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{(x-5)(x+4)}{x-3}}_{P(x)} \geq 0$

x	$-\infty$	-4	3	5	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	-	○	+	-	+

Συνεπώς,

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-4, 3] \cup (5, +\infty]$$

4. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \frac{2x^2 + x + 9}{-x^2 + 8x - 16}, \quad x \neq 4$$

παίρνει αρνητικές τιμές $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 4$.

Απάντηση

$$A = \frac{2x^2 + x + 9}{-x^2 + 8x - 16} = -\frac{2x^2 + x + 9}{x^2 - 8x + 16} = -\frac{2x^2 + x + 9}{(x-4)^2}$$

Για $x \neq 4$ είναι $(x-4)^2 > 0$ και αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου $2x^2 + x + 9$ είναι αρνητική και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιού του όρου είναι > 0 ,

$$2x^2 + x + 9 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα $A < 0, x \neq 4$.

5. (α) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ($a \neq 0$). Αν η εξίσωση έχει δύο λύσεις θετικές, τι συμπεραίνετε για το πρόσημο των Δ, P και S ;



(β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda - 5 = 0$ έχει δύο θετικές λύσεις;

Απάντηση

(α) $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$).

Αφού η εξίσωση αυτή έχει δυο λύσεις, μπορεί να είναι είτε ίδιες είτε διαφορετικές. Άρα, $\Delta \geq 0$. Αν επιπλέον είναι και οι δυο θετικές, τότε $P > 0$ και $S > 0$.

(β) Η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda - 5 = 0$ έχει δυο θετικές λύσεις αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0, P \geq 0 \text{ και } S > 0.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 - 4(\lambda - 5) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda + 20 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 29 \geq 0 \end{aligned}$$

Αλλά, για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ είναι $\lambda^2 - 10\lambda + 29 > 0$.

Τώρα,

$$P \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda > 5$$

και

$$S > 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 3.$$

Άρα τελικά, $\lambda > 5$.

6. (α) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$). Αν $P < 0$, να δείξετε ότι $\Delta > 0$.

(β) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda^3 - 4\lambda = 0$ έχει λύσεις ετερόσημες;

Απάντηση

(α) $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$).

$$P < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} < 0 \Leftrightarrow a\gamma < 0. \text{ Τότε}$$

$$\Delta = \beta^2 - 4 \underbrace{a\gamma}_{<0} > 0$$

(β) Η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda^3 - 4\lambda = 0$ έχει λύσεις ετερόσημες

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma}{a} < 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$$

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2$$

Απάντηση

(α) $\Delta = (\lambda - 2)^2 - 4(\lambda - 4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 4\lambda + 16 = \lambda^2 - 8\lambda + 20$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda^2 - 8\lambda + 20$ είναι αρνητική, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου του όρου είναι >0 , συνεπώς

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

δηλαδή $\Delta > 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή της (πραγματικής) παραμέτρου λ .

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι (άνισες) λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης, έχουμε ότι $S = \lambda - 2$ και $P = \lambda - 4$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{S}{P} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{S - 2P}{P} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{S - 2P}{P} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 2 - 2(\lambda - 4)}{\lambda - 4} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\lambda + 6}{\lambda - 4} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 6}{\lambda - 4} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 4) \cup [6, +\infty) \end{aligned}$$

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 - (2\lambda - 5)x + 4$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για $\forall x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Το τριώνυμο $x^2 - (2\lambda - 5)x + 4$ διατηρεί σταθερό πρόσημο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta < 0 &\Leftrightarrow (2\lambda - 5)^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 20\lambda + 25 - 16 < 0 \\ &\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 20\lambda + 9 < 0 \end{aligned}$$

Είναι

$$4\lambda^2 - 20\lambda + 9 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}, \quad \frac{9}{2}$$

λ	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	
πρόσημο $4\lambda^2 - 20\lambda + 9$	+	○	-	○	+

και άρα

$$4\lambda^2 - 20\lambda + 9 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$



Δραστηριότητες σελ. 156-161 (Ενότητας)

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές $f(x) = 3x^2$ και $g(x) = -2x^2$. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Απάντηση

$$f(x) = 3x^2.$$

Πεδίο ορισμού: \mathbb{R} .

Κορυφή της παραβολής: $K(0,0)$,

Άξονας συμμετρίας: Η ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλ. ο άξονας των τεταγμένων.

Σύνολο τιμών: $[0, +\infty)$.

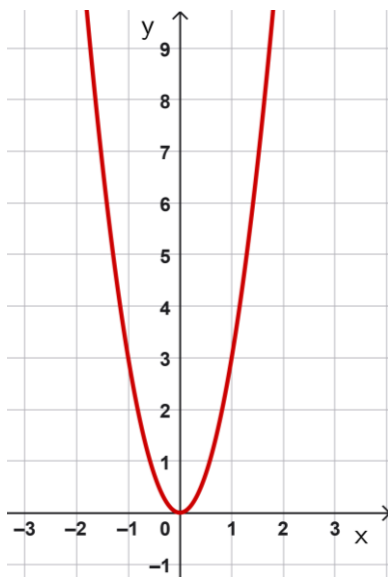
$$g(x) = -2x^2.$$

Πεδίο ορισμού: \mathbb{R} .

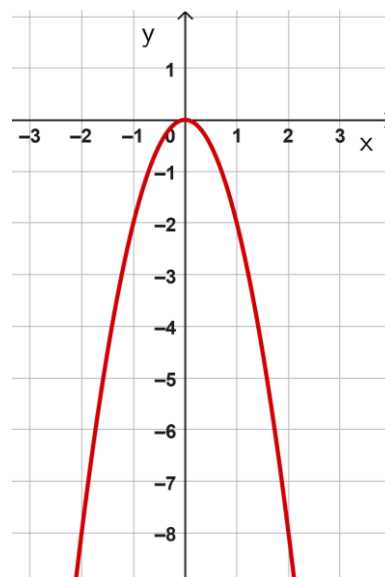
Κορυφή της παραβολής: $K(0,0)$,

Άξονας συμμετρίας: Η ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλ. ο άξονας των τεταγμένων.

Σύνολο τιμών: $(-\infty, 0]$.



$$f(x) = 3x^2$$



$$g(x) = -2x^2$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας για τις παραβολές $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και $g(x) = -x^2 + 4x$. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Απάντηση

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η κορυφή της παραβολής αυτής είναι η $K(1, -4)$ στην οποία παρουσιάζει ελάχιστο (αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός). Έτσι, $f_{min} = -4$ και το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο $[-4, +\infty)$.

Για να κάνουμε τη γραφική της παράσταση πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ (αν έχει).

Είναι $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ και άρα $f(3) = 0 = f(-1)$.

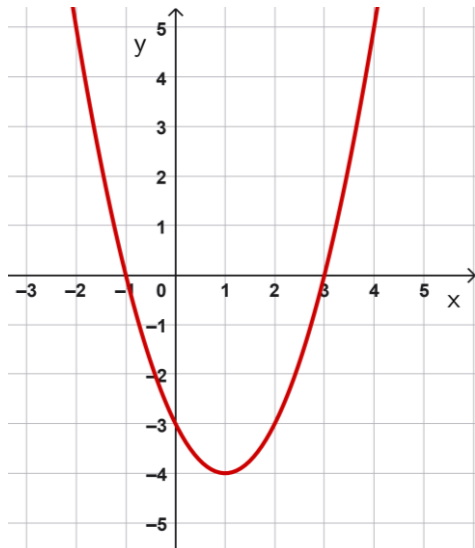
$$g(x) = -x^2 + 4x = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4)$$

$$= -\frac{(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2} + 4 = -(x - 2)^2 + 4, x \in \mathbb{R}.$$

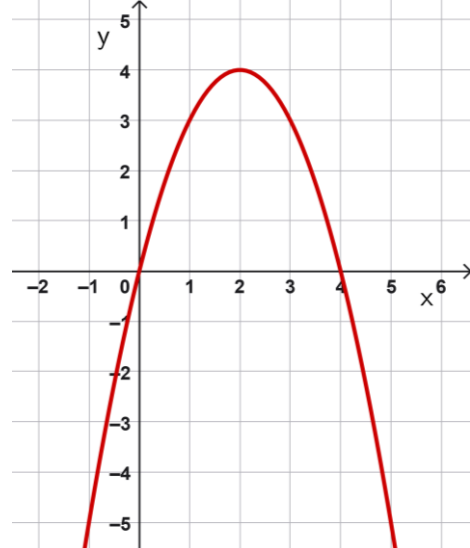
Συνεπώς, η κορυφή της παραβολής αυτής είναι η $K(2, 4)$ στην οποία παρουσιάζει μέγιστο (αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός). Έτσι, $f_{max} = 4$ και το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο $(-\infty, 4]$.

Για να κάνουμε τη γραφική της παράσταση πρέπει να βρούμε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$ (αν έχει).

Είναι $g(x) = -x^2 + 4x = -x(x - 4)$ και άρα $g(0) = 0 = g(4)$.



$f(x) = x^2 - 2x - 3$



$g(x) = -x^2 + 4x$

4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = 2x^2$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου της παραβολής $A(3, 18)$ ως προς τον άξονα συμμετρίας της.

Απάντηση

- (α) $f(x) = 2x^2$. Η παραβολή αποτελεί συστολή της $F(x) = x^2$ κατά 2 μονάδες και άρα έχει ως άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλ. τον άξονα των τεταγμένων.



(β) Το συμμετρικό σημείο του $A(3,18)$ ως προς τον άξονα συμμετρίας της είναι το σημείο $A'(-3,18)$.

5. Αν η παραβολή με εξίσωση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία με συντεταγμένες $A(-1,0)$ και $B(9,0)$, να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

Απάντηση

1^{ος} τρόπος:

αφού η παραβολή περνά από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(9,0)$, έχουμε:

$$y(-1) = 0 \Leftrightarrow a(-1)^2 + \beta(-1) + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow a - \beta + \gamma = 0$$

και

$$y(9) = 0 \Leftrightarrow 81a + 9\beta + \gamma = 0$$

Άρα προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} a - \beta + \gamma = 0 \\ 81a + 9\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Αφαιρώ κατά μέλη την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη:

$$80a + 10\beta = 0$$

$$8a + \beta = 0$$

$$\beta = -8a$$

Ο άξονας συμμετρίας της παραβολής είναι η ευθεία με εξίσωση

$$x = -\frac{\beta}{2a} - \frac{-8a}{2a} = \frac{8a}{2a} = 4$$

2^{ος} τρόπος:

Αφού η παραβολή τέμνει τον άξονα x στα σημεία

$$A(-1,0), B(9,0),$$

οι ρίζες της είναι οι $x_1 = -1, x_2 = 9$.

Ο άξονας συμμετρίας παραβολής είναι η μεσοκάθετος των ριζών της, δηλαδή

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Άρα

$$x = \frac{-1 + 9}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Επομένως, η εξίσωση του άξονα συμμετρίας είναι: $x = 4$

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y = (\kappa + 2)x^2, \kappa \in \mathbb{R}, \kappa \neq -2$.

(α) Για ποια τιμή του κ η παραβολή διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(2, -4)$;

(β) Για ποια τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$ η παραβολή $y = -x^2$ διέρχεται από το σημείο με συντεταγμένες $(-3, \beta + 1)$;

Απάντηση

(α) Η παραβολή $y = (\kappa + 2)x^2, \kappa \in \mathbb{R}, \kappa \neq -2$ διέρχεται από το σημείο $(2, -4)$ αν και μόνο αν το σημείο αυτό επαληθεύει την εξίσωσή της:

$$\begin{cases} y = (\kappa + 2)x^2 \\ (2, -4) \end{cases} \Leftrightarrow -4 = (\kappa + 2)4 \Leftrightarrow -1 = \kappa + 2 \Leftrightarrow \kappa = -3$$

(β) Η παραβολή $y = -x^2$ διέρχεται από το σημείο $(-3, \beta + 1)$ αν και μόνο αν το σημείο αυτό επαληθεύει την εξίσωσή της:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ (-3, \beta + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \beta + 1 = -9 \Leftrightarrow \beta = -10$$

7. Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας (E) ενός κύβου που έχει ακμή x και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E = E(x)$, που εκφράζει το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου σε συνάρτηση με το μήκος x της ακμής του.

Απάντηση

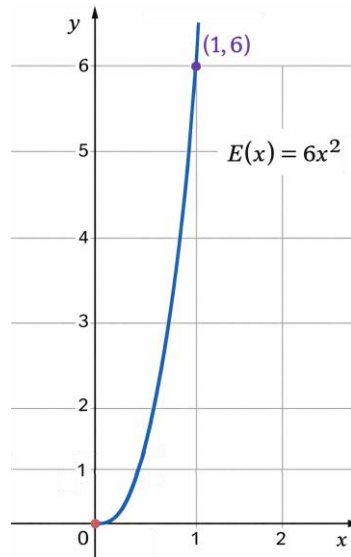
Ένας κύβος αποτελείται από 6 (ίσα) τετράγωνα.

Έτσι, ένας κύβος ακμής x έχει εμβαδόν $E(x) = 6x^2$. Θεωρούμε το εμβαδόν ως συνάρτηση της ακμής του:

$$E(x) = 6x^2, x > 0$$

(δεν νοείται κύβος με μηδέν ή αρνητική ακμή). Η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή.

Κατά τα γνωστά, κατασκευάζουμε τη γραφική της παράσταση:



8. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 15 + 2x - x^2, x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

$f(x) = 15 + 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 15) = -(x^2 + 2x + 1 - 16) = -(x + 1)^2 + 16$
 και άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-1,16)$, άρα:

$$f_{max} = f(-1) = 16.$$

9. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2, x \in \mathbb{R}.$$

Απάντηση

$$f(x) = (x - 1)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 3x^2 + 2x + 5$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + 1\right) + 2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 1\right) + 2$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\right) + 2 = 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 2 + \frac{8}{3} = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$$

και άρα (αφού $a = 3 > 0$), το γράφημα της συνάρτησης αυτής είναι παραβολή με κορυφή στο σημείο με $x = -\frac{1}{3}$, στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο:

$$f_{min} = \frac{14}{3}.$$

10. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2$. Να γράψετε τον τύπο των συναρτήσεων g, h, k με $g(x) = f(x) + 2$, $h(x) = f(x + 2)$ και $k(x) = f(x - 2) + 2$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας τους.

Απάντηση

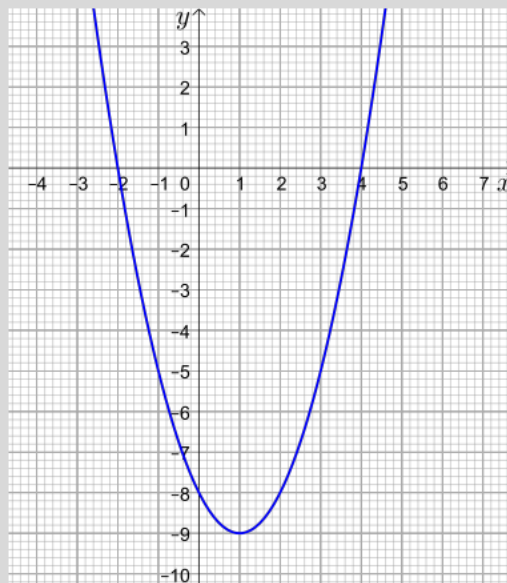
Είναι $g(x) = f(x) + 2 = x^2 + 2$, δηλ. είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(0,2)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 0$, δηλ. τον άξονα των τεταγμένων.

Είναι $h(x) = f(x + 2) = (x + 2)^2$, δηλ. είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(-2,0)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -2$.

Είναι $k(x) = f(x - 2) + 2 = (x - 2)^2 + 2$, δηλ. είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2,2)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.

11. Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0.$$



Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της
- (β) το πρόσημο του a
- (γ) την τιμή του γ
- (δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- (ε) τις συντεταγμένες της κορυφής της



(στ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

(ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = -10$

(η) τις λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$

(θ) τις λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma < -9$

Απάντηση

(α) Πεδίο ορισμού: \mathbb{R} , Σύνολο τιμών: $[-9, +\infty)$.

(β) $\alpha > 0$ (παρουσιάζει ελάχιστη τιμή).

(γ) $\gamma = -8$ (σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων).

(δ) Άξονας συμμετρίας: η ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

(ε) Κορυφή της παραβολής: $K(1, -9)$.

(στ) Οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι τα σημεία τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα των τεταγμένων, δηλ. τα σημεία $x = -2, 4$.

(ζ) Οι (πραγματικές) λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = -10$ είναι τα σημεία x τέτοια ώστε η τιμή του γραφήματος της συνάρτησης είναι ίση με -10 . Δεν υπάρχουν τέτοια, αφού έχουμε ελάχιστο στο σημείο με $x = -9$.

(η) Οι λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma > 0$ είναι το σύνολο $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.

(θ) Οι λύσεις της ανίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma < -9$ είναι το κενό σύνολο, αφού η ελάχιστη τιμή της παραβολής είναι η $f_{min} = -9$.

12. Ο πιο κάτω πίνακας τιμών αντιστοιχεί σε παραβολή της μορφής $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ με εξίσωση άξονα συμμετρίας την $x = 3$ και πεδίο ορισμού το $[0,5]$.

x	0	1	2	3	4	5
y	8	3	0	-1	0	3

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και να βρείτε τον τύπο της.

Απάντηση

Δίνεται ότι η παραβολή έχει **άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 3$** , άρα η κορυφή της βρίσκεται στο $x = 3$. Από τον πίνακα είναι $y(3) = -1$, συνεπώς, η κορυφή είναι

$$K(3, -1)$$

⇒ Η εξίσωση της παραβολής γράφεται

$$y = a(x - 3)^2 - 1$$

Υπολογισμός του a

Χρησιμοποιώ σημείο του πίνακα, π.χ. το $(2,0)$:

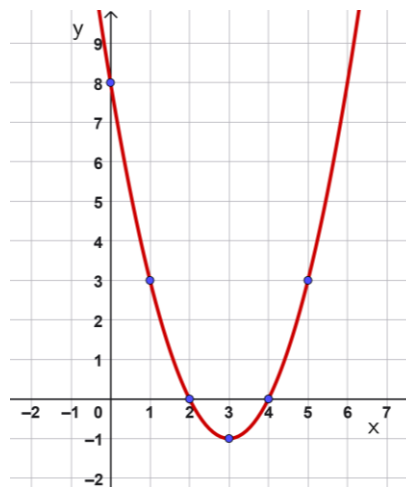
$$0 = a(2 - 3)^2 - 1 \Leftrightarrow 0 = a(1) - 1 \Leftrightarrow a = 1$$

⇒ **Εξίσωση παραβολής:**

$$y = (x - 3)^2 - 1$$

Αναπτύσσοντας:

$$y = (x - 3)^2 - 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 9 - 1 \Leftrightarrow \boxed{y = x^2 - 6x + 8, x \in [0,5]}$$

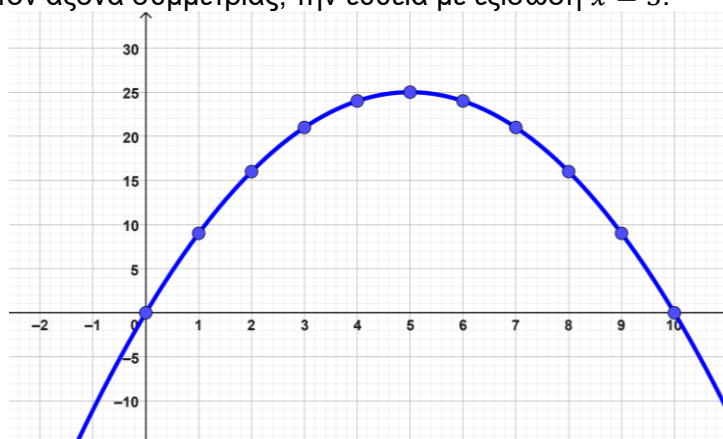


$$y = x^2 - 6x + 8$$

13. Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της παραβολής $y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$, αν το σημείο με συντεταγμένες $(5,25)$ είναι η κορυφή της παραβολής.

**Απάντηση**

Η ιδέα είναι να φέρω οριζόντιες ευθείες που να περνάνε από τα σημεία που δίνονται και να σχεδιάσω, με οδηγούς τις ευθείες αυτές, τα συμμετρικά τους, γύρω από τον άξονα συμμετρίας, την ευθεία με εξίσωση $x = 5$.



$$f(x) = 10x - x^2$$

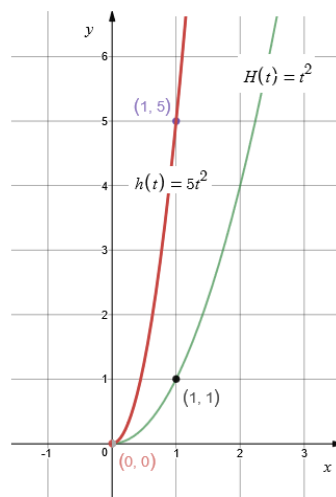
14. Αν αφεθεί ελεύθερα ένα σώμα από ύψος h (σε m), τότε ο χρόνος t (σε sec) που χρειάζεται για να φτάσει στο έδαφος συνδέεται με τη σχέση $h(t) = 5t^2$.
- (α) Να υπολογίσετε το ύψος από το οποίο αφέθηκε μία μπάλα, που χρειάστηκε 2 sec για να φτάσει στο έδαφος.
- (β) Να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα πέσει στο έδαφος μία μπάλα, που αφήνεται από ύψος 80 m.
- (γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t) = 5t^2$, αναφέροντας το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

Απάντηση

$$(α) \quad \begin{cases} h = 5t^2 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow h = 5 \cdot 2^2 = 20m$$

$$(β) \quad \begin{cases} h = 5t^2 \\ h = 80m \end{cases} \Leftrightarrow 80 = 5t^2 \Leftrightarrow 16 = t^2 \Leftrightarrow t = 4 \text{ sec (αφού } t \geq 0)$$

(γ) $h(t) = 5t^2$. Το πεδίο ορισμού της h είναι το $[0, +\infty)$. Η κορυφή της παραβολής είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή $K(0,0)$, αφού αποτελεί συστολή της $H(t) = t^2$ κατά 5 μονάδες. Το σύνολο τιμών της είναι το ίδιο με το σύνολο τιμών της H , δηλαδή το $[0, +\infty)$.



15. Η παραβολή με εξίσωση $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ τέμνει τον άξονα των $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 3 και 9, ενώ τέμνει τον άξονα των $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 27. Να βρείτε:
- (α) την εξίσωση της παραβολής
 - (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
 - (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της.

Απάντηση



(α) Η παραβολή τέμνει τον άξονα x' στα σημεία με τετμημένες **3 και 9**.

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι οι:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 9$$

οπότε η εξίσωση γράφεται

$$y = a(x - 3)(x - 9)$$

Εύρεση του a

Δίνεται ότι η παραβολή τέμνει τον άξονα y' στο σημείο με τεταγμένη **27**.

Άρα για $x = 0 \Rightarrow y = 27$, οπότε

$$27 = a(0 - 3)(0 - 9)$$

$$27 = a(-3)(-9)$$

$$27 = 27a$$

$$a = 1$$

\Rightarrow Εξίσωση παραβολής:

$$y = (x - 3)(x - 9) = x^2 - 12x + 27$$

(β) Εξίσωση άξονα συμμετρίας:

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-12}{2} = 6$$

(γ) Για $x = 6$:

$$y = (6 - 3)(6 - 9) \Leftrightarrow y = 3(-3) = -9$$

Άρα η κορυφή είναι

$$K(6, -9)$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

(β) Αν $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο $B(2,0)$, να υπολογίσετε την τιμή του λ και να εξετάσετε κατά πόσο η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα των τετμημένων και σε άλλο σημείο.

(δ) Αν $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα των τετμημένων.

Απάντηση

(α) $f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, x \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{R}).$

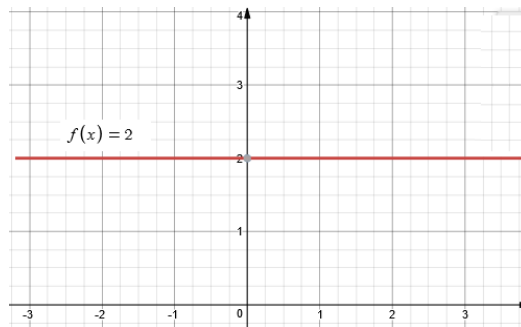
Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(0) = (\lambda + 1)0^2 - (\lambda + 1) + 2 = 2$$

(β) Αν $\lambda = -1$, τότε η συνάρτηση γίνεται

$$f(x) = 2$$

και άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(0,2)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.



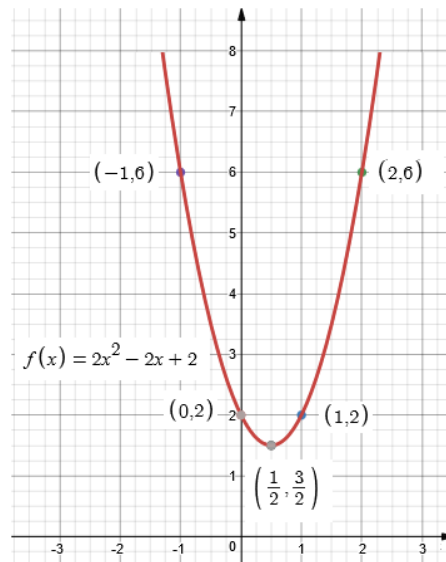
(γ)
$$\begin{aligned} f(2) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda + 1)2^2 - (\lambda + 1)2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\lambda + 4 - 2\lambda - 2 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda = -4 \Leftrightarrow \lambda = -2 \end{aligned}$$

και για $\lambda = -2$ η συνάρτηση γίνεται $f(x) = -x^2 + x + 2 = -(x^2 - x - 2) = -(x - 2)(x + 1)$ και άρα η $x = -1$ είναι επίσης ρίζα του τριωνύμου.

(δ) Αν $\lambda = 1$, τότε η συνάρτηση γίνεται

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2x + 2 = 2(x^2 - x + 1) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1\right) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

και άρα η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή με κορυφή $K\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ στην οποία παρουσιάζει ελάχιστη τιμή. Επίσης, αφού η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - x + 1$ είναι <0 και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι >0 , τότε $2(x^2 - x + 1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Επιπλέον, $f(0) = 2$.



17. Δίνεται το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) Αν $a = 2$ και το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, -3)$, τότε:

A. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$

B. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 3$

Γ. $f(x) = 2(x + 1)^2 + 3$

Δ. $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$

(β) Αν $f(1) < 0$, $f(3) > 0$ και $f(5) < 0$, τότε:

A. $\Delta = 0$ και $a > 0$

B. $\Delta > 0$ και $a > 0$

Γ. $\Delta > 0$ και $a < 0$

(γ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, 2)$ και $a > 0$, τότε:

A. $\Delta > 0$

B. $\Delta = 0$

Γ. $\Delta < 0$

Δ. $\gamma < 0$

(δ) Αν το τριώνυμο f έχει κορυφή το σημείο $K(1, 0)$, τότε:

A. $\beta = 0$

B. $\Delta < 0$

Γ. $\Delta > 0$

Δ. $\Delta = 0$

Απάντηση

(α) Το **B**.

(β) Το **Γ**:

Αφού τα $f(1)$ και $f(3)$ είναι ετερόσημα, έπεται ότι ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 3 θα υπάρχει μια ρίζα του τριωνύμου και αφού τα $f(3)$ και $f(5)$ είναι ετερόσημα, έπεται ότι ανάμεσα στους αριθμούς 3 και 5 υπάρχει μια ρίζα της παραβολής. Έτσι, η παραβολή θα έχει ακριβώς 2 ρίζες και άρα $\Delta > 0$. Επιπλέον, για τον ίδιο λόγο η παραβολή λαμβάνει μέγιστη τιμή. Άρα $a < 0$.

- (γ) Το Γ: Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι η γραφική παράσταση της παραβολής λαμβάνει ελάχιστη τιμή, την $y_{min} = 2$ και αφού η τετμημένη του σημείου $K(1,2)$ της κορυφής, είναι >0 , η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων δύο φορές, άρα $\Delta > 0$.
- (δ) Το Δ: Αφού το τριώνυμο έχει την κορυφή του στον άξονα των τετμημένων, έπεται ότι η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει μια φορά τον άξονα των τετμημένων, άρα $\Delta = 0$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x - 21$.

(α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

(β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(γ) Να αναφέρετε τον άξονα συμμετρίας της και την κορυφή της παραβολής

$$y = x^2 - 4x - 21.$$

(δ) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής $y = (x - \alpha)^2 + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Απάντηση

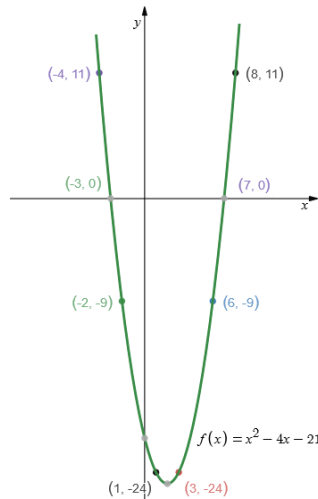
(α) Συμπλήρωση σε τέλειο τετράγωνο:

$$f(x) = x^2 - 4x - 21 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 - 21 = (x - 2)^2 - 25$$

(β) Είναι $f(x) = x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$ και άρα:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3,7 \text{ και } f(0) = -21.$$

Επίσης, εύκολα βρίσκουμε π.χ. ότι $f(6) = -9, f(6) = -9, f(-2) = -9$.



- (γ) Η κορυφή της παραβολής είναι (από το ερώτημα (α)) το σημείο $K(2, -25)$ και άρα ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία με εξίσωση $x = 2$.
- (δ) Έχει ήδη απαντηθεί στη θεωρία: κορυφή της παραβολής το σημείο $K(\alpha, \beta)$ και ο άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία με εξίσωση $x = \alpha$.

19. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παραβολών:

(α) $f(x) = x^2 + 2x$ (β) $g(x) = 2x^2 - 5x + 2$ (γ) $h(x) = 5 + 4x - x^2$

Απάντηση

(α)
$$f(x) = x^2 + 2x = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2} - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

και άρα η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο με $x = -1$:

$$f_{min} = -1.$$

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, +\infty)$.

(β)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} + 1\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x - \frac{25}{4}\right) - 2 \cdot \frac{9}{16} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$

και άρα η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο με $x = \frac{5}{4}$:

$$f_{\min} = \frac{9}{8}$$

Συνεπώς, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-\frac{9}{8}, +\infty)$.

- (γ) $f(x) = 5 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x - 5)$
 $= -(x^2 - 4x + 4 - 9) = -(x - 2)^2 + 9$
 και άρα η παραβολή παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο με $x = 2$:
 $f_{\max} = f(2) = 9$.
 Συνεπώς, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-\infty, 9]$.

20. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

- | | | |
|------|---|---------------|
| (α) | Η εξίσωση $x^2 + x - 11 = 0$ έχει το άθροισμα των λύσεων της ίσο με 1. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (β) | Το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης $3x^2 + 6x - 1 = 0$ είναι -2 . | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (γ) | Μία εξίσωση με λύσεις $x_1 = 2, x_2 = 4$ είναι η $x^2 + 6x + 8 = 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (δ) | Αν οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 4x - 20 = 0$ είναι οι x_1 και x_2 , τότε η παράσταση $x_1 + x_2 - x_1x_2$ ισούται με 16. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ε) | Η εξίσωση $5x^2 + 11x + 5 = 0$ έχει λύσεις αντίστροφες. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (στ) | Η εξίσωση $x^2 + \lambda x - \mu^2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$ έχει δύο λύσεις αντίθετες, όταν $\mu = 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) | Αν το $\sqrt{\kappa}, \kappa > 0$ είναι ρίζα του τριωνύμου $x^2 + \sqrt{\kappa}x + \lambda$, τότε $\lambda < 0$. | ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ |

Απάντηση

- (α) $x^2 + x - 11 = 0$. Είναι $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$, άρα **ΛΑΘΟΣ**.
- (β) $3x^2 + 6x - 1 = 0$. Είναι $P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{3}$, άρα **ΛΑΘΟΣ**.
- (γ) Κανένας εκ των αριθμών 2 και 4 δεν είναι **λύση** της εξίσωσης $x^2 + 6x + 8 = 0$ άρα **ΛΑΘΟΣ**.



(δ) $x^2 + 4x - 20 = 0$. Είναι $x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 = S + P = -\frac{4}{1} - \frac{-20}{1} = -4 + 20 = 16$ άρα **ΣΩΣΤΟ**.

(ε) $5x^2 + 11x + 5 = 0$. Είναι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{5}{5} = 1$ και άρα οι λύσεις είναι αντίστροφες, άρα **ΣΩΣΤΟ**.

(στ) $x^2 + \lambda x - \mu^2 = 0$. Αν Είναι $\lambda = 0$, τότε η εξίσωση γίνεται $x^2 - \mu^2 = 0$, δηλ. $(x - \mu)(x + \mu) = 0$. Αν το μ είναι $\neq 0$, τότε οι λύσεις είναι αντίθετες (οι $x = \pm\mu$), άρα **ΣΩΣΤΟ** στην περίπτωση αυτή.

(ζ) Αφού το $\sqrt{\kappa}$ είναι ρίζα του τριωνύμου $x^2 + \sqrt{\kappa} \cdot x + \lambda$, τότε $(\sqrt{\kappa})^2 + \sqrt{\kappa} \cdot \sqrt{\kappa} + \lambda = 0$, δηλ. $\lambda = -2\kappa < 0$, αφού $\kappa > 0$, άρα **ΣΩΣΤΟ**.

21. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους περιττούς αριθμούς με γινόμενο 63.

Απάντηση

Ένας περιττός ακέραιος x είναι της μορφής $x = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος. Ο επόμενός του περιττός θα είναι ο $x + 2 = 2\kappa + 1 + 2 = 2\kappa + 3$. Έτσι, για να έχουν γινόμενο 63: $(2\kappa + 1) \cdot (2\kappa + 3) = 63$.

$$\begin{aligned} (2\kappa + 1) \cdot (2\kappa + 3) = 63 &\Leftrightarrow 4\kappa^2 + 8\kappa + 3 = 63 \Leftrightarrow 4\kappa^2 + 8\kappa - 60 = 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 + 2\kappa - 15 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\kappa + 5) \cdot (\kappa - 3) = 0 \Leftrightarrow \kappa = -5, 3 \end{aligned}$$

Αν $\kappa = -5$, τότε οι αριθμοί είναι οι $x = 2 \cdot (-5) + 1 = -9$ και $y = x + 2 = -7$ ενώ αν $\kappa = 3$, τότε οι αριθμοί είναι οι $x = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ και $y = x + 2 = 9$.

22. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς που να έχουν άθροισμα 8 και γινόμενο 15.

Απάντηση

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x \cdot y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x \cdot y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 - x \\ x(8 - x) = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0 \\ y = 8 - x \end{cases}$$

Λύνω την εξίσωση $x^2 - 8x + 15 = 0$:
 $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 5) \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 5, x_2 = 3$

Συνεπώς,

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ x_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = 3 \quad \text{και} \quad \begin{cases} y = 8 - x \\ x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow y_2 = 5$$

Έτσι, οι αριθμοί είναι οι

$$\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = 5$$

23. Αν x_1, x_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 6x - 3 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $-3x_1^2x_2 - 3x_2^2x_1$ (β) $\frac{12}{x_1^2} + \frac{12}{x_2^2}$ (γ) $x_1^2 + x_2^2$

Απάντηση

$x^2 - 6x - 3 = 0$. Είναι $\alpha = 1, \beta = -6$ και $\gamma = -3$. Θα βρω τις τιμές των παραστάσεων χωρίς να λύσουμε την εξίσωση.

Είναι

$$x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-6}{1} = 6, \quad x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-3}{1} = -3.$$

(α) $-3x_1^2x_2 - 3x_2^2x_1 = -3 \underbrace{x_1 \cdot x_2}_P \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_S = -3P \cdot S = 54$

(β)
$$\begin{aligned} \frac{12}{x_1^2} + \frac{12}{x_2^2} &= 12 \left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \right) = 12 \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 x_2^2} \\ &= 12 \frac{S^2 - 2P}{P^2} = 12 \left(\frac{S}{P} \right)^2 - \frac{24}{P} = 12 \left(\frac{6}{-3} \right)^2 - \frac{24}{-3} \\ &= 48 + 8 = 56 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 42 \Rightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 = 42^2 \\ &\Rightarrow x_1^4 + 2 \underbrace{x_1^2 x_2^2}_{=P^2=9} + x_2^4 = 1764 \\ &\Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = 1764 - 18 = 1746 \end{aligned}$$

24. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ακέραιους συντελεστές, που να έχουν λύσεις τα πιο κάτω ζεύγη:

(α) $\frac{1}{4}$ και $-\frac{2}{3}$ (β) $3 + \sqrt{3}$ και $3 - \sqrt{3}$ (γ) $-\frac{2}{5}$ και $\frac{2}{5}$

Απάντηση

(α) Μια τέτοια εξίσωση είναι η

$$4 \cdot 3 \left(x - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(x + \frac{2}{3} \right) = 12(4x - 1) \cdot (3x + 2)$$

ή η

$$(4x - 1) \cdot (3x + 2) = 12x^2 + 5x - 2$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

(β) Μια τέτοια εξίσωση είναι η

$$(x - (3 + \sqrt{3})) \cdot (x + (3 - \sqrt{3})) = x^2 - 6x + 6$$

Διαφορετικά, μια τέτοια είναι η $x^2 - Sx + P$ όπου

$$S = x_1 + x_2 = 6$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$$

και άρα η εξίσωση είναι η $x^2 - 6x + 6$

(γ) Μια τέτοια εξίσωση είναι η

$$\left(x - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right) = x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = x^2 - \frac{4}{25}$$

ή η

$$5 \cdot 5 \left(x - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{5}\right) = 25 \left(x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right) = 25 \left(x^2 - \frac{4}{25}\right) = 25x^2 - 4$$

25. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$$

(α) Να δείξετε ότι:

$$A + B = \frac{1}{2}, \quad AB = \frac{1}{20}$$

(β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς A και B .

Απάντηση

$$(α) \quad A + B = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 - \sqrt{5} + 5 + \sqrt{5}}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{10}{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{10}{25 - 5} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

και

$$A \cdot B = \frac{1}{5 + \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{1}{(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{25 - 5} = \frac{1}{20}$$

(β) Αν $A = x_1$ και $B = x_2$, τότε

$$S = A + B = \frac{1}{2} \text{ και } P = A \cdot B = \frac{1}{20}$$

και ένα παράδειγμα εξίσωσης που ψάχνουμε είναι η

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ δηλ. } \eta \ x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0$$

ή (πολλαπλασιάζοντας με το 20):

$$20x^2 - 10x + 1 = 0$$

26. Η εξίσωση $3x^2 + 6x - 1 = 0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x_1, x_2 .

Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς $x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_1$.

Απάντηση

$\alpha = 3, \beta = 6$ και $\gamma = -1$.

Είναι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{6}{3} = -2 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{1}{3}$$

Θα κατασκευάσουμε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς $X_1 = x_1 + 2x_2$ και $X_2 = x_2 + 2x_1$.

Είναι

$$\tilde{S} = X_1 + X_2 = x_1 + 2x_2 + x_2 + 2x_1 = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) = 3S = -6$$

και

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= X_1 \cdot X_2 = (x_1 + 2x_2) \cdot (x_2 + 2x_1) \\ &= x_1 \cdot x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1 \cdot x_2 \\ &= 5x_1 \cdot x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= 5S + 2(S^2 - 2P) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(4 + \frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{5}{3} + \frac{28}{3} = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

και άρα μια τέτοια εξίσωση που ψάχνουμε είναι η

$$x^2 - \tilde{S}x + \tilde{P} = 0, \text{ δηλ. } \eta \ x^2 + 6x + \frac{23}{3} = 0$$

ή (πολλαπλασιάζοντας με το 3) η

$$3x^2 + 18x + 23 = 0$$

27. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

(α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο λύσεις ίσες;

(γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A = \frac{1}{\sqrt{S - P}},$$



όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεων της εξίσωσης, αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

Απάντηση

(α) Είναι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και άρα η αρχική μας εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Η εξίσωση έχει 2 λύσεις πραγματικές και ίσες

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

(γ) Είναι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 1 \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \lambda - \lambda^2$$

και άρα

$$S - P = 1 - \lambda + \lambda^2$$

Το τριώνυμο αυτό έχει αρνητική διακρίνουσα και αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι >0 , έπεται ότι $1 - \lambda + \lambda^2 > 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η παράσταση $\frac{1}{\sqrt{S-P}}$ έχει νόημα $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

28. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία τα πιο κάτω τριώνυμα έχουν μη αρνητικές τιμές:

(α) $x^2 - 8x + 12$ (β) $-4y^2 + 12y - 9$

Απάντηση

(α) $x^2 - 8x + 12 = (x - 6)(x - 2)$

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$	
πρόσημο $x^2 - 8x + 12$	+	○	-	○	+

και άρα $x^2 - 8x + 12 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

και

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2, 6$$

(β) $-4y^2 + 12y - 9 = -(4y^2 + 12y - 9) = -(2y - 3)^2$.

y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
πρόσημο $-4y^2 + 12y - 9$	-	○	-

και άρα $-4y^2 + 12y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$

29. Να βρείτε το πρόσημο του πηλίκου:

$$P(x) = \frac{x+3}{x^2+3x-10}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-5, 2\}$$

Απάντηση

$$P(x) = \frac{x+3}{x^2+3x-10} = \frac{x+3}{(x+5)(x-2)} \quad (x \neq -5, 2)$$

x	$-\infty$	-5	-3	2	$+\infty$
πρόσημο $P(x)$	-	+	○	-	+

και άρα $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-3, 2)$

και

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

30. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $-x^2 + x + 20 < 0$

(β) $x^3 + 2x^2 - 24x \leq 0$

(γ) $\frac{\lambda^2}{\lambda+4} \geq 0$

(δ) $\frac{y^2}{y+3} \geq 4$

Απάντηση

(α)

$$-x^2 + x + 20 < 0 \Leftrightarrow -(x^2 - x - 20) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 20 > 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-5) > 0$$

x	$-\infty$	-4	5	$+\infty$	
πρόσημο $x^2 - x - 20$	+	○	-	○	+

και άρα $x^2 - x - 20 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$

(β)

$$x^3 + 2x^2 - 24x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 24) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-4)(x+6) \leq 0$$

x	$-\infty$	-6	0	4	$+\infty$
πρόσημο $x(x-4)(x+6)$	-	+	-	+	+

και άρα

$$x(x-4)(x+6) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6] \cup [0, 4]$$



(γ) $\frac{\lambda^2}{\lambda + 4} \geq 0$

λ	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
πρόσημο λ^2	+	+	○	+
πρόσημο $\lambda + 4$	-	○	+	+
πρόσημο $\frac{\lambda^2}{\lambda+4}$	-	+	○	+

Συνεπώς,

$$\frac{\lambda^2}{\lambda + 4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-4, +\infty)$$

(δ) $\frac{y^2}{y+3} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{y^2}{y+3} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 4y + 12}{y+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-6)(y+2)}{y+3} \geq 0$

x	$-\infty$	-3	-2	6	$+\infty$
πρόσημο $\frac{(y-6)(y+2)}{y+3}$	-	+	-	+	+

και άρα $x(x - 4)(x + 6) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2] \cup [6, +\infty)$

31. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7$ δεν έχει πραγματικές ρίζες;

Απάντηση

$x^2 + (2\lambda - 3)x - 3\lambda - 7, x \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{R})$.
 Το τριώνυμο αυτό δεν έχει πραγματικές ρίζες $\Leftrightarrow \Delta < 0$.
 Αλλά,

$$\Delta = (2\lambda - 3)^2 - 4(-3\lambda - 7) = \lambda^2 - 12\lambda + 9 + 12\lambda + 28 = \lambda^2 + 37 > 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς, το τριώνυμο αυτό δεν έχει πραγματικές ρίζες για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ .

32. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 5x + a = 0, a \neq 0$.

(α) Να αποδείξετε ότι αν

$$-\frac{5}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

τότε η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(β) Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης, όταν $a = 2$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$$

Απάντηση

(α) Έστω ότι $\alpha \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$. Τότε $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ και
 $\Delta = (-5)^2 - 4\alpha^2 = 25 - 4\alpha^2 = (5 - 4\alpha)(5 + 4\alpha) \geq 0$

από την υπόθεση για το α . Αυτό φαίνεται από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου:

α	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
πρόσημο $25 - 4\alpha^2$	-	○	+	○	-

Άρα, για $\alpha \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right] \Rightarrow \Delta > 0$ και $P = 1$ και άρα το τριώνυμο έχει ρίζες αντίστροφες.

(β) Για $\alpha = 2$, η εξίσωση γίνεται $2x^2 - 5x + 2 = 0$, δηλ. (κατα τα γνωστά)
 $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = 0$, δηλ. $(2x - 1)(x - 2) = 0$ η οποία ικανοποιείται για
 $x = \frac{1}{2}$ και $x = 2$ μόνον.

(γ) Θέτω $y = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$. Τότε,
 $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ ή $y = 2$

Αλλά,

$$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 2 - 1}{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 1}{2x} = 0$$

η οποία δεν αληθεύει πουθενά. Επίσης,

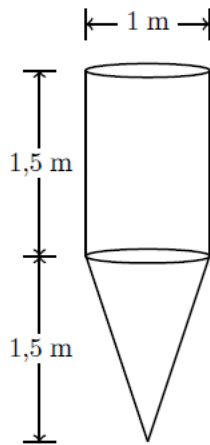
$$y = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

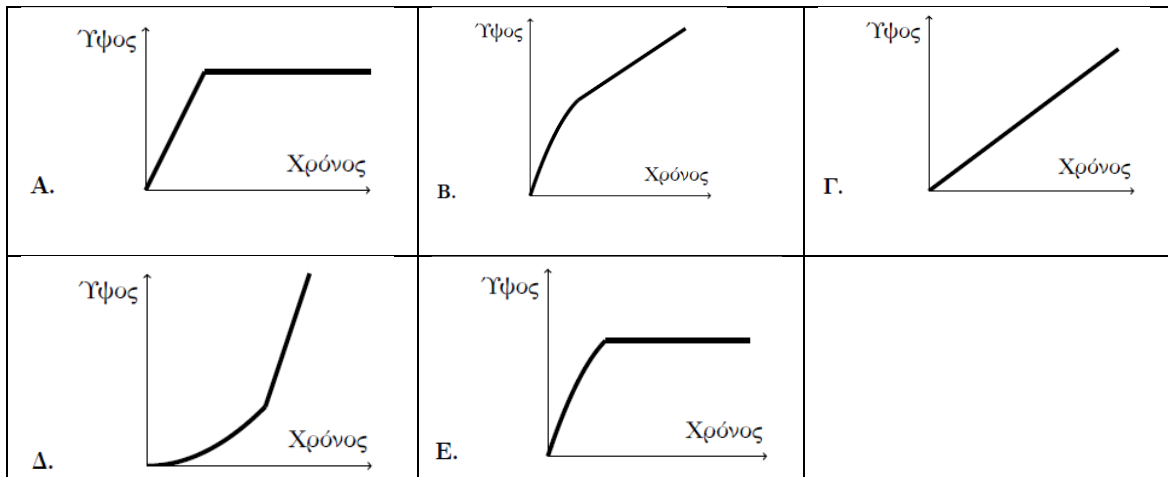
και άρα η εξίσωση αυτή (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών) έχει λύση το $x = 1$.

Λύση προβλήματος

Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.



Αρχικά, το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει τον τρόπο με τον οποίο το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;



PISA 2003

Λύση

Θεωρούμε ότι το νερό μπαίνει με **σταθερό ρυθμό**, άρα ο όγκος αυξάνεται γραμμικά ως προς τον χρόνο.

Το δοχείο αποτελείται από:

- κάτω μέρος: **κώνος**
- πάνω μέρος: **κύλινδρος**

1. Στο κωνικό μέρος

Στην αρχή, κοντά στην κορυφή του κώνου, η διατομή είναι πολύ μικρή. Άρα με λίγο νερό το ύψος ανεβαίνει **γρήγορα**. Όσο όμως το νερό ανεβαίνει μέσα στον κώνο, η διατομή μεγαλώνει.

Άρα για τον ίδιο όγκο νερού, η άνοδος του ύψους γίνεται **όλο και πιο αργή**.

Επομένως, στο κωνικό τμήμα το ύψος του νερού:

- αυξάνεται
- αλλά με **φθίνοντα ρυθμό**

δηλαδή η γραφική παράσταση είναι **καμπύλη 'προς τα κάτω'**.

2. Στο κυλινδρικό μέρος

Μόλις το νερό φτάσει στον κύλινδρο, η διατομή παραμένει σταθερή. Άρα ίσες ποσότητες νερού σε ίσους χρόνους δίνουν ίσες αυξήσεις ύψους. Επομένως, στο κυλινδρικό τμήμα το ύψος αυξάνεται **γραμμικά**.

3. Συμπέρασμα

Η σωστή γραφική παράσταση πρέπει:

- στην αρχή να ανεβαίνει γρήγορα και μετά πιο αργά
- και στη συνέχεια να γίνεται **ευθεία γραμμή**

Άρα:

Σωστή απάντηση: Β



Δραστηριότητες σελ. 163-166 (Εμπλουτισμού)

1. Δίνεται η παραβολή (Π) με τύπο $y = x^2$. Αν A και B είναι σημεία της παραβολής με τετμημένες -2 και 3 :

(α) να βρείτε τις τεταγμένες των σημείων A και B

(β) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB

(γ) να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την παραβολή (Π) και την ευθεία AB .

Απάντηση

(α) $A(x_A, y_A) = (-2, y_A)$ και αφού το σημείο ανήκει στην παραβολή, τότε

$$y_A = x_A^2 = 4.$$

Συνεπώς, $A(-2, 4)$. Ομοίως, $B(x_B, y_B) = (3, y_B)$ και αφού το σημείο ανήκει στην παραβολή, τότε $y_B = x_B^2 = 9$. Συνεπώς, $B(3, 9)$.

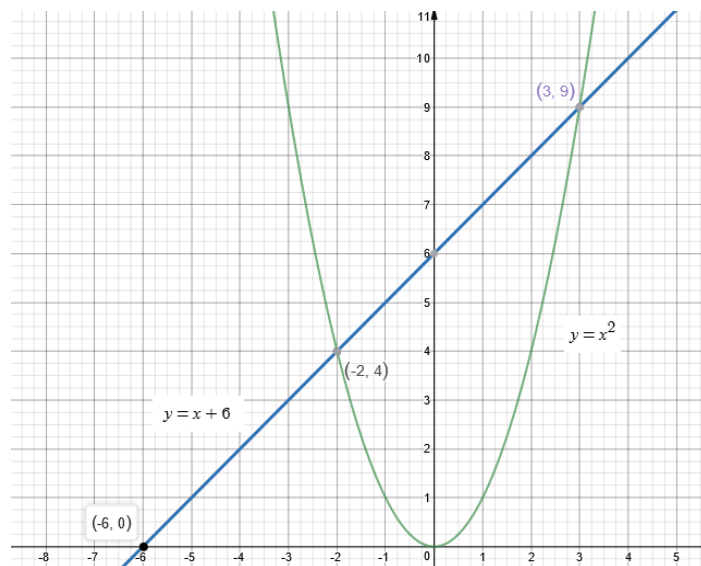
(β) $(AB): y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A)$. Έχουμε:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 4}{3 - (-2)} = \frac{5}{5} = 1$$

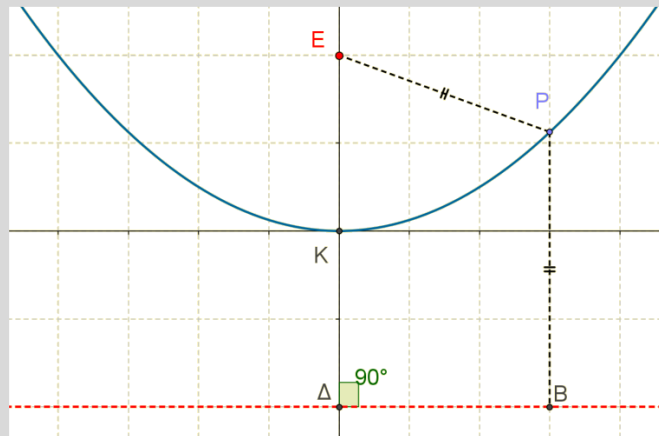
και άρα

$$(AB): y - 4 = x + 2, \text{ δηλ. } (AB): y = x + 6.$$

(γ) Τα σημεία τομής της ευθείας με την παραβολή είναι τα $A(-2, 4)$ και $B(3, 9)$.



2. Για την παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$, το σημείο $E(0, \alpha)$ είναι σταθερό σημείο στον άξονά της.



Αν η ΔB είναι ευθεία κάθετη στον άξονα της παραβολής με $EP = PB$, $EK = K\Delta$ και το P είναι τυχαίο σημείο της παραβολής:

- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του α .
 (β) Να βρείτε την αντίστοιχη τιμή του α , αν ο τύπος της παραβολής ήταν $y = x^2$.
 (γ) Να διατυπώσετε λεκτικά την πιο πάνω ιδιότητα της παραβολής.

Απάντηση

- (α) $EK = K\Delta \Rightarrow \Delta(0, -\alpha)$.
 Συνεπώς, αφού το σημείο θ είναι η προβολή του σημείου P στην ευθεία (ΔB) , είναι $\theta(x_P, -\alpha)$.

Επίσης, αφού το P ανήκει στην παραβολή $\Rightarrow P\left(x_P, \frac{x_P^2}{4}\right)$.

Έτσι,

$$\begin{aligned} |PE| = |P\theta| &\Leftrightarrow |PE|^2 = |P\theta|^2 \\ &\Leftrightarrow (x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2 = (x_\theta - x_P)^2 + (y_\theta - y_P)^2 \\ &\Leftrightarrow (0 - x_P)^2 + (\alpha - y_P)^2 = (x_P - x_P)^2 + (-\alpha - y_P)^2 \\ &\Leftrightarrow x_P^2 + (\alpha - y_P)^2 = (x_P - x_P)^2 + (-\alpha - y_P)^2 \\ &\Leftrightarrow x_P^2 + y_P^2 - 2\alpha y_P + \alpha^2 = y_P^2 + 2\alpha y_P + \alpha^2 \\ &\Leftrightarrow x_P^2 = 4\alpha \underbrace{y_P}_{\frac{x_P^2}{4}} \Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

- (β) Είναι άμεσο ότι θα είναι $\alpha = \frac{1}{4}$.



(γ) Στην παραβολή $y = \frac{x^2}{4}$, τα σημεία της ισαπέχουν από το (σταθερό) σημείο $E(0,1)$ και την ευθεία με εξίσωση $y = 1$.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η διακρίνουσα της εξίσωσης παίρνει ελάχιστη τιμή και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της.

Απάντηση

$$x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda + 1 = 0 \quad \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Έχουμε $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4(\lambda + 1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda - 4 = \lambda^2 - 6\lambda - 3$$

Το τριώνυμο $\lambda^2 - 6\lambda - 3$ έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου θετικό αριθμό και άρα λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Για να τη βρούμε, συμπληρώνουμε σε τέλειο τετράγωνο:

$$\lambda^2 - 6\lambda - 3 = (\lambda - 3)^2 - 12$$

και άρα η κορυφή της παραβολής που προκύπτει είναι το σημείο $K(3, -12)$. Έτσι, η μέγιστη τιμή είναι η -12 και η οποία λαμβάνεται για $\lambda = 3$.

4. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(\kappa + 2, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη.

Απάντηση

$$A(1,3), B(\kappa + 2, \kappa)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (AB) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\kappa + 2 - 1)^2 + (\kappa - 3)^2} \\ &= \sqrt{2\kappa^2 - 4\kappa + 10} = \sqrt{2}\sqrt{\kappa^2 - 2\kappa + 5} \end{aligned}$$

Κατά τα γνωστά, το τριώνυμο $\kappa^2 - 2\kappa + 5 = (\kappa - 1)^2 + 4$ είναι >0 για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ και έχει κορυφή το σημείο $(1,4)$ στην οποία παρουσιάζει ελάχιστο, δηλ. η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται για $\kappa = 1$. Τότε, σύμφωνα με εργαλεία που θα μάθουμε σε επόμενη τάξη και η $\sqrt{\kappa^2 - 2\kappa + 5}$, λαμβάνει ελάχιστη τιμή για $\kappa = 1$.

5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

και, από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

(α) τον άξονα συμμετρίας της (αν υπάρχει)

(β) τις τομές με τους άξονες

(γ) τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της

(δ) το σύνολο τιμών της

Απάντηση

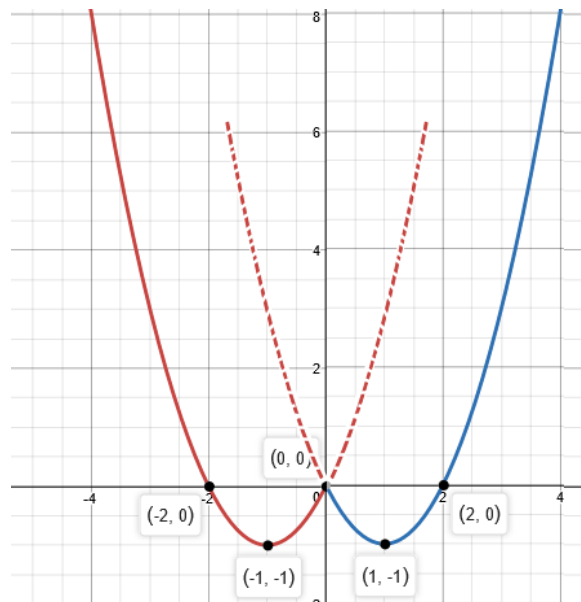
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} (x+1)^2 - 1, & x < 0 \\ (x-1)^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(α) Ο άξονας συμμετρίας της είναι ο άξονας των τεταγμένων.

(β) Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα $A(-2,0)$, $O(0,0)$ και το συμμετρικό του $A(-2,0)$, το $B(2,0)$.

(γ) Δεν υπάρχει μέγιστη τιμή ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι η $f_{min} = -1$.

(δ) Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, +\infty)$



6. Αν το τριώνυμο $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι:

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Απάντηση

Αφού το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες, αυτές δίνονται από τους τύπους:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Υπολογίζουμε τη διαφορά τους:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta} + \beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ &= \frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha} \end{aligned}$$

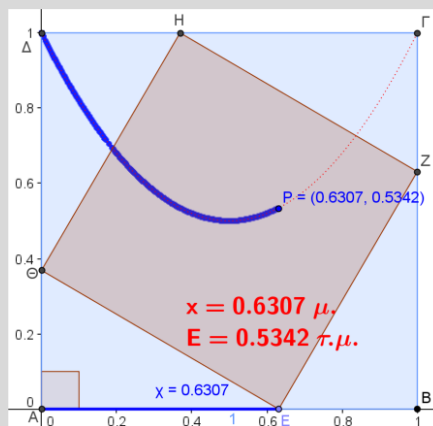
Παίρνοντας απόλυτες τιμές στα δύο μέλη, έχουμε:

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha} \right|$$

Επειδή $\sqrt{\Delta} \geq 0$, προκύπτει

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$$

7. Να ανοίξετε το αρχείο «aLyk_En07_Emvado tetragonou1.ggb».



Να μετακινήσετε το σημείο E της πλευράς AB . Το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει μήκος πλευράς 1cm. Το σημείο E «κινείται» στην πλευρά AB , έτσι ώστε να δημιουργεί το τετράγωνο $EZH\Theta$ μέσα στο αρχικό τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Αν $AE = x$, να υπολογίσετε την τιμή του x , για την οποία το εμβαδόν του $EZH\Theta$ γίνεται ελάχιστο. Τι δηλώνουν οι συντεταγμένες του σημείου P κατά την κίνηση του σημείου E ;

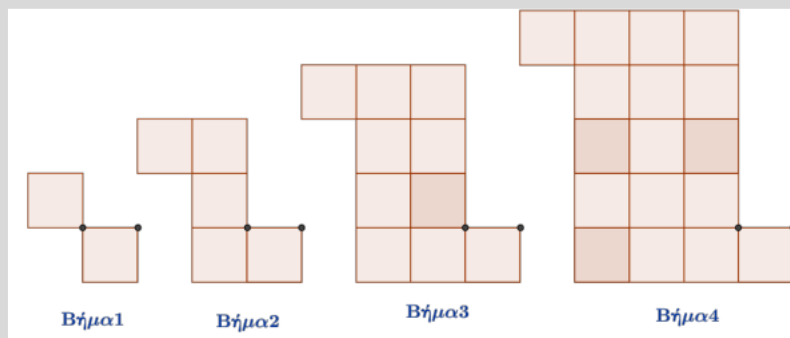
Απάντηση



(α) το εμβαδόν του τετραγώνου $EZH\theta$ γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{1}{2}$.

(β) οι συντεταγμένες του σημείου P κατά την κίνηση του σημείου E δηλώνουν ζεύγος πλευράς και αντίστοιχου εμβαδού τετραγώνου για $x \in [0,1]$, δηλ. $P(x, E(x))$ όπου $E(x) = x^2, \quad x \in [0,1]$.

8. Δίνονται τα πιο κάτω σχήματα.



(α) Με βάση το σχήμα, να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Βήμα	1	2	3	4
Αριθμός τετραγώνων	2			

(β) Να αναφέρετε το μοτίβο που δείχνει την αύξηση στα τετραγωνάκια σε κάθε επόμενο βήμα.

(γ) Να προβλέψετε τον αριθμό των τετραγώνων στα επόμενα τέσσερα βήματα.

(δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των τετραγώνων στο n βήμα.

Απάντηση

Βήμα	1	2	3	4	5	6	7	8	...	n
Αριθμός τετραγώνων	2	5	10	17	26	37	50	65	...	$n^2 + 1$
	$1^2 + 1$	$2^2 + 1$	$3^2 + 1$	$4^2 + 1$...			$8^2 + 1$...	$n^2 + 1$



9. Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $x^2 - 3\kappa x + (2\kappa^2 - \kappa + 3)$ μετασχηματίζεται σε διαφορά δύο τετραγώνων;

Απάντηση

Θέλω το τριώνυμο $x^2 - 3\kappa x + (2\kappa^2 - \kappa + 3)$ να έχει δυο αντίθετες ρίζες, δηλαδή: $\Delta > 0$ και $S = 0$.

Είναι:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9\kappa^2 - 4(2\kappa^2 - \kappa + 3) > 0 \Leftrightarrow \kappa^2 + 4\kappa - 12 > 0 \Leftrightarrow (\kappa + 6)(\kappa - 2) > 0$$

Κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων του τριωνύμου:

κ	$-\infty$	-6	2	$+\infty$
πρόσημο $\kappa^2 + 4\kappa - 12$	+	○	-	○
		+	-	+

Άρα, για $\kappa \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty) \Rightarrow \Delta > 0$.

Τέλος,

$$S = 0 \Leftrightarrow -\frac{-3\kappa}{1} = 0 \Leftrightarrow 3\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0$$

Αλλά το $\kappa = 0$ δεν ανήκει στο διάστημα $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

Άρα:

$$\kappa \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty).$$

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ορίζεται η παράσταση:

$$A(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^2 - 1}$$

Απάντηση

Η παράσταση $A(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12} - \sqrt{x^2 - 1}$ ορίζεται για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ορίζονται ΚΑΙ οι δυο παραστάσεις $\sqrt{-x^2 - 4x + 12}$ και $\sqrt{x^2 - 1}$. Η πρώτη παράσταση ορίζεται για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $-x^2 - 4x + 12 \geq 0$. Είναι

$$\begin{aligned} -x^2 - 4x + 12 \geq 0 &\Leftrightarrow -(x^2 + 4x - 12) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x + 6)(x - 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 6)(x - 2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in [-6, 2] \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράσταση ορίζεται για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία $x^2 - 1 \geq 0$.

Είναι

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Οι δυο αυτές ανισώσεις συναληθεύουν στο σύνολο $[-6, -1] \cup [1, 2]$.

11. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 2 και γινόμενο 4.

Απάντηση

Έστω ότι υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 2 \\ x \cdot y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x \cdot y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x(2 - x) = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

άτοπο, αφού $x \cdot y = 4$.

12. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει δύο λύσεις ίσες;

(γ) Να υπολογίσετε τις τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

Απάντηση

(α) Είναι

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

και άρα η πιο πάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Για $\Delta = 0$ η πιο πάνω εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και ίσες. Είναι

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

(γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για όλα εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία το υπόριζο είναι ≥ 0 , δηλαδή:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 > 0.$$

Αλλά το τριώνυμο $x^2 - x + \lambda - \lambda^2$ έχει $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου και άρα

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 < 0$$

η οποία δεν αληθεύει για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ .

Έτσι, για καμία τιμή της πραγματικής παραμέτρου λ η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - x + \lambda - \lambda^2}$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

13. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 8x + 15}, \quad x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$$

δεν μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $[1, 4)$.

Απάντηση

Είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-3)(x-5)} = \frac{(x-4)^2 - 4}{(x-4)^2 - 1} = \frac{(x-4)^2 - 1 - 3}{(x-4)^2 - 1} \\ &= \frac{(x-4)^2 - 1}{(x-4)^2 - 1} - \frac{3}{(x-4)^2 - 1} = 1 - \frac{3}{(x-4)^2 - 1} \end{aligned}$$

Για $x \leq 2$, είναι

$$x - 4 \leq -2 \Rightarrow (x - 4)^2 \geq 2 \Rightarrow (x - 4)^2 - 1 \geq 1$$

και άρα

$$\frac{3}{(x-4)^2 - 1} \leq 1$$

Συνεπώς, για $x \leq 2$, είναι

$$0 \leq \underbrace{1 - \frac{3}{(x-4)^2 - 1}}_{f(x)} < 1$$

Αν $2 < x < 3$, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $f(x) < 0$ και αν $3 < x \leq 4$, τότε $f(x) \geq 4$. Ιδιαίτερα, $f(4) = 4$.

Εντελώς όμοια, αν $4 < x < 5$, τότε $f(x) > 4$ και αν $5 < x < 6$, τότε $f(x) < 0$. Τέλος, αν $6 \leq x$, τότε $f(x) \leq 1$.

Έτσι, η συνάρτηση f έχει πεδίο τιμών το σύνολο $(-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$ και το συμπέρασμα έπεται.

14. Το κέρδος σε ευρώ ενός τουριστικού γραφείου από μία σχολική εκδρομή x μαθητών δίνεται από τον τύπο

$$K(x) = 80x - x^2.$$

(α) Να βρείτε πόσοι μαθητές θα πρέπει να πάνε εκδρομή, έτσι ώστε το ελάχιστο κέρδος του τουριστικού γραφείου να είναι €975.

(β) Για ποιον αριθμό μαθητών το γραφείο έχει μέγιστο κέρδος;

Απάντηση

(α)

$$\begin{aligned} \kappa(x) \geq 975 &\Leftrightarrow 80x - x^2 - 975 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x^2 - 80x + 975) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 80x + 975 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - 15)(x - 65) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [15, 65]$$

Συνεπώς, για να έχει κέρδη ύψους τουλάχιστον €975, πρέπει να έρθουν τουλάχιστον 15 μαθητές.

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \kappa(x) &= 80x - x^2 = -(x^2 - 80x) \\ &= -(x^2 - 80x + 1600) + 1600 \\ &= -(x - 40)^2 + 1600 \end{aligned}$$

και άρα η συνάρτηση κ έχει μέγιστη την τιμή $x = 40$ ευρώ για $x = 40$ μαθητές.

15. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο λογισμικό, για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο

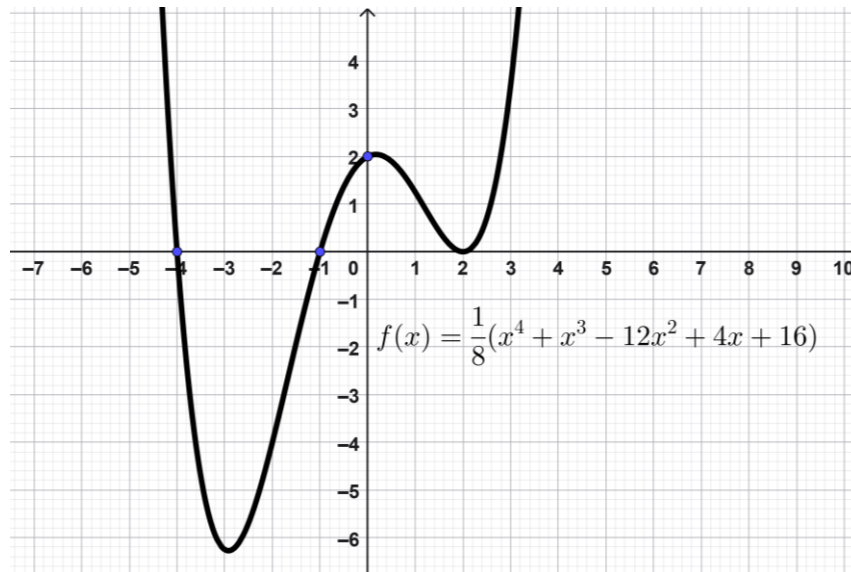
$$f(x) = \frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16)$$

και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{1}{8}(x^4 + x^3 - 12x^2 + 4x + 16) \leq 0.$$

Απάντηση

$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-4, -1]$, όπως φαίνεται από την παρακάτω γραφική παράσταση:



Η γραφική παράσταση έγινε στο <https://www.geogebra.org/classic>.

16. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Να μετατρέψετε το τριώνυμο στη μορφή $f(x) = (x + \kappa)^2 + \lambda$, εκφράζοντας τα κ και λ συναρτήσει των β και γ .

Απάντηση

$$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{2} x + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma$$

17. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει:

(α) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$ (β) $(x - 3y)^2 + 4(3y - x) + 8 > 0$

Απάντηση

(α) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$x^2 - xy + y^2 = x^2 - 2x \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + 3 \frac{y^2}{4} = \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} + 3 \underbrace{\frac{y^2}{4}}_{\geq 0} \geq 0$$

(β) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι

$$(x - 3y)^2 + 4(3y - x) + 8 = (3y - x)^2 + 4(3y - x) + 8$$

Θέτω $w = x - 3y$ και το πιο πάνω γίνεται:

$$w^2 + 4w + 8$$

Το πιο πάνω τριώνυμο έχει αρνητική διακρίνουσα και αφού ο συντελεστής του είναι θετικός, είναι $w^2 + 4w + 8 > 0$.

18. Να διερευνήσετε, για διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, το είδος και το πρόσημο των λύσεων των πιο κάτω εξισώσεων:

(α) $2x^2 - 4x + 3(2\kappa - 1) = 0$

(β) $2x(x - \kappa) = \kappa^2$

Απάντηση

(α) Είναι

$$\Delta = (-4)^2 - 24(2\kappa - 1) = 16 - 48\kappa + 24 = -48\kappa + 40$$

Άρα:

■ Αν $\Delta \geq 0$, δηλ. ισοδύναμα ότι $-48\kappa + 40 \geq 0$, δηλ. $\kappa \leq \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές. Ιδιαίτερα, αν $\kappa = \frac{5}{6}$ τότε οι ρίζες είναι (πραγματικές και) **ίσες**. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση είναι η $2x^2 - 4x + 7$ και άρα $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{7}{2} > 0$ άρα οι ρίζες είναι **ομόσημες** και αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 2 > 0$ αυτές θα είναι **θετικές**.

■ Αν $\Delta < 0$, δηλ. ισοδύναμα ότι $-48\kappa + 40 < 0$, δηλ. $\kappa > \frac{5}{6}$, τότε η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές ρίζες**.

■ Αν $\gamma = 0$, δηλ. $2\kappa - 1 = 0$, δηλ. $\kappa = \frac{1}{2}$ τότε η εξίσωση είναι η $2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$, τότε η εξίσωση έχει δυο ρίζες, τη $x = 0$ και τη $x = 2 > 0$.

■ Αν $\gamma < 0$, δηλ. $2\kappa - 1 < 0$, δηλ. $\kappa < \frac{1}{2}$ τότε $P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{7}{2} < 0$ άρα οι ρίζες είναι **ετερόσημες** και αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 2 > 0$ η θετική θα είναι αυτή με την μεγαλύτερη κατά απόλυτο τιμή.

■ Αν $\frac{1}{2} < \kappa < \frac{5}{6}$, τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές θετικές και άνισες.

(β) Είναι

$$\Delta = (-2\kappa)^2 + 8\kappa^2 = 12\kappa^2 \geq 0$$

Άρα:

■ Αν $\kappa = 0$, τότε $\Delta = 0$ και άρα η εξίσωση έχει δυο **ίσες** ρίζες. Η αντίστοιχη εξίσωση είναι η $2x^2 - 2\kappa x = 0$. Αφού $P = 0$, έπεται ότι οι ρίζες είναι το μηδέν.

■ Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\Delta > 0$ και άρα η εξίσωση έχει δυο **πραγματικές (άνισες) ρίζες**. Η αντίστοιχη εξίσωση είναι η $2x^2 - 2\kappa x - \kappa^2 = 0$. Αφού $P = \frac{-\kappa^2}{2} < 0$, έπεται ότι οι ρίζες είναι **ετερόσημες**.

19. Δίνεται το τριώνυμο $g(x) = x^2 + (a + 2)x + (a + 2)$. Να αποδείξετε ότι η τιμή $g(a)$ είναι θετική για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

$$g(x) = x^2 + (a + 2)x + (a + 2)$$

$$\Rightarrow g(a) = a^2 + (a + 2)a + (a + 2) = a^2 + a^2 + 2a + a + 2 = 2a^2 + 3a + 2$$

Το τριώνυμο $2a^2 + 3a + 2$ είναι θετικό για κάθε τιμή του a (αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου).

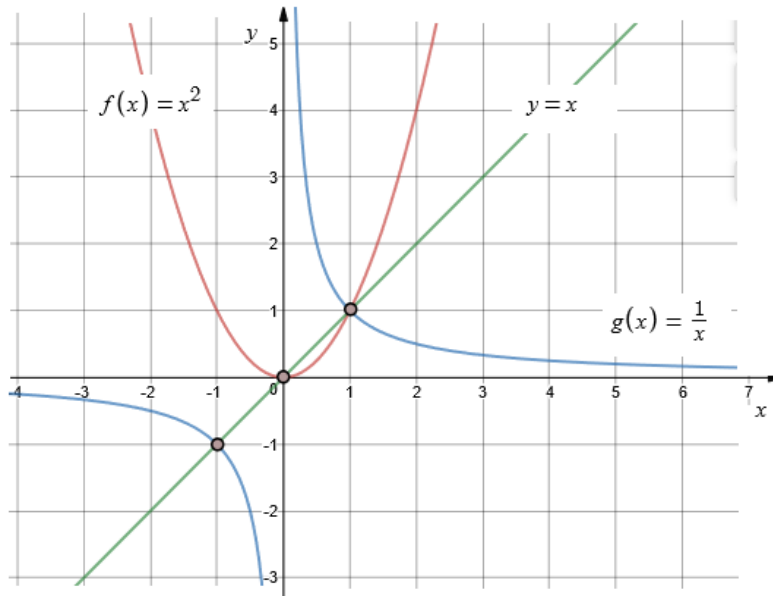
20. (α) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ και της ευθείας $y = x$.

(β) Από τις γραφικές παραστάσεις, να λύσετε τις ανισώσεις $x^2 \geq \frac{1}{x}$ και $\frac{1}{x} < x$. Στη συνέχεια, να επαληθεύσετε αλγεβρικά τα αποτελέσματά σας.

Απάντηση



(α)


 (β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g συναντιούνται στο σημείο $x = 1$. Πράγματι,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

 Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $y = x$ συναντιούνται στα σημεία $x = 1$ και $x = 0$.

Πράγματι:

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1$$

 Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και $y = x$ συναντιούνται στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$.

Πράγματι:

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 1$$

Η ανίσωση $x^2 \geq \frac{1}{x}$ ικανοποιείται για όλα εκείνα τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f είναι από 'πάνω' από το γράφημα της g και για όλα εκείνα τα x για τα οποία τις δύο γραφικές τέμνονται. Το σύνολο $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ ικανοποιεί το πιο πάνω (σύμφωνα με τη γραφική παράσταση).

Η ανίσωση $\frac{1}{x} < x$ ικανοποιείται για όλα εκείνα τα x για τα οποία το γράφημα της g είναι από 'κάτω' από τη γραφική παράσταση της ευθείας. Το σύνολο $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ικανοποιεί το πιο πάνω (σύμφωνα με τη γραφική παράσταση).

21. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 3x - \alpha = 0$, να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$2 - \frac{\alpha}{x_1 + 2} < \frac{\alpha}{x_2 + 2}$$

Απάντηση

$$x^2 - 3x - \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Έτσι,
$$S = -\frac{\beta}{\alpha} = 3 \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} = -\alpha$$

$$\begin{aligned} 2 - \frac{\alpha}{x_1 + 2} < \frac{\alpha}{x_2 + 2} &\Leftrightarrow \frac{2x_1 + 4 - \alpha}{x_1 + 2} - \frac{\alpha}{x_2 + 2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x_2 + 2)(2x_1 + 4 - \alpha) - \alpha(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x_1x_2 + 4x_2 - \alpha x_2 + 4x_1 + 8 - 2\alpha - \alpha x_1 - 2\alpha}{x_1x_2 + 2(x_1 + 4)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2P + (4 - \alpha)S - 4\alpha + 8}{P + 2S + 4} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{20 - 9\alpha}{10 - \alpha} < 0 \Leftrightarrow \frac{9\alpha - 20}{\alpha - 10} < 0 \end{aligned}$$

Κάνω τον πίνακα προσήμων:

α	$-\infty$	$\frac{20}{9}$	10	$+\infty$
πρόσημο $\frac{9\alpha-20}{\alpha-10}$	+	○	-	+

Άρα, για $\alpha \in \left(\frac{20}{9}, 10\right) \Rightarrow \frac{9\alpha-20}{\alpha-10} < 0$.

22. Η απόσταση φρεναρίσματος A (σε μέτρα) ενός αυτοκινήτου, που κινείται με ταχύτητα u , υπολογίζεται κατά προσέγγιση από τον τύπο

$$A(u) = \frac{1}{20}u^2 + u, \quad (u > 0).$$

Να προσδιορίσετε τις ταχύτητες που έχουν ως αποτέλεσμα αποστάσεις φρεναρίσματος μικρότερες από 75 m.

Απάντηση

$$A(u) = \frac{1}{20}u^2 + u, \quad u > 0.$$

$$\begin{aligned} A(u) < 75 &\Leftrightarrow \frac{1}{20}u^2 + u < 75 \Leftrightarrow \frac{1}{20}u^2 + u - 75 < 0 \\ &\Leftrightarrow u^2 + 20u - 1500 < 0 \\ &\Leftrightarrow (u + 10)^2 - 1600 < 0 \end{aligned}$$

Έχουμε παραβολή με ελάχιστο στο σημείο με $u = -10$.

$$(u + 10)^2 - 1600 = (u + 50)(u - 30)$$



u	0	30	$+\infty$
πρόσημο $u^2 + 20u - 1500$	-	○	+

και άρα:

$$(u + 50)(u - 30) < 0 \Leftrightarrow u \in (0,30).$$

23. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 1, x \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

$f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ και αρα το γράφημα της f εκφράζει παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2,3)$ στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο.

Έτσι, το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-3, +\infty)$.

24. (α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός a με $0 < a < 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς $0, 1, a, a^2, \sqrt{a}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια του ερωτήματος (α).

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}.$$

Απάντηση

(α) Είναι $x^2 < x \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x - 1) < 0$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
πρόσημο $x^2 - x$	+	○	-	○	+

Άρα, για $x \in (0,1) \Rightarrow x(x - 1) < 0$.

(β) i. $a \in (0,1)$. Τότε από το (α), είναι $a^2 < a$.

Επίσης, αφού $a \in (0,1) \Rightarrow \sqrt{a} \in (0,1)$ και αρα πάλι από το (α), είναι $(\sqrt{a})^2 < \sqrt{a}$, δηλαδή $a < \sqrt{a}$. Έτσι:

$$0 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1$$

ii. Θα δείξω ότι για $0 < a < 1$ ισχύει:

$$\sqrt{1+a} < 1 + \sqrt{a}$$

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη είναι θετικά, μπορώ να υψώσω στο τετράγωνο:

$$(\sqrt{1+a})^2 < (1+\sqrt{a})^2 \Leftrightarrow 1+a < 1+2\sqrt{a}+a$$

Απλοποιώ:

$$1+a < 1+a+2\sqrt{a} \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{a}$$

Έλεγχος:

Για $0 < a < 1$:

$$\sqrt{a} > 0 \Rightarrow 2\sqrt{a} > 0$$

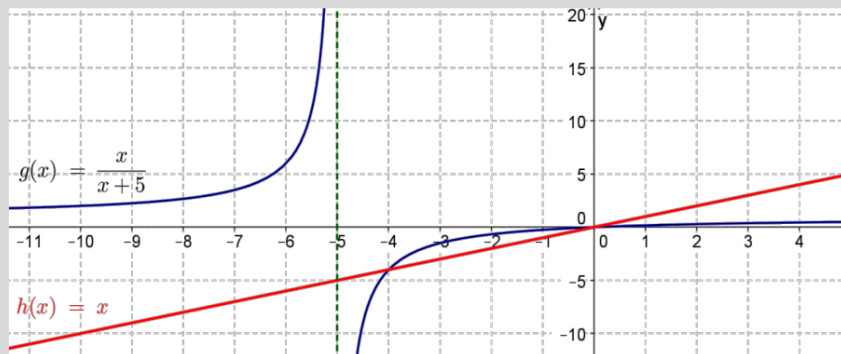
άρα η ανισότητα ισχύει.

25. Δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$g(x) = \frac{x}{x+5}, \quad h(x) = x$$

Να βρείτε τα διαστήματα για τα οποία ισχύει:

$$\frac{x}{x+5} \leq x.$$



Απάντηση

Είναι

$$\frac{x}{x+5} \leq x \Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow (g(x) < f(x) \text{ ή } g(x) = f(x))$$

Από τη γραφική παράσταση που μας δίνεται, βρίσκω ότι η πιο πάνω ανίσωση ικανοποιείται για

$$x \in (-5, 4] \cup [0, +\infty).$$



Επανάληψη

Βασικά	
<p>Τριώνυμο: $ax^2 + \beta x + \gamma$ ($a \neq 0$)</p> <p>Συντελεστής του x^2: α</p> <p>Συντελεστής του x: β</p> <p>Σταθερός όρος: γ</p> <p>Διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$</p>	<p>Εξίσωση Β' βαθμού: $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($a \neq 0$)</p> <p>Λύσεις (ή αλλιώς: ρίζες του τριωνύμου)</p> <ul style="list-style-type: none"> • Αν $\Delta \geq 0$: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και συγκεκριμένα, <ul style="list-style-type: none"> ○ αν $\Delta = 0$: $x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ • αν $\Delta < 0$: δεν έχει πραγματικές λύσεις
Παραβολή (συνάρτηση)	
<p>$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$)</p>	
<p>Σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων:</p>	
<ul style="list-style-type: none"> • Με τον άξονα των τετμημένων (των x) ($\Delta \geq 0$) $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ <p>και άρα τα σημεία τομής είναι τα $(0, x_1), (0, x_2)$</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Με τον άξονα των τεταγμένων (των y) $x = 0 \Rightarrow f(0) = \gamma$ και άρα το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων είναι το $(0, \gamma)$.
Η συνάρτηση $y = ax^2, x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$)	
<p>$a > 0$</p> <p>Κορυφή: $K(0,0)$</p> <p>Ελάχιστη τιμή: $y_{min} = 0$</p> <p>Άξονας συμμετρίας: ο y άξονας ($x = 0$)</p> <p>Σύνολο τιμών: $[0, +\infty)$</p>	
<p>$a < 0$</p> <p>Κορυφή: $K(0,0)$</p> <p>Ελάχιστη τιμή: $y_{min} = 0$</p> <p>Άξονας συμμετρίας: ο y άξονας ($x = 0$)</p> <p>Σύνολο τιμών: $(-\infty, 0]$</p>	

Η μορφή $y = a(x + \kappa)^2 + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$)
όπου $\kappa, \lambda \neq 0$

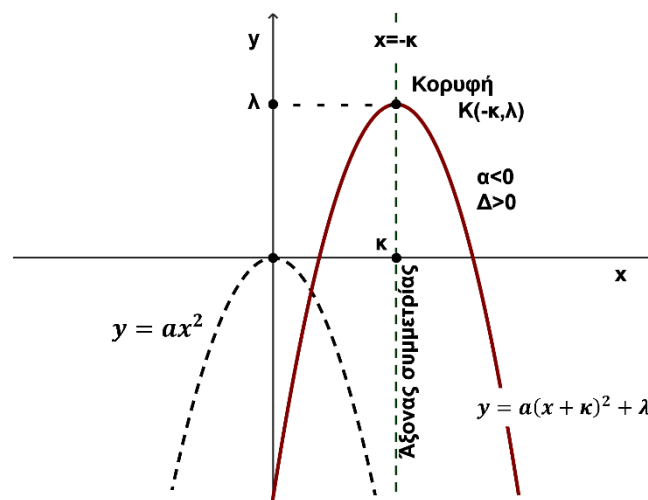
Όταν η παραβολή είναι γραμμένη στη μορφή αυτή, μπορούμε να εξαγάγουμε τις πιο κάτω πληροφορίες:

Η παραβολή προκύπτει από την παραβολή $y = ax^2$ ως εξής:

- με οριζόντια μετατόπιση κατά $|\kappa|$ μονάδες αριστερά, αν $\kappa > 0$ και $|\kappa|$ μονάδες δεξιά, αν $\kappa < 0$
- με κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|\lambda|$ μονάδες και συγκεκριμένα προς τα πάνω αν $\lambda > 0$ και προς τα κάτω αν $\lambda < 0$

Έπονται:

Κορυφή	Ελάχιστη/μέγιστη τιμή	Άξονας συμμετρίας	Σύνολο τιμών
$K(-\kappa, \lambda)$	$y_{\min} = \lambda$ αν $a > 0$ και $y_{\max} = \lambda$ αν $a < 0$	$x = -\kappa$	$(-\infty, \lambda]$ αν $a < 0$ και $[\lambda, +\infty)$ αν $a > 0$



(Σχήμα: Η περίπτωση που $\kappa, \lambda > 0$)

Η μορφή $y = ax^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$)

Όταν η εξίσωση της παραβολής είναι γραμμένη στην πιο πάνω μορφή, τότε, για να βρούμε την κορυφή της (άρα και τον άξονα συμμετρίας, το σύνολο τιμών και τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή), χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$x_{\text{κορυφής}} = -\frac{\beta}{2a}, \quad y_{\text{κορυφής}} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Δηλαδή, η κορυφή είναι το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή:

- έχει ελάχιστη τιμή την $y_{min} = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
- Άξονα συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Σύνολο τιμών: $[-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty)$

2. Αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή:

- έχει μέγιστη τιμή την $y_{max} = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
- Άξονα συμμετρίας: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Σύνολο τιμών: $(-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}]$

Έπεται ότι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha}$$

- $f(0) = \gamma$ και άρα το σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα των τεταγμένων (τον άξονα των y) είναι το $(0, \gamma)$.

Άθροισμα και γινόμενο ριζών του τριωνύμου

Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες (όχι κατανάγκην διακεκριμένες) της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) (με $\Delta \geq 0$), τότε συμβολίζουμε με **S** το **άθροισμα** και με

P το **γινόμενο των ριζών**:

$$S = x_1 + x_2 \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

- Υπολογισμός του $x_1^2 + x_2^2$:

$$S = x_1 + x_2 \Rightarrow S^2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$\Rightarrow S^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow S^2 = x_1^2 + 2P + x_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{S^2 - 2P = x_1^2 + x_2^2}$$

- Λύσεις αντίθετες: $x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{S = 0}$

- Λύσεις αντίστροφες: $x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{P = 1}$

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

Κάθε τριώνυμο $P(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$ για το οποίο η διακρίνουσα Δ είναι ≥ 0 , μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, όχι κατ'ανάγκην διακεκριμένες.

Κατασκευή εξίσωσης 2ου βαθμού

Μπορούμε να κατασκευάσουμε εξίσωση 2ου βαθμού, όταν γνωρίζουμε τις λύσεις της, x_1 και x_2 , ή το άθροισμα S και το γινόμενο P των λύσεών της.

Μια τέτοια εξίσωση είναι και η

$$x^2 - Sx + P = 0.$$



Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω η παραβολή $f(x) = (x + 2)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (α) Να ελέγξετε αν η f παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.
 - (β) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.
 - (γ) Να βρείτε της συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
 - (δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραβολής.

2. Έστω η παραβολή $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (α) Να ελέγξετε αν η f παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, την οποία να προσδιορίσετε.
 - (β) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.
 - (γ) Να βρείτε της συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
 - (δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραβολής.
 - (ε) Να υπολογίσετε τις λύσεις της εξίσωσης $-x^2 + 3x + 4 = 0$.

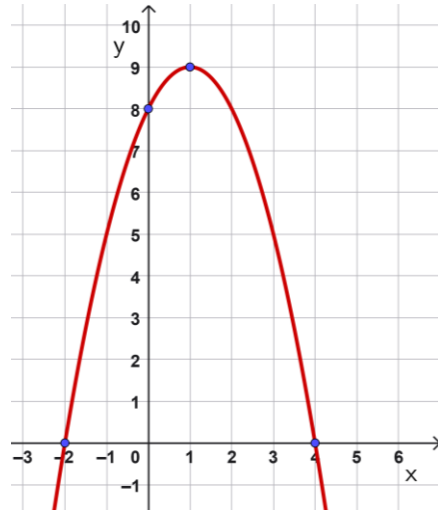
3. Έστω η παραβολή $f(x) = x^2 + 9x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.
 - (α) Να ελέγξετε αν η f παρουσιάζει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, την οποία να προσδιορίσετε.
 - (β) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.
 - (γ) Να βρείτε της συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
 - (δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραβολής.
 - (ε) Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα των x).

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το γράφημα της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \quad (a \neq 0)$$

Να βρείτε:

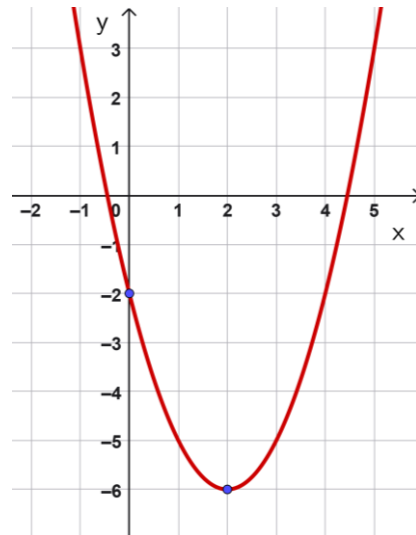
- (α) το σύνολο τιμών της $y = f(x)$, τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας,
 (β) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$,
 (γ) τις τιμές των α, β, γ .



5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το γράφημα της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \quad (a \neq 0)$$

- (α) Να δικαιολογήσετε γιατί το γράφημα αυτό έχει ως άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = 2$.
 (β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 (γ) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(4)$.
 (δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.
 (ε) Γράψτε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = A(x - k)^2 + \delta$, όπου $A, k, \delta \in \mathbb{R}$.



6. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις:

(α) $x_1 = 3, \quad x_2 = -7$ (β) $x_1 = 2 - \sqrt{7}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{7}$

7. Αν το $x = 3$ είναι λύση της εξίσωσης

$$x^2 - 7x + \lambda = 0,$$

να βρείτε την τιμή της πραγματικής σταθεράς λ καθώς και την άλλη (πραγματική) λύση της εξίσωσης.

8. Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών):

(α) $x^2 = 81$

(β) $x^2 + 3x + 4 = 0$



(γ) $x(x + 1) = 0$

(δ) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(ε) $-5x^2 - 13x + 6 = 0$

(στ) $-3x^2 + 5x + 2 = 0$

(ζ) $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

(η) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

9. Χωρίς να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις, να βρεθεί το είδος των ριζών της κάθε μίας:

(α) $x^2 + 3x + 2 = 0$

(β) $6x^2 - 2x - 4 = 0$

(γ) $8x^2 - 10x + 3 = 0$

(δ) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(ε) $9x + 5 - 2x^2 = 0$

(στ) $x^2 - 5x + 24 = 0$

(ζ) $(5x - 1)^2 + 1 = 0$

(η) $16x^2 - 40x + 25 = 0$

10. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x^2 - (2\lambda - 1)x - 3 = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$.

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$ να πραγματικές λύσεις για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α, β και γ .

12. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση $\lambda x^2 - 5x + 6 = 0$ να έχει (α) ρίζες πραγματικές και διακεκριμένες και (β) ρίζες πραγματικές και ίσες.

13. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$ να έχει (α) ρίζα τον αριθμό $x = 2$ και (β) ρίζες πραγματικές και ίσες.

14. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση $3x^2 - (\lambda + 3)x + 2\lambda - 1 = 0$ να έχει (α) ρίζες αντίθετες, (β) ρίζες αντίστροφες, (γ) άθροισμα ριζών ίσο με 6 και (δ) άθροισμα ριζών ίσο με το γινόμενο των ριζών.

15. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ έτσι ώστε η εξίσωση $(\lambda + 5)x^2 + (\lambda + 2)x + 2 = 0$

να έχει

(α) ρίζα τον αριθμό $x = -2$,

(β) ρίζες αντίστροφες,

(γ) ρίζες αντίστροφες και

(δ) άθροισμα ριζών ίσο με 2.

16. Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης

$$2x^2 - 3x + 6 = 0,$$

χωρίς να τις προσδιορίσετε, να υπολογίσετε τα παρακάτω:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $(2x_1 - 3) \cdot (2x_2 - 3)$

(δ) $x_1^2 + x_2^2$

(ε) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(στ) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$

17. Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + 7x - 3 = 0,$$

χωρίς να τις προσδιορίσετε, να υπολογίσετε τα παρακάτω:

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \cdot x_2$

(γ) $(x_1 - 1) \cdot (x_2 - 1)$

(δ) $5x_1^2x_2 + 5x_2^2x_1$

(ε) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$

(στ) $\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{x_1}{x_2 - 1}$

18. Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

(α) Να βρείτε το είδος και το πρόσημο των ριζών της (β) Αφού δικαιολογήσετε γιατί η πιο κάτω παράσταση ορίζεται (έχει νόημα), να υπολογίσετε την τιμή της:

$$A = \frac{x_1^2x_2 + x_2^2x_1}{(x_1 - x_2)^2}$$

(γ) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις $y_1 = \frac{1}{x_1}$ και $y_2 = \frac{1}{x_2}$.

19. Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης

$$x^2 + x + 3 = 0,$$

(α) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = x_1^4x_2^2 + x_1^2x_2^4$

(β) να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τις $y_1 = \frac{1+x_1}{x_2}$ και $y_2 = \frac{1+x_2}{x_1}$.



20. Αν γνωρίζουμε ότι οι ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ (όπου $\lambda \in \mathbb{R}$) ικανοποιούν τη σχέση με $x_1 = 3x_2$, να υπολογίσετε την τιμή του λ .

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \mu x - 5$, $\mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{3}{4}$.

(β) Αν $\mu = 3$, να μετατρέψετε σε γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων το τριώνυμο $2x^2 + \mu x - 5$.

22. Να επιλύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$$(α) \begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases} \quad (β) \begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 - y^2 = -4 \end{cases} \quad (γ) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$$

$$(δ) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 2x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \quad (ε) \begin{cases} x - y = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad (στ) \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$

23. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης
 $(x^2 - x + 2) \cdot (x^2 + 3) \cdot (4 - x^2)$

24. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης
 $(x^3 - 5x^2 + 4x) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)$

25. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης
 $(x^2 - 4) \cdot (-x^2 + 2x + 8) \cdot (1 - 2x)^2$

26. Να επιλύσετε τις παρακάτω ανισώσεις (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών):

$$(α) (x - 1) \cdot (x - 2) \geq 0 \quad (β) x^2 - 7x + 12 \leq 0 \quad (γ) -x^2 + 3x - 3 > 1$$

27. Να επιλύσετε τις παρακάτω ανισώσεις (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών):

$$(α) \frac{x - 1}{x - 2} \geq 0 \quad (β) \frac{2x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} < 0 \quad (γ) \frac{x - 3}{(x - 1) \cdot (x + 4)} > 0$$

$$(δ) \frac{(x+3) \cdot (2x-1)}{x-5} \leq 0 \quad (ε) \frac{x^2+2x-3}{3x+2} \leq 0 \quad (στ) \frac{(x^2-5x)(x^2+6x+9)}{x^2-16} \geq 0$$

28. Να επιλύσετε την πιο κάτω ανίσωση:

$$\frac{(x^2+x-6)(x^2-4)}{5-x} \leq 0.$$

29. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{(x-3)(1-x)}} \quad (β) g(x) = \sqrt{(x^2-16)(x^2+6x+5)}$$

$$(γ) h(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+5}} \quad (δ) i(x) = \sqrt{x^2(x^2-2x-3)(x^2+4)}$$