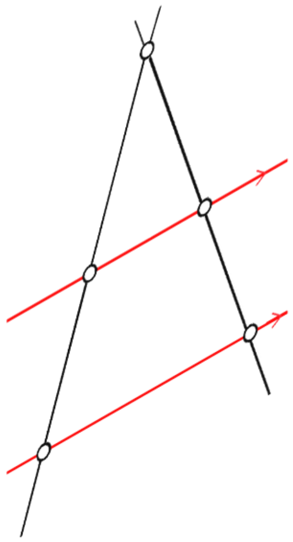
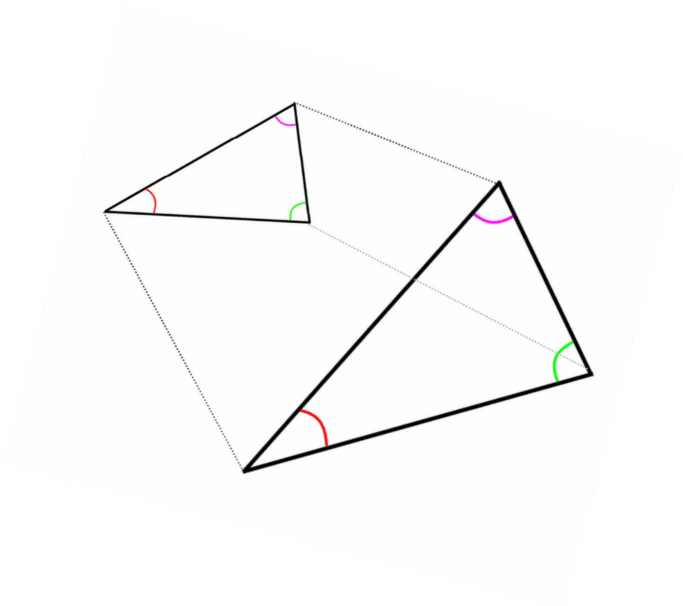
6

Το θεώρημα του Θαλή





6.0 Λόγος/Αναλογία

Υπενθυμίσεις

Λόγος λ δύο μεγεθών α προς β ονομάζεται το πηλίκο που προκύπτει, όταν το μέτρο του πρώτου μεγέθους διαιρεθεί με το μέτρο του δεύτερου μεγέθους, δηλαδή:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

Αναλογία είναι η ισότητα δύο λόγων $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\mu = \frac{\gamma}{\delta}$ και γράφουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

για να δηλώσουμε την αναλογία.

Ιδιότητες των αναλογιών

(α) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

(β) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

(γ) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$

(δ) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$

(ε) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \frac{\gamma+\varepsilon}{\delta+\zeta} = \frac{\alpha+\varepsilon}{\beta+\zeta}$

Ένα αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιηθεί αρκετά στις ασκήσεις:

Θεώρημα (Γωνία μεταξύ καθέτων)

Αν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι αντίστοιχα κάθετες στις ευθείες η_1, η_2, τότε:

$$\angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \angle(\eta_1, \eta_2).$$

Δηλαδή:

Η γωνία που σχηματίζουν δύο ευθείες είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζουν οι αντίστοιχες κάθετές τους.

Πιο αναλυτικά:

Αν $\varepsilon_1 \perp \eta_1$ και $\varepsilon_2 \perp \eta_2$, τότε $\angle(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \angle(\eta_1, \eta_2)$.

Αιτιολόγηση:
Κάθε γωνία ισούται με τη συμπληρωματική της συμπληρωματικής της.

Πώς γράφεται μέσα σε απόδειξη:

*«Επειδή οι πλευρές της γωνίας $H\hat{B}E$ είναι αντίστοιχα κάθετες στις πλευρές της γωνίας $E\hat{Z}\Delta$, οι δύο γωνίες είναι ίσες (**γωνίες που σχηματίζονται από ζεύγη καθέτων**).»*

6.1 Θεώρημα του Θαλή

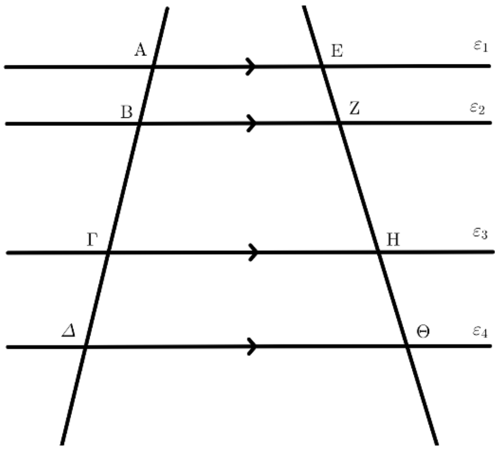
Το **Θεώρημα του Θαλή (Θεώρημα τεμνουσών)** διατυπώνει ότι όταν δύο ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες (τέμνουσες), τότε τα αντίστοιχα τμήματα που δημιουργούνται πάνω στις τέμνουσες είναι **ανάλογα**. Ουσιαστικά εκφράζει μια θεμελιώδη ιδιότητα αναλογίας στο επίπεδο:

η παραλληλία διατηρεί τους λόγους μηκών.

Γεωμετρικά, το Θεώρημα θεμελιώνει τη σχέση μεταξύ παραλληλίας και ομοιότητας σχημάτων και αποτελεί τη βάση για την έννοια της κλίμακας και της γραμμικής μεταβολής στη στοιχειώδη Γεωμετρία.

Θεώρημα (Θαλή)

Αν τρείς ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα αποκτόμενα τμήματα πάνω στη μια ευθεία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που αποκόπτονται από την άλλη ευθεία.



$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

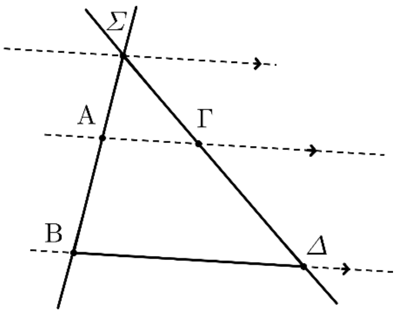
Τα αντίστοιχα τμήματα που δημιουργούνται στις δύο πλευρές λέγονται **ομόλογα**.

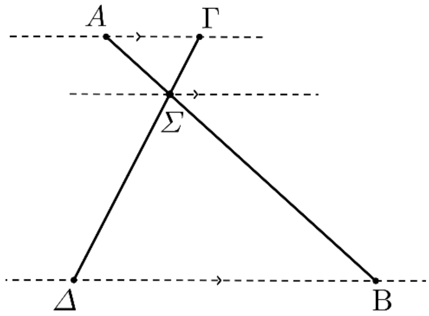
Δηλαδή, στο πιο πάνω σχήμα, ομόλογα τμήματα είναι τα AB και EZ, τα $B\Gamma$ και ZH κ.ο.κ..

Μια συχνή **παρανόηση** είναι ότι αρκεί να υπάρχουν τρεις παράλληλες ευθείες ώστε τα τμήματα που σχηματίζονται σε δύο άλλες ευθείες να είναι ανάλογα.

Το Θεώρημα του Θαλή προϋποθέτει ότι οι παράλληλες **τέμνουν τις ίδιες δύο ευθείες** (τις ίδιες τέμνουσες). Δεν αρκεί απλώς να ψάχνουμε για ευθύγραμμα τμήματα **ανάμεσα** σε παράλληλες ευθείες, αλλά πρέπει τα τμήματα που συγκρίνουμε να βρίσκονται **πάνω στις ίδιες δύο τέμνουσες ευθείες** και να αντιστοιχούν σε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ των παραλλήλων, ώστε να προκύπτει κοινή γεωμετρική δομή (δύο τέμνουσες που τέμνονται από τις ίδιες παράλληλες).

Αυτό φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα:





$$\boxed{\frac{ΣΑ}{ΑΒ} = \frac{ΣΓ}{ΓΔ} = \frac{ΣΒ}{ΣΔ}}$$

Στο αριστερό σχήμα, οι (τρεις) παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο ευθείες που έχουν κοινή κορυφή, άρα δημιουργούνται αντίστοιχα τμήματα πάνω στις ίδιες τέμνουσες και ισχύει η αναλογία.

Στο δεξί σχήμα, παρότι υπάρχουν παράλληλες, τα σημεία δεν αντιστοιχούν πάνω στις ίδιες δύο τέμνουσες με τον ίδιο τρόπο. Η γεωμετρική διάταξη δεν εγγυάται την αναλογία απλώς από την παραλληλία. Και εδώ ισχύει η αναλογία.

Με άλλα λόγια, το θεώρημα είναι θεώρημα διάταξης και αντιστοιχίας, όχι απλής οπτικής συμμετρίας.

Πόρισμα *(Θεώρημα της παράλληλης προς βάση τριγώνου)*

Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν $Δ$ μέσο της $(ΑΒ)$ και $(ΔΕ) \parallel (ΒΓ)$ τότε το $Ε$ είναι το μέσον της $(ΑΓ)$.

Απόδειξη

Φέρουμε ευθεία $(ε)$ η οποία περνά από το σημείο $Α$και είναι παράλληλη προς την πλευρά $(ΒΓ)$. Τότε, $(ε) \parallel (ΒΓ) \parallel (ΔΕ)$ και αφού $ΑΔ = ΔΒ$, από το Θεώρημα του Θαλή, $ΑΕ = ΕΓ$, δηλ. το $Ε$ είναι το μέσον της $(ΑΓ)$.

Σημείωση - Ισχύει και το **αντίστροφο** του πιο πάνω Πορίσματος (δες δραστηριότητα εμπλουτισμού).

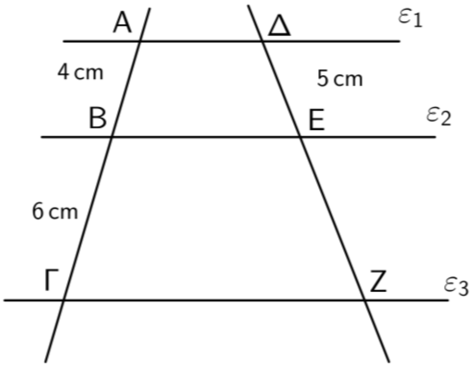
Θεώρημα (Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή)

Αν δύο ευθείες (λ) και (μ) τέμνονται από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία A, B και Δ, E αντίστοιχα και Γ, Z είναι σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΔE αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE}$, τότε η ευθεία (ε_3) στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ και Z είναι παράλληλη προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Παραδείγματα

1. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, ΑΒ = 4 cm, ΒΓ=6 cm και ΔΕ=5 cm. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και άρα, από το Θεώρημα του Θαλή:

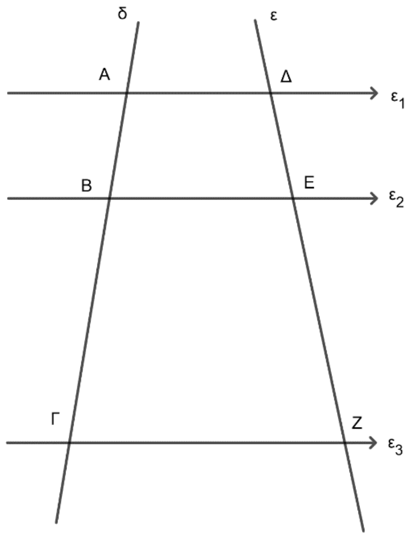
$$\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΔΕ}} = \frac{\text{ΒΓ}}{\text{ΕΖ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΔΖ}} \Rightarrow \boxed{\frac{4}{5} = \frac{6}{\text{ΕΖ}}} = \frac{10}{\text{ΔΖ}}$$

Επιλέγω τον κατάλληλο λόγο:

$$\frac{4}{5} = \frac{6}{\text{ΕΖ}} \Rightarrow 4(\text{ΕΖ}) = 5 \cdot 6$$

$$\Rightarrow 4(\text{ΕΖ}) = 30 \Rightarrow (\text{ΕΖ}) = \frac{30}{4} \Rightarrow \textbf{(ΕΖ)=7,5 cm}$$

2. Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και οι ευθείες δ και ζ τέμνουν τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z. Αν $AB = 5\,cm$, $B\Gamma = 15\,cm$ και $EZ = 12\,cm$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

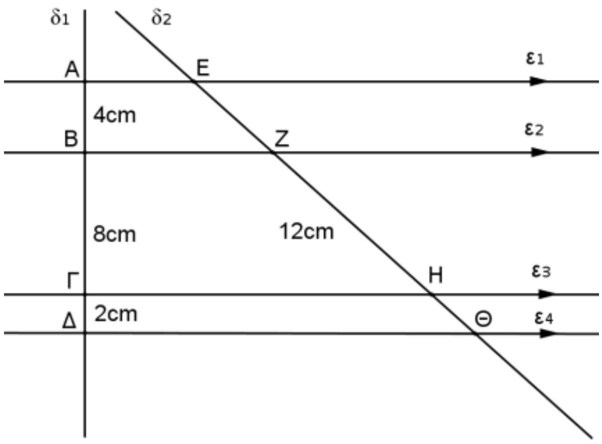
Αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \Leftrightarrow \frac{5}{\Delta E} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow 15(\Delta E) = 5 \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow 15 \cdot (\Delta E) = 60 \Leftrightarrow \frac{15 \cdot (\Delta E)}{15} = \frac{60}{15} \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\Delta E}) = \mathbf{4\ cm}}$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$ και $(AB) = 4\ cm, (B\Gamma) = 8\ cm,$ $(\Gamma\Delta) = 2\ cm, (ZH) = 12\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος των (EZ) και $(Z\Theta)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$

$\Rightarrow \frac{4}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(EZ) = 6\ cm}$

$(\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$
$\xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{B\Delta}{Z\Theta}$
$\Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{2}{H\Theta} = \frac{10}{Z\Theta}$
και άρα
$\frac{8}{12} = \frac{10}{Z\Theta} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{Z\Theta} \Rightarrow \boldsymbol{(Z\Theta) = 15\ cm}$

Διαφορετικά,

$$\xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{B\Delta}{Z\Theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{H\Theta} = \frac{10}{Z\Theta}$$

απ’ όπου εξάγονται απ’ ευθείας τα μήκη των EZ και $Z\Theta$

▷ Δραστηριότητα εμπλουτισμού

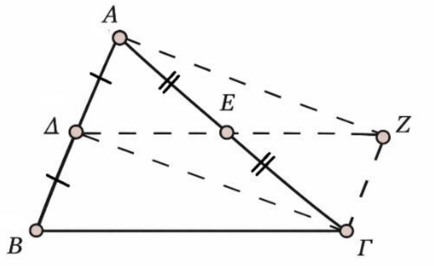
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισούται με το μέσον αυτής.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Δ$ μέσον της $(ΑΒ)$ και $Ε$ μέσον της $(ΑΓ)$.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$(ΔΕ) \parallel = \frac{(ΒΓ)}{2}.$$



Προεκτείνουμε την πλευρά $(ΔΕ)$ κατα τμήμα $(ΕΖ) = (ΔΕ)$.

Τότε, το τετράπλευρο $ΑΔΓΖ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή

$$(ΑΔ) \parallel = \frac{(ΓΖ)}{2}$$

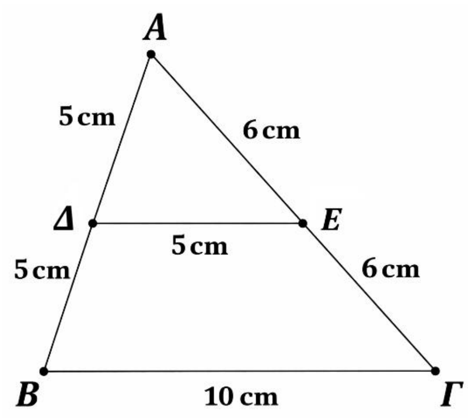
και έτσι (αφού $(ΑΔ) = (ΒΔ)$),

$$(ΔΒ) \parallel = (ΓΖ)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι το τετράπλευρο $ΒΔΖΓ$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $(ΔΖ) \parallel = (ΒΓ) \Rightarrow (ΔΕ) \parallel (ΒΓ)$, δηλαδή $(ΔΕ) \parallel = \frac{(ΒΓ)}{2}$.

Παράδειγμα

Στο πιο κάτω σχήμα είναι είναι $(ΑΔ) = (ΔΒ) = 5\ cm, (ΑΕ) = (ΕΓ) = 6\ cm$ και $(ΒΓ) = 10\ \ cm.$ Να υπολογίσετε το μήκος της $(ΔΕ)$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αφού $Δ$ μέσον της $(ΑΒ)$ και $Ε$ μέσον της $(ΑΓ)$, τότε $(ΔΕ) \parallel (ΒΓ)$ και

$$\boldsymbol{(ΔΕ) = \frac{(ΒΓ)}{2} = 5\ \ cm}$$

▹ Δραστηριότητα εμπλουτισμού

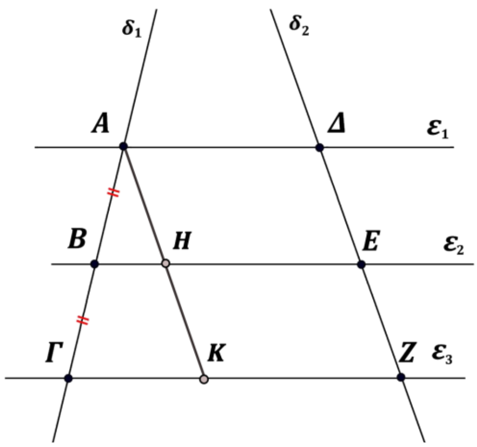
Θεώρημα του Θαλή (ειδική περίπτωση)

Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα πάνω στην άλλη.

Απόδειξη

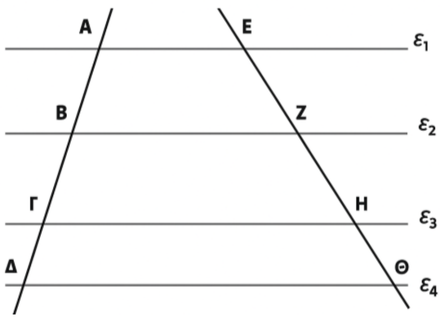
Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) οι οποίες τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 στα σημεία A, B, Γ και Δ, E, Z αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $(\Delta E) = (EZ)$. Προς τούτο, φέρνουμε ευθεία $(AK) \parallel (\Delta Z)$. Τότε, τα τετράπλευρα $A\Delta EH$ και $EZKH$ είναι παραλληλόγραμμα, $(AH) \parallel= (\Delta E)$ και $(HK) \parallel= (EZ)$.

Τότε $(\Delta E) = (EZ)$.



Φύλλο εργασίας

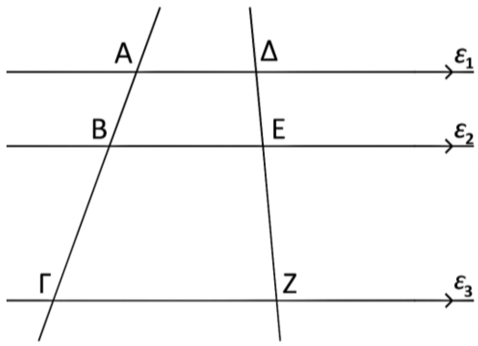
1. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$. Να συμπληρώσετε τις αναλογίες:



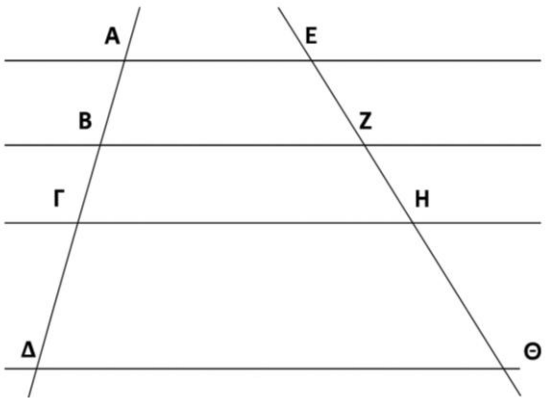
(α) $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EZ}} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{\ldots}$ **(β)** $\dfrac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{A\Gamma}} = \dfrac{\ldots}{\mathrm{EH}}$

(γ) $\dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\ldots} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{\ldots}$ **(δ)** $\dfrac{\Gamma\Delta}{\mathrm{H\Theta}} = \dfrac{\ldots}{\ldots}$

2. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$. Αν ΑΒ=4 cm, ΑΓ=12 cm και ΔΕ=3 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΔΖ και ΕΖ.

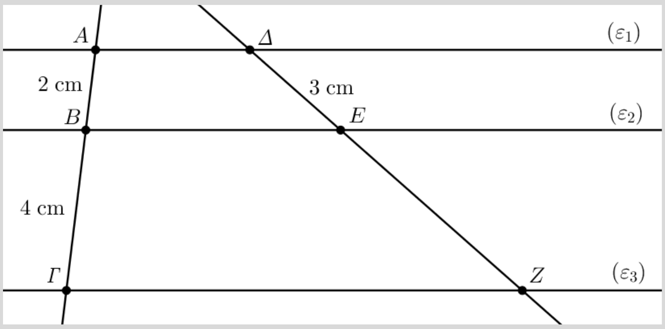


3. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $\mathrm{AE} \parallel \mathrm{BZ} \parallel \Gamma\mathrm{H} \parallel \Delta\Theta$. Αν ΑΒ=4 cm, ΗΘ=15 cm και ΒΔ=18 cm και ΕΖ=6 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΓΔ, ΖΗ και ΖΘ.



Δραστηριότητες σελ. 57-59 (Θεώρημα Θαλή)

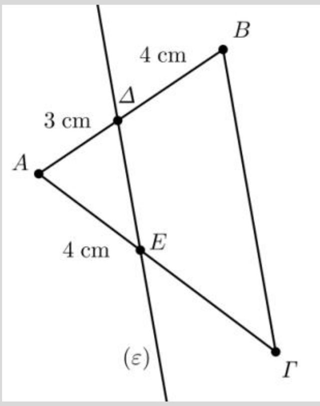
1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3)$, $AB = 2$ cm, $B\Gamma = 4$ cm και $\Delta E = 3\ cm$. Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΕΖ.



Απάντηση

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{EZ} \Rightarrow (EZ) = 6 \text{ cm}$$

2. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν $A\Delta$ = 3 cm, AE = 4 cm και ΔB = 4 cm, τότε να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $E\Gamma$.

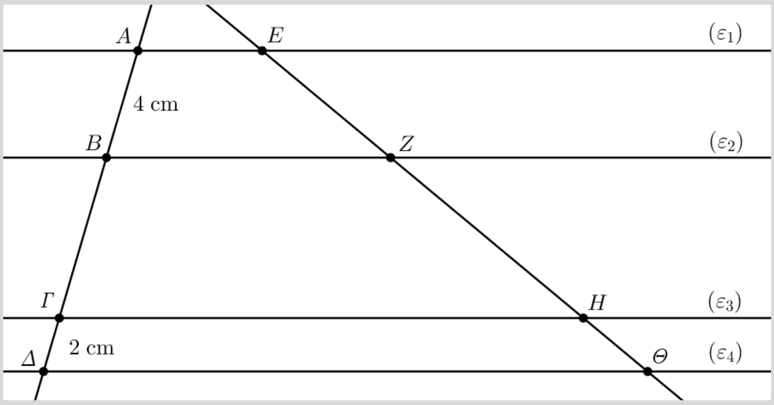


Απάντηση

$$(\varepsilon) \parallel (B\Gamma) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AE}{A\Delta} = \frac{E\Gamma}{\Delta B} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{E\Gamma}{4} \Rightarrow \frac{16}{12} = \frac{3(E\Gamma)}{12}$$

$$\Rightarrow (E\Gamma) = \frac{16}{3} \text{ cm} \approx 5{,}33 \text{ cm}$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$, $AB = 4$ cm, $\Gamma\Delta = 2$ cm, $A\Delta = 12$ cm, $E\Theta = 18$ cm. Να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων EZ, $H\Theta$ και EH.



Απάντηση

$$(A\Delta) = 12 \text{ cm} \Rightarrow (AB) + (B\Gamma) + (\Gamma\Delta) = 12$$
$$\Rightarrow 4 + (B\Gamma) + 2 = 12 \Rightarrow (B\Gamma) = 6 \text{ cm}$$

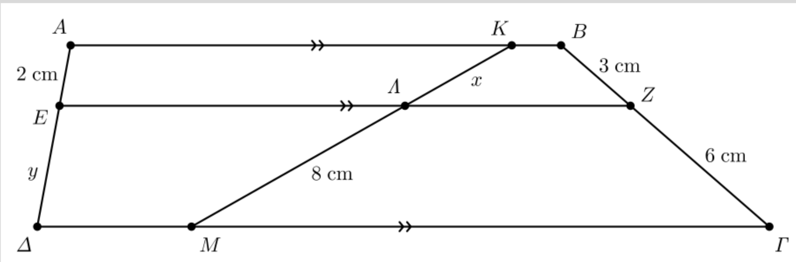
Με χρήση μόνο αναλογιών:

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_4) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Delta}{E\Theta} \Rightarrow \frac{4}{EZ} = \frac{12}{18} \Rightarrow \frac{4}{EZ} = \frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{(EZ) = 6 \text{ cm}}}$$

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{A\Delta}{E\Theta} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{2}{H\Theta} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{H\Theta} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{(H\Theta) = 3 \text{ cm}}}$$

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Gamma}{EH} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{10}{EH} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{EH} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{(EH) = 15 \text{ cm}}}$$

4. Να υπολογίσετε τα μήκη xκαι yστο πιο κάτω σχήμα.



Απάντηση

$$(AB) \parallel (EZ) \parallel (\Delta\Gamma) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{AE}{E\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$$

Έτσι,

$$\frac{AE}{E\Delta} = \frac{BZ}{Z\Gamma} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{3}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{y = 4 \text{ cm}}}$$

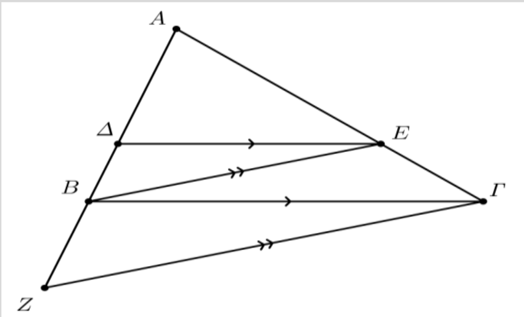
$$(AK) \parallel (E\Lambda) \parallel (\Delta M) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{AE}{E\Delta} = \frac{K\Lambda}{\Lambda M} = \frac{A\Delta}{KM}$$

Έτσι,

$$\frac{AE}{E\Delta} = \frac{K\Lambda}{\Lambda M} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 4\ \mathbf{cm}}}$$

5. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Η ευθεία ΔE είναι παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την BE, η οποία τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Z. Να δείξετε ότι:

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AB}{AZ}$$



Απάντηση

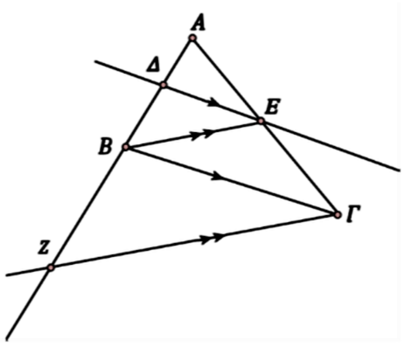
$$(BE) \parallel (Z\Gamma) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{AB}{AZ} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

και

$$(\Delta E) \parallel (B\Gamma) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Από τις δύο πιο πάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AZ}}$$



6. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB φέρουμε $\Delta E \parallel B\Gamma$, όπου E σημείο της $A\Gamma$. Από το σημείο E φέρουμε $EZ \parallel AB$, όπου Z σημείο της $B\Gamma$. Από το σημείο Z φέρουμε τη $ZH \parallel \Gamma A$, όπου H σημείο της AB. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$$

Απάντηση

$$(\Delta E) \parallel (B\Gamma) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{B\Gamma},$$

$$(EZ) \parallel (AB) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{EA}{EZ} = \frac{ZB}{\Gamma Z}$$

$$(ZH) \parallel (\Gamma A) \xRightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{BH}{HA} = \frac{BZ}{\Gamma Z}$$

Από τις πιο πάνω σχέσεις έπεται ότι:

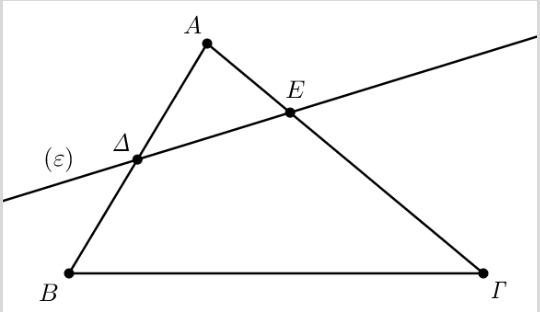
$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{B\Gamma} = \frac{ZB}{\Gamma Z} = \frac{BH}{HA} \Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{HB}{HA}$$

7. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB. Από το Δ διέρχεται μία τυχαία ευθεία (ε), που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό σημείο της E.

Η ευθεία (ε) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

(α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E, ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ώστε το τραπέζιο του πιο πάνω ερωτήματος να είναι ισοσκελές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



<u>Απάντηση</u>

(α) Για να είναι το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ τραπέζιο, πρέπει **ένα ζεύγος απέναντι πλευρών να είναι παράλληλο**.

Τα ζεύγη απέναντι πλευρών στο $B\Delta E\Gamma$ είναι τα:

- ΒΔ και ΕΓ
- ΔΕ και ΒΓ

Παρατηρούμε ότι:

- Το ΒΔ είναι τμήμα της ΑΒ.
- Το ΕΓ είναι τμήμα της ΑΓ.

Γενικά, τα ζεύγη αυτά δεν είναι παράλληλα. Άρα εξετάζουμε το άλλο ζεύγος, ΔΕ και ΒΓ.

Αν ΔΕ ∥ ΒΓ, τότε το $B\Delta E\Gamma$ έχει μία μόνο παράλληλη πλευρά ⇒ είναι τραπέζιο. Πότε συμβαίνει αυτό;

Εφόσον το Δ είναι μέσο του AB, αν η ευθεία από το Δ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$, τότε από το *θεώρημα της παράλληλης προς βάση τριγώνου (το αντίστροφό του)*, το E θα είναι το μέσο του $A\Gamma$.

Άρα, το $B\Delta E\Gamma$ είναι τραπέζιο όταν το E είναι το μέσο της $A\Gamma$, δηλαδή όταν $\Delta E \parallel B\Gamma$.

(β) Για να είναι ισοσκελές το τραπέζιο $B\Delta E\Gamma$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ πρέπει να είναι είτε ισοσκελές, αφού αν $AB = A\Gamma$, τότε από το προηγούμενο αποτέλεσμα, $\Delta B = E\Gamma$ (μέσα ίσων πλευρών).

Πιο αναλυτικά:
Από το (α) έχουμε ήδη ότι για να είναι το $B\Delta E\Gamma$ τραπέζιο πρέπει $\Delta E \parallel B\Gamma$ και E μέσο του $A\Gamma$.

Για να είναι το τραπέζιο ισοσκελές, πρέπει $B\Delta = E\Gamma$.

Επειδή $B\Delta = \frac{AB}{2}$ και $E\Gamma = \frac{A\Gamma}{2}$,

$$B\Delta = E\Gamma \iff AB = A\Gamma$$

8. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Από σημείο M της διαμέσου $A\Delta$ φέρουμε παράλληλες προς τις AB και $A\Gamma$, που τέμνουν τη $B\Gamma$ στα σημεία E και Z, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{\Delta E}{\Delta B} = \frac{\Delta Z}{\Delta \Gamma}$

(β) η $M\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου MEZ.

<u>Απάντηση</u>

(α) Στο τρίγωνο ΔAB είναι $(ME) \parallel (AB)$ και άρα

$$\frac{\Delta E}{\Delta B} = \frac{\Delta M}{\Delta A}$$

Στο τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι $(MZ) \parallel (\Gamma A)$ και άρα

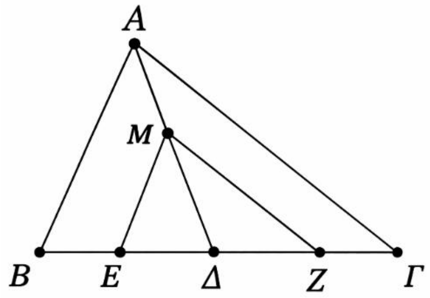
$$\frac{\Delta Z}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta M}{\Delta A}$$

Από τις πιο πάνω προκύπτει:

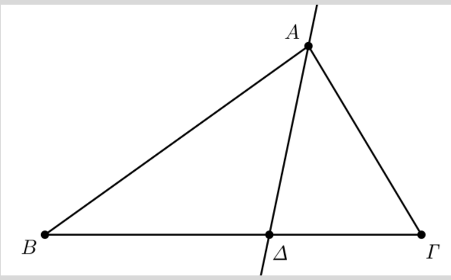
$$\frac{\Delta E}{\Delta B} = \frac{\Delta Z}{\Delta \Gamma} \quad (*)$$

(β) Αφού η $(A\Delta)$ είναι διάμεσος, έπεται ότι $\Delta B = \Delta \Gamma$ και αρα η σχέση $(*)$ δίνει $\Delta E = \Delta Z$.

Έτσι, η $M\Delta$ είναι διάμεσος του τριγώνου MEZ.



9. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου χωρίζει την απέναντι πλευρά σε μέρη ανάλογα προς τις προσκείμενες σε αυτή πλευρές.
(Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από τη μια κορυφή του τριγώνου προς τη διχοτόμο.)



Σημείωση

Το πιο πάνω ονομάζεται «Θεώρημα Εσωτερικής Διχοτόμου» και ισχύει και το αντίστροφό του.

<u>Απάντηση</u>

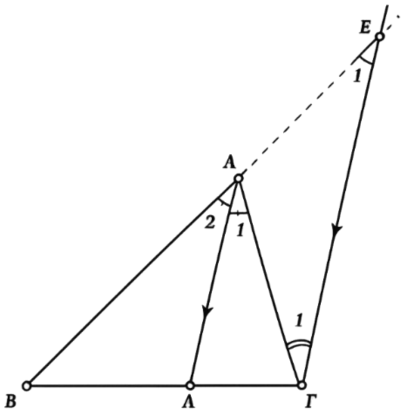
Από την κορυφή $Γ$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $ΑΔ$ η οποία τέμνει την προέκταση της $ΒΑ$ στο σημείο $Ε$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο $ΓΕΒ$, έχουμε:

$$\frac{ΔΓ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $ΑΓ = ΑΕ$. Πράγματι:

$$\begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{Γ_1} \ (εντός\ εναλλάξ\ γωνίες) \\ \widehat{A_2} = \widehat{E} \ (εντός, εκτός\ και\ επι\ τα\ αυτά\ γωνίες) \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \quad (ΑΔ\ διχοτόμος) \end{cases}$$

$\Rightarrow \widehat{Γ_1} = \widehat{E} \Rightarrow$ το τρίγωνο $ΑΕΓ$ είναι ισοσκελές και αρα $ΑΓ = ΑΕ$.



Δείτε και το **Θεώρημα Εξωτερικής Διχοτόμου:**

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, του οποίου οι αποστάσεις από τα άκρα της πλευράς αυτής είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου. Δηλ. αν AE είναι η διχοτόμος της $\widehat{A_{\varepsilon\xi.}}$, τότε

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, και η εξωτερική διχοτόμος του AE. Από το σημείο B φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά AEη οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Z. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓAE, έχουμε:

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AZ}{A\Gamma}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $AZ=AB$.

Πράγματι:

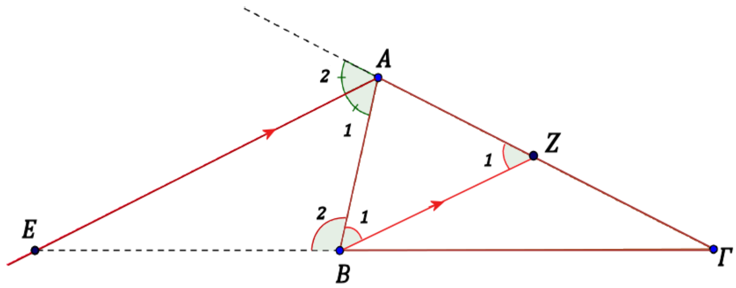
$$\begin{cases} \widehat{A_1}=\widehat{B_1}\ (\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma) \\ \widehat{A_2}=\widehat{Z_1}\ (\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma, \varepsilon\kappa\tau\acute{o}\varsigma\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon\pi\iota\ \tau\alpha\ \alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma) \Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{Z_1} \\ \widehat{A_1}=\widehat{A_2}\ \ (AE\ \ \varepsilon\xi\omega\tau\varepsilon\rho\iota\kappa\acute{\eta}\ \delta\iota\chi o\tau\acute{o}\mu o\varsigma) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{το τρίγωνο } ABZ \text{ είναι ισοσκελές}$$

και αρα $AZ=AB$.

Σημείωση: Ισχύει και το αντίστροφο του πιο πάνω Θεωρήματος: αν το E είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς $B\Gamma$ και ισχύει ότι

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AZ}{A\Gamma}$$

τότε η AE είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$.

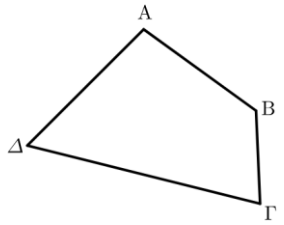


6.2 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα

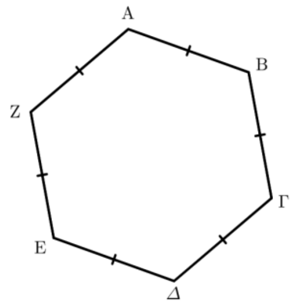
Υπενθύμιση:

Πολύγωνο στη γεωμετρία είναι κάθε απλή κλειστή τεθλασμένη γραμμή. Ένα πολύγωνο με ν πλευρές λέγεται ειδικότερα ν-γωνο ή ν -πλευρο. Προφανώς ισχύει $\nu \geq 3$.

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει είτε όλες τις πλευρές του ίσες είτε όλες τις γωνίες του ίσες.



Πολύγωνο



Κανονικό πολύγωνο

Παρατήρηση: δεν ισχύει ότι ένα πολύγωνο είναι κανονικό όταν έχει (κατ' ανάγκην) όλες του τις πλευρές ή όλες του τους γωνίες ίσες (για παράδειγμα το ορθογώνιο).
Ιδιαίτερα, αν ένα **τρίγωνο** έχει όλες του τις πλευρές ίσες, τότε θα έχει και όλες του τις γωνίες ίσες αλλά και αντίστροφα: αν ένα τρίγωνο έχει όλες του τις γωνίες ίσες, τότε θα έχει και όλες του τις πλευρές ίσες.

Ορισμός (Ομόλογες πλευρές)

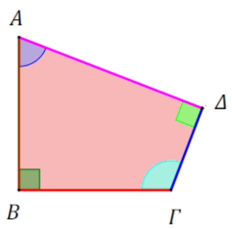
Ομόλογες λέγονται οι πλευρές δύο πολυγώνων που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες.

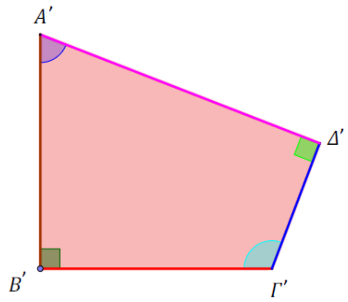
Ορισμός (Όμοια πολύγωνα)

Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας με το σύμβολο $\approx$.

Για παράδειγμα, αν $AB\Gamma\Delta \approx A'B'\Gamma'\Delta'$, τότε

▨ $\hat{A} = \widehat{A'}$, $\quad \hat{B} = \widehat{B'}$, $\quad \hat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, $\quad \hat{\Delta} = \widehat{\Delta'}$ και $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{A\Delta}{A'\Delta'}$ ▨





Ορισμός (Λόγος ομοιότητας)

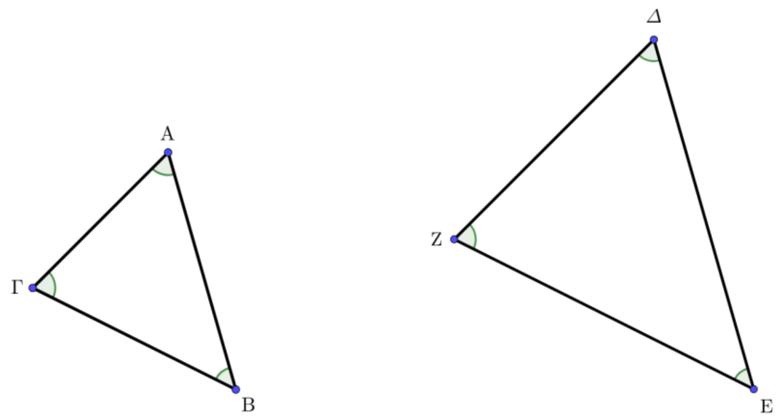
Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές όμοιων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας** και συμβολίζεται με λ.

📌 **Σημείωση:**

Σημειώνουμε τα όμοια πολύγωνα με τέτοιο τρόπο, ώστε οι κορυφές των ίσων γωνιών στα δύο πολύγωνα να είναι οι αντίστοιχες. *Αυτό μας βοηθά στο να γράψουμε πιο εύκολα και τις αναλογίες των πλευρών τους.*

Για παράδειγμα, $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ αν και μόνο αν:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, \qquad \hat{B} = \hat{E}, \qquad \hat{\Gamma} = \hat{Z} \quad \textbf{και} \quad \frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \lambda$$



Είναι σαφές ότι δύο πολύγωνα είναι όμοια αν και μόνο αν το ένα είναι **σμίκρυνση/μεγέθυνση** του άλλου και το πόσες φορές είναι, αποτελεί το λόγο ομοιότητάς τους.

📌 **Σημείωση:**

Οι διάμεσοι, διχοτόμοι και τα ύψη όμοιων τριγώνων, τα οποία άγονται από ομόλογες κορυφές λέγονται **ομόλογες διάμεσοι, ομόλογες διχοτόμοι** και **ομόλογα ύψη**, αντίστοιχα.

Πρόταση

(α) Ο λόγος των **περιμέτρων** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους, λ.

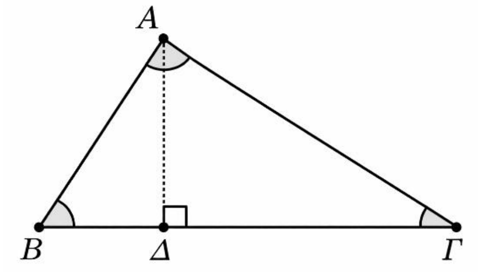
(β) Ο λόγος των **εμβαδών** δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους, λ.

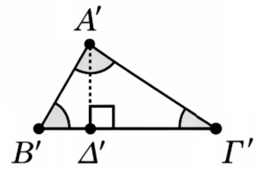
Απόδειξη

Θα γίνει για την περίπτωση τριγώνων (ν=3), αφού η γενική περίπτωση γίνεται ανάλογα.

Θεωρούμε δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma \approx A'B'\Gamma'$. Τότε:

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$





(α) 1ος τρόπος (τεχνικός)

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} \Longrightarrow (AB) = \lambda(A'B')$$

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Longrightarrow (B\Gamma) = \lambda(B'\Gamma')$$

$$\lambda = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \Longrightarrow (A\Gamma) = \lambda(A'\Gamma')$$

Άρα:

$$\text{Περίμετρος } (AB\Gamma) = \Pi_{AB\Gamma} = (AB) + (B\Gamma) + (A\Gamma) = \lambda(A'B') + \lambda(B'\Gamma') + \lambda(A'\Gamma')$$

$$= \lambda \cdot [(A'B') + (B'\Gamma') + (A'\Gamma')]$$

$$= \lambda \cdot \text{ Περίμετρος } (A'B'\Gamma') = \lambda \cdot \Pi_{A'B'\Gamma'}$$

Άρα:

$$\frac{\Pi_{AB\Gamma}}{\Pi_{A'B'\Gamma'}} = \lambda$$

2ος τρόπος (με τις ιδιότητες των αναλογιών)

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{(AB) + (B\Gamma) + (A\Gamma)}{(A'B') + (B'\Gamma') + (A'\Gamma')} = \frac{\Pi_{AB\Gamma}}{\Pi_{A'B'\Gamma'}}$$

(β) Υπολογίζω το εμβαδόν των τριγώνων:

$$E_{AB\Gamma} = \frac{(\text{βάση})\cdot(\text{ύψος})}{2} = \frac{(B\Gamma)\cdot(A\Delta)}{2} \Longrightarrow 2E_{AB\Gamma} = (B\Gamma)\cdot(A\Delta)$$

$$E_{A'B'\Gamma'} = \frac{(\text{βάση})\cdot(\text{ύψος})}{2} = \frac{(B'\Gamma')\cdot(A'\Delta')}{2} \Longrightarrow 2E_{A'B'\Gamma'} = (B'\Gamma')\cdot(A'\Delta')$$

Αντικαθιστώ στην πρώτη $(B\Gamma) = \lambda(B'\Gamma')$:

$$2E_{AB\Gamma} = \lambda(B'\Gamma')\cdot(A\Delta)$$

Διαιρώ κατά μέλη τις 2 πιο πάνω:

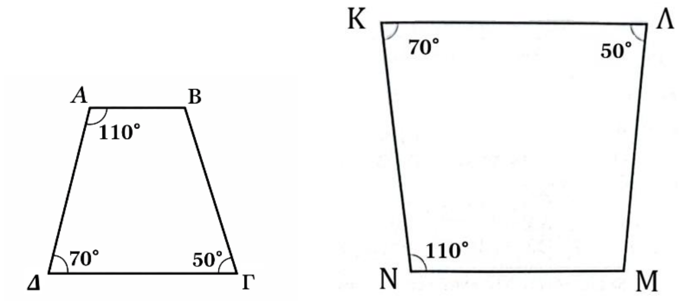
$$\frac{2E_{AB\Gamma}}{2E_{A'B'\Gamma'}} = \frac{\lambda(B'\Gamma')\cdot(A\Delta)}{(B'\Gamma')\cdot(A'\Delta')} \Longrightarrow \frac{E_{AB\Gamma}}{E_{A'B'\Gamma'}} = \lambda\frac{(A\Delta)}{(A'\Delta')} = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2,$$

αφού $\frac{(A\Delta)}{(A'\Delta')} = \lambda$ (τα ομόλογα ύψη είναι ανάλογα).

📌 **Σημείωση:**
Δύο **κανονικά** πολύγωνα που έχουν το **ίδιο** πλήθος πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.

Παραδείγματα

1. Τα τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $ΚΛΜΝ$ είναι όμοια. Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών τους.

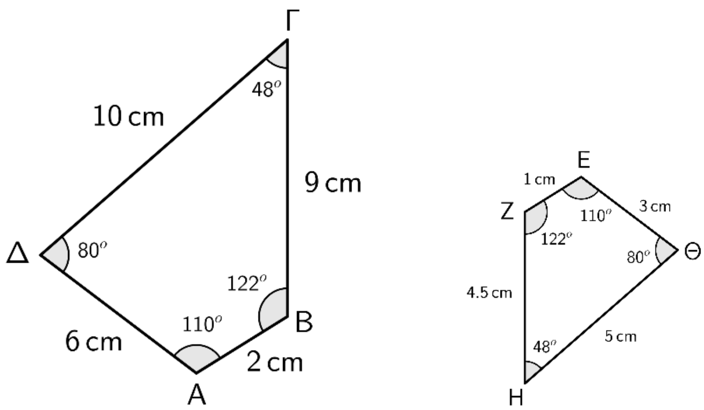


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η γωνία $Α$ είναι ομόλογη της γωνίας $Ν$, η γωνία $Δ$ είναι ομόλογη της γωνίας $Κ$, γωνία $Γ$ είναι ομόλογη της γωνίας $Λ$ και η γωνία $Β$ είναι ομόλογη της γωνίας $Μ$. Συνεπώς, η πλευρά $ΑΒ$ είναι ομόλογη της πλευράς $ΝΜ$, η πλευρά $ΒΓ$ είναι ομόλογη της πλευράς $ΜΛ$, η πλευρά $ΓΔ$ είναι ομόλογη της πλευράς $ΛΚ$ και η πλευρά $ΔΑ$ είναι ομόλογη της πλευράς $ΚΝ$ και άρα:

$$\frac{ΑΒ}{ΝΜ}=\frac{ΒΓ}{ΜΛ}=\frac{ΓΔ}{ΛΚ}=\frac{ΔΑ}{ΚΝ}$$

2. Δείξτε ότι τα πιο κάτω τετράπλευρα είναι όμοια. Να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\hat{Α}=\hat{Ε}=110^o,\ \hat{Β}=\hat{Ζ}=122^o,\ \hat{Γ}=\hat{Η}=48^o,\ \hat{Δ}=\hat{Θ}=80^o$$

και

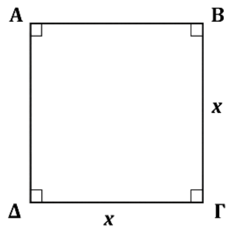
$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{2}{1}=2,\ \frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{9}{4.5}=2,\ \frac{ΓΔ}{ΗΘ}=\frac{10}{5}=2,\ \frac{ΔΑ}{ΘΕ}=\frac{6}{3}=2$$

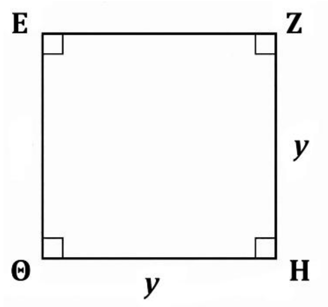
και άρα οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Συνεπώς, $ΑΒΓΔ \approx ΕΖΗΘ$ και $\lambda=2$.

3. Αποδείξτε ότι κάθε δύο τετράγωνα είναι όμοια.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε δύο τετράγωνα, το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά x και το τετράγωνο $ΕΖΗΘ$ με πλευρά y.





1 Ισότητα γωνιών

Κάθε τετράγωνο έχει τέσσερις ορθές γωνίες. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90°$$

$$\hat{E} = \hat{Z} = \hat{H} = \hat{\Theta} = 90°$$

Επομένως, οι αντίστοιχες γωνίες των δύο τετραγώνων είναι ίσες.

2 Αναλογία πλευρών

Στο πρώτο τετράγωνο: $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = A\Delta = x$

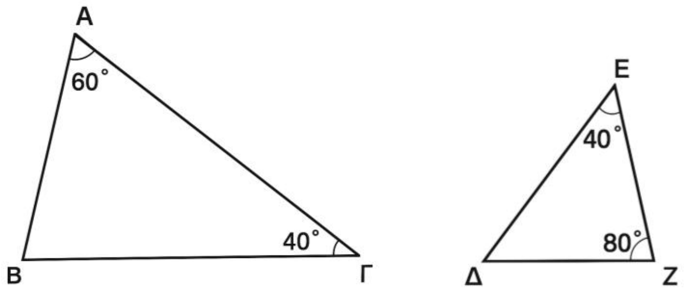
Στο δεύτερο τετράγωνο: $EZ = ZH = H\Theta = \Theta E = y$

Άρα για κάθε ζεύγος αντίστοιχων πλευρών ισχύει:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{A\Delta}{\Theta E} = \frac{x}{y}$$

$\Longrightarrow$ Όλες οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες $\Longrightarrow$ $AB\Gamma\Delta \approx EZH\Theta$.

4. Τα πιο κάτω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΖΕ$ είναι όμοια. Να προσδιορίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α (60°) ↔ Δ (60°) Γ (40°) ↔ Ε (40°) Β (80°) ↔ Ζ (80°)

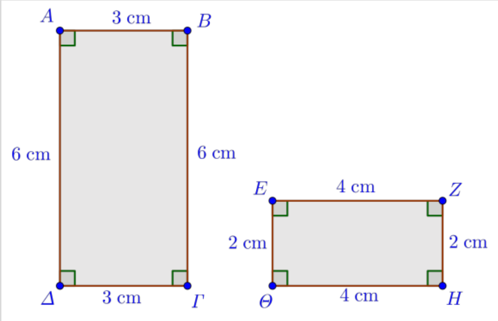
Τα τρίγωνα είναι όμοια με αντιστοιχία κορυφών: $A \leftrightarrow \Delta, B \leftrightarrow Z, \Gamma \leftrightarrow E$. Άρα:

$$\lambda = \frac{AB}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$$

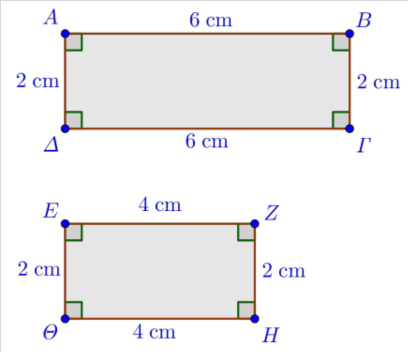
Δραστηριότητες σελ. 66-67 (Όμοια ευθύγραμμα σχήματα)

1. Σε κάθε μία από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα πολύγωνα είναι όμοια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

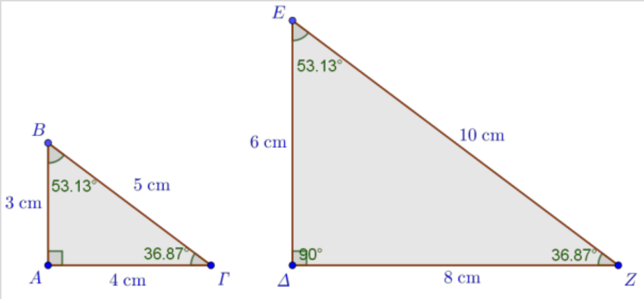
(α)



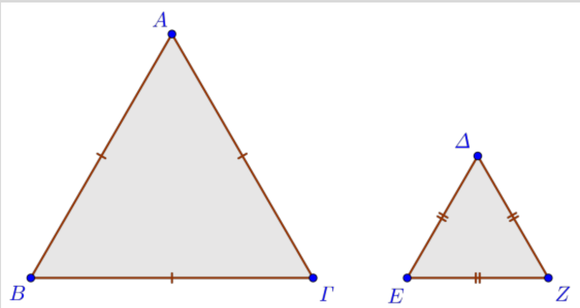
(β)



(γ)



(δ)



Απάντηση

(α) $\boxed{1}$ Ισότητα γωνιών

Αφού τα τετράπλευρα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ είναι ορθογώνια, οι εσωτερικές τους γωνίες είναι όλες ορθές, άρα έχουν τις αντίστοιχες τους γωνίες ίσες (όλες 90°).

$\boxed{2}$ Αναλογία πλευρών

Αφού

$$\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{3}{2}, \quad \frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, \quad \frac{ΓΔ}{ΗΘ}=\frac{3}{2} \ και \ \frac{ΔΑ}{ΘΕ}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

έπεται ότι οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

$\boxed{1}+\boxed{2} \Longrightarrow ΑΒΓΔ \approx ΕΖΗΘ.$

(β)

$$\frac{ΙΜ}{ΝΠ}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}, \quad \frac{ΜΛ}{ΠΟ}=\frac{2}{2}=1$$

και άρα τετράπλευρα δεν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, άρα δεν είναι όμοια.

(γ) $\boxed{1}$ Ισότητα γωνιών

Είναι $\hat{Σ}=\hat{Φ}=90°, \hat{Τ}=\hat{Χ}=37°$, $\hat{Υ}=\hat{Ρ}=53°$ και άρα τα τρίγωνα έχουν τις αντίστοιχές τους γωνίες ίσες.

$\boxed{2}$ Αναλογία πλευρών

$$\frac{ΡΣ}{ΥΦ}=\frac{3}{3}=1, \quad \frac{ΣΤ}{ΦΧ}=\frac{4}{4}=1 \ και \ \frac{ΧΥ}{ΤΡ}=\frac{5}{5}=1$$

$\Longrightarrow$ οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

$\boxed{1}+\boxed{2} \Longrightarrow ΣΤΡ \approx ΦΧΥ.$

(δ) $\boxed{1}$ Ισότητα γωνιών

Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΖΕ$ είναι ισόπλευρα, άρα οι αντίστοιχες (εσωτερικές) γωνίες τους είναι ίσες μία προς μία (ίσες με 60° η κάθε μια).

$\boxed{2}$ Αναλογία πλευρών

Έστω $ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ=α$ και $ΔΕ=ΔΖ=ΕΖ=β$

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{α}{β}, \quad \frac{ΑΓ}{ΔΖ}=\frac{α}{β} \ και \ \frac{ΒΓ}{ΕΖ}=\frac{α}{β}$$

$\Longrightarrow$ οι πλευρές τους είναι ανάλογες.

$\boxed{1}+\boxed{2} \Longrightarrow \quad AB\Gamma \approx ZE\Delta.$

2. Δίνεται ένα ορθογώνιο με διαστάσεις α και β και ένα άλλο με διαστάσεις 2α και 2β. Να δείξετε ότι τα δύο ορθογώνια είναι όμοια και στη συνέχεια να υπολογίσετε:

(α) τον λόγο των πλευρών τους

(β) τον λόγο των περιμέτρων τους

(γ) τον λόγο των εμβαδών τους.

Απάντηση

(α) Αφού είναι ορθογώνια, οι εσωτερικές τους γωνίες είναι όλες ορθές, άρα έχουν τις αντίστοιχες τους γωνίες ίσες (όλες 90°).
Οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών είναι:

$$\frac{2\alpha}{\alpha}=2, \frac{2\beta}{\beta}=2$$

Άρα οι πλευρές είναι ανάλογες με λόγο $\lambda=2$.

(δηλαδή το ορθογώνιο με πλευρές 2α και 2β είναι διπλάσιο του ορθογωνίου με πλευρές α και β).

(β) Αν Π_1 η περίμετρος του μεγάλου ορθογωνίου και Π_2 η περίμετρος του μικρότερου ορθογωνίου, τότε

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2}=\lambda=2$$

(γ) Αν E_1 το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου και E_2 το εμβαδόν του μικρότερου ορθογωνίου, τότε

$$\frac{E_1}{E_2}=\lambda^2=4$$

3. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α)	Ένα τετράγωνο και ένας ρόμβος είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα τετράγωνο και ένα ορθογώνιο είναι πάντοτε όμοια τετράπλευρα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δύο κανονικά εξάγωνα με πλευρές 5 cm και 7 cm είναι όμοια.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Ένα κανονικό πεντάγωνο με πλευρά ακαι ένα κανονικό εξάγωνο με πλευρά αείναι όμοια πολύγωνα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΛΑΘΟΣ**: Ο ρόμβος δεν έχει απαραίτητα ορθές γωνίες. Για να είναι όμοια, πρέπει και οι γωνίες να είναι ίσες. Άρα δεν είναι πάντοτε όμοια.

(β) **ΛΑΘΟΣ**: Παρότι όλες τους οι γωνίες είναι 90°, οι πλευρές του ορθογωνίου δεν είναι γενικά ίσες μεταξύ τους.
Άρα δεν έχουν σταθερό λόγο πλευρών ⇒ δεν είναι πάντοτε όμοια.

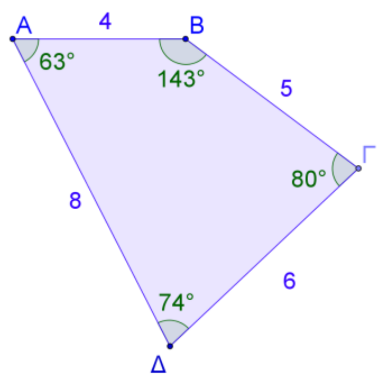
(γ) **ΣΩΣΤΟ**: Αφού τα εξάγωνα είναι κανονικά, οι πλευρές τους θα είναι ίσες και άρα ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους είναι ίδιος (λ=5/7) και οι αντίστοιχες (εσωτερικές) γωνίες τους είναι ίσες (ίσες με 120° η κάθε μια).

(δ) **ΛΑΘΟΣ**: Δεν έχουν ίδιο αριθμό πλευρών ⇒ δεν μπορούν να είναι όμοια.

4. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$, το οποίο είναι όμοιο με ένα τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$. Αν ισχύει ότι

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{2}{3},$$

να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΕΖΗΘ$.



Απάντηση

$ΑΒΓΔ \approx ΕΖΗΘ,\ AB=4.$

Είναι

$$\frac{2}{3}=\frac{AB}{EZ}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{4}{EZ}\Leftrightarrow \boldsymbol{EZ=6},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{AΔ}{EΘ}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{8}{EΘ}\Leftrightarrow \boldsymbol{EΘ=12},$$

$$\frac{2}{3}=\frac{ΓΔ}{HΘ}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{6}{HΘ}\Leftrightarrow \boldsymbol{HΘ=9}$$

και

$$\frac{2}{3}=\frac{BΓ}{ZH}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\frac{5}{ZH}\Leftrightarrow \boldsymbol{ZH=7,5}$$

Επίσης, λόγω της ομοιότητας των δυο τετραπλεύρων, οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες, δηλαδή:

$$\boldsymbol{63^o = \widehat{A} = \widehat{E}, \quad 143^o = \widehat{B} = \widehat{Z}, \quad 80^o = \widehat{\Gamma} = \widehat{H}, \quad 74^o = \widehat{\Delta} = \widehat{\Theta}}$$

5. Ο λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων είναι $\frac{2}{5}$ και το εμβαδόν του μικρότερου πολυγώνου είναι 16 cm². Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγαλύτερου πολυγώνου.

Απάντηση

$\lambda = \dfrac{2}{5}$.

Αν E_1 το εμβαδόν του μεγαλύτερου πολυγώνου και E_2 το εμβαδόν του μικρότερου, τότε:

$$\frac{E_1}{E_2} = \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{16}{E_1} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \Leftrightarrow E_1 = 16 \cdot \frac{25}{4} \Leftrightarrow E_1 = 100\ cm^2$$

6. Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 6 cm, 9 cm και 12 cm. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ενός τριγώνου όμοιου προς αυτό το τρίγωνο, το οποίο να έχει περίμετρο 36 cm.

Απάντηση

Έστω Π_1 η περίμετρος ενός τριγώνου με πλευρές $AB = 9cm, B\Gamma = 12cm, A\Gamma = 6cm$. Έτσι, $\Pi_1 = AB + B\Gamma + \Gamma A = 27\ cm$. Έστω $A'B'\Gamma'$ ενα τρίγωνο όμοιο με το $AB\Gamma$. Τότε, επίσης από τα δεδομένα της άσκησης, είναι $\Pi_2 = 36\ cm$. Τότε

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Τότε,

$$\lambda = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{9}{A'B'} \Leftrightarrow \boldsymbol{A'B' = 12\ cm},$$

$$\lambda = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{12}{B'\Gamma'} \Leftrightarrow \boldsymbol{B'\Gamma' = 16\ cm}$$

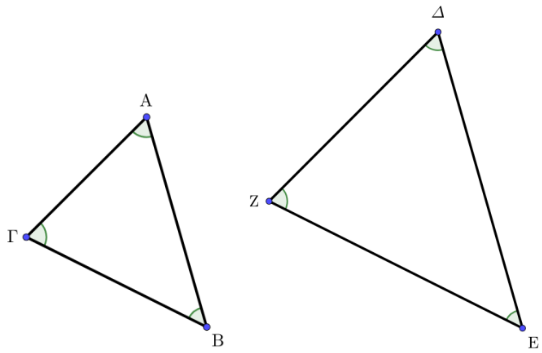
και

$$\lambda = \frac{\Gamma A}{\Gamma' A'} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{\Gamma' A'} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma' A' = 8\ cm}$$

6.3 Όμοια τρίγωνα

Σύμφωνα με τον ορισμό των όμοιων πολυγώνων, δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια αν και μόνο αν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή $\mathrm{AB\Gamma} \approx \mathrm{\Delta EZ}$ αν και μόνο αν:

$$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta}, \quad \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}}, \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{Z}} \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\mathrm{Z}}$$

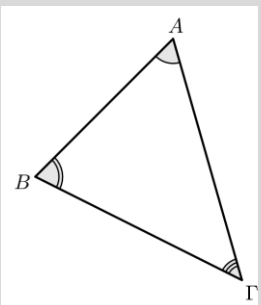


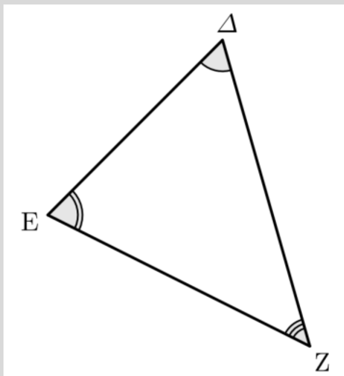
Θα δούμε τώρα 3 κριτήρια ομοιότητας τριγώνων:

1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων (Γωνιά-Γωνιά/Γ-Γ)

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία:

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\Delta} \\ \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}} \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathrm{AB\Gamma} \approx \Delta\mathrm{EZ}$$





<u>Απόδειξη</u>

Έστω τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ τέτοια ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$.

Τότε και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ (αφού έχουν 2 γωνίες ίσες μια προς μια, θα έχουν και την τρίτη γωνία ίση).

Θα δείξουμε ότι οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Θεωρούμε σημείο H πάνω στην πλευρά AB τέτοιο ώστε

$$(AH) = (\Delta E) \quad (*)$$

Από το σημείο H φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Θ και από το σημείο Θ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο I. Τότε, το τετράπλευρο $H\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, $(H\Theta) \parallel= (BI)$. Έτσι, $A\widehat{H}\Theta = \widehat{B}$ $(**)$ (εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες) και αφού από πριν, $\widehat{B} = \widehat{E}$, έχουμε τελικά ότι $A\widehat{H}\Theta = \widehat{E}$ $(***)$. Από τις σχέσεις $(*)$, $(**)$ και $(***)$ έπεται ότι τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ είναι **ίσα** (Π-Γ-Γ). Έτσι,

$$(A\Theta) = (\Delta Z), (H\Theta) = (EZ) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; A\widehat{\Theta}H = \widehat{Z} \;\; (****)$$

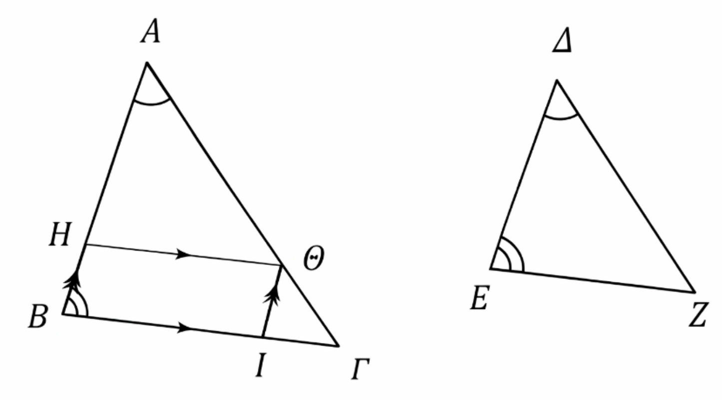
Τώρα,

$$(AB) \parallel (\Theta I) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{\overbrace{BI}^{=H\Theta}}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{H\Theta}{B\Gamma}, \qquad (B\Gamma) \parallel (H\Theta) \xRightarrow{\Theta.\Theta\alpha\lambda\acute{\eta}} \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{AH}{AB}$$

και άρα τελικά (χρησιμοποιώντας την $(****)$):

$$\frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{H\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{AB} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{\Delta Z}{A\Gamma} = \frac{EZ}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB}$$

Συνεπώς, $AB\Gamma \approx \Delta EZ$.

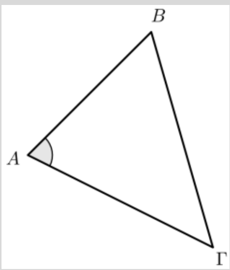


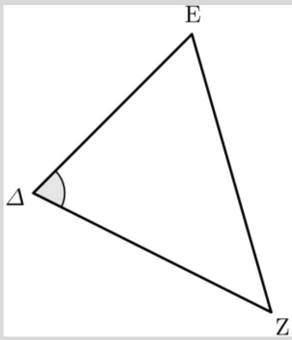
■

2ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων (Πλευρά-Γωνία-Πλευρά/Π-Γ-Π)

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δύο πλευρές ανάλογες και την περιεχόμενη γωνία τους (τη γωνία που σχηματίζεται από αυτές τις δύο πλευρές) ίση:

$$\begin{cases} \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z} \\ \widehat{A} = \widehat{\Delta} \end{cases} \Longrightarrow AB\Gamma \approx \Delta EZ$$





Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ τέτοια ώστε $\hat{A} = \hat{Δ}$ και οι πλευρές που περιέχουν τις γωνίες αυτές είναι ανάλογες, δηλ. ισχύει ότι

$$\frac{AB}{ΔE} = \frac{AΓ}{ΔZ} \quad (*)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο κριτήριο.
Θεωρούμε σημεία H και $Θ$ πάνω στις πλευρές AB και $AΓ$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$(AH) = (ΔE) \ και \ (AΘ) = (ΔZ) \ (**)$$

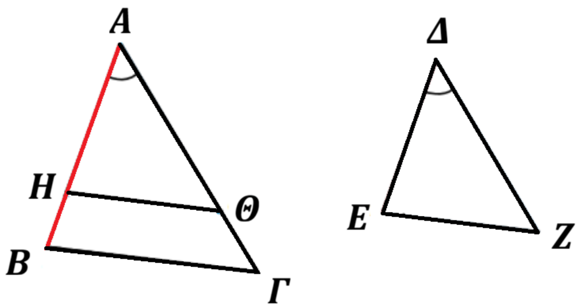
Τότε:

$$(*) \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AΓ}{AΘ}$$

και άρα $(HΘ) \parallel (BΓ)$. Έτσι, $A\hat{H}Θ = \hat{B}$ (εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες)) $(***)$. Από τη $(**)$ και το ότι $\hat{A} = \hat{Δ}$, έπεται ότι τα τρίγωνα $AHΘ$ και $ΔEZ$ είναι ίσα (Π-Π-Γ). Έτσι,

$$(HΘ) = (EZ), \hat{Θ} = \hat{Z} \ \ και \ \ A\hat{H}Θ = \hat{E}$$

Έτσι, $\hat{E} = \hat{B}$ και το αποτέλεσμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.■



3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων (Πλευρά-Γωνία-Πλευρά/Π-Γ-Π)

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή αν οι λόγοι των αντίστοιχων πλευρών τους είναι ίσοι:

$$\frac{AB}{ΔE} = \frac{BΓ}{EZ} = \frac{AΓ}{ΔZ} \Longrightarrow ABΓ \approx ΔEZ$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ τέτοια ώστε οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή ισχύει ότι

$$\frac{AB}{ΔE} = \frac{AΓ}{ΔZ} = \frac{BΓ}{EZ} \ (1)$$

Όπως και πριν, θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο κριτήριο. Θεωρούμε σημεία H και $Θ$ πάνω στις πλευρές AB και $AΓ$ αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$(AH) = (ΔE) \ και \ (AΘ) = (ΔZ) \ (2)$$

Τότε

$$(1) \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AΓ}{AΘ} = \frac{BΓ}{EZ} (3)$$

και αρα $(HΘ) \parallel (BΓ)$. Συνεπώς, $A\hat{H}Θ = \hat{B}$ και $A\hat{Θ}H = \hat{Γ}$ (εντός εκτός και επι τα αυτά γωνίες)). Τότε, από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων, έπεται ότι $ABΓ \approx AHΘ$. Συνεπώς,

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BΓ}{HΘ} \ (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι

$$\frac{BΓ}{EZ} = \frac{BΓ}{HΘ} \ (5)$$

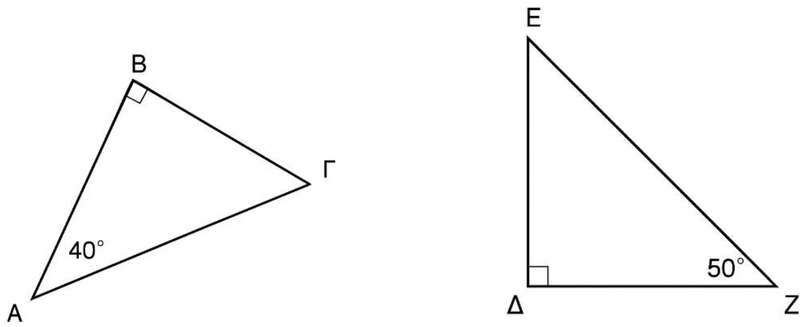
και άρα $(EZ) = (H\Theta)$. Τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ είναι ίσα (έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και αυτό έπεται από τις (1) και (5)) και αρα

$$\hat{A} = \hat{\Delta}, A\hat{\Theta}H = \hat{Z}, \qquad A\hat{H}\Theta = \hat{E}$$

Έτσι, τελικά, $A\hat{H}\Theta = \hat{E} = \hat{B}$ και το αποτέλεσμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.■

Παραδείγματα

1. Να ελέγξετε αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια:



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} = 180° \Longrightarrow 40° + 90° + \widehat{\Gamma} = 180° \Longrightarrow \widehat{\Gamma} = 180° - 130° = 50°$.

Άρα:

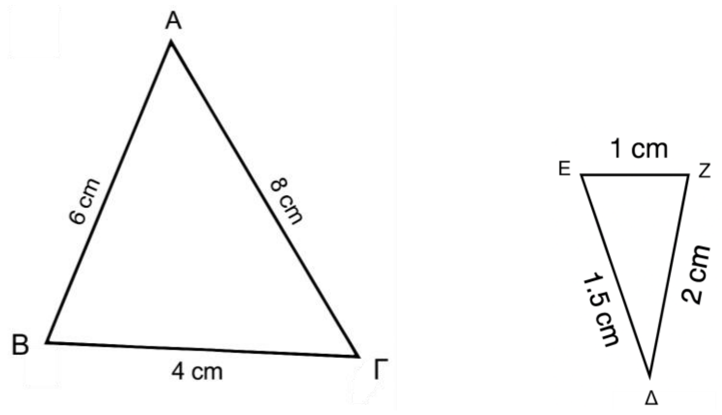
$$\begin{cases} \widehat{\Gamma} = \widehat{\mathrm{Z}} = 50° \\ \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Delta} = 90° \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathrm{AB\Gamma} \approx \mathrm{E\Delta Z}$$

(1° κριτήριο ομοιότητας τριγώνων/Γ-Γ)

Έπεται:

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Delta\mathrm{Z}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{EZ}}$$

2. Να ελέγξετε αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια:

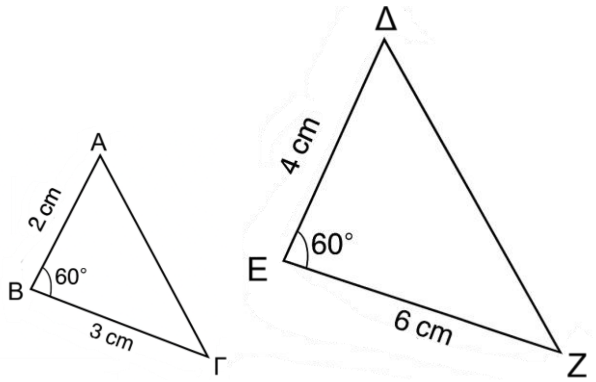


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{6}{1{,}5} = 4 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EZ}} = \dfrac{4}{1} = 4 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\mathrm{Z}} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathrm{AB}\Gamma \approx \Delta\mathrm{EZ}$$

(3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων/Π-Γ-Π)

3. Να ελέγξετε αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι όμοια:

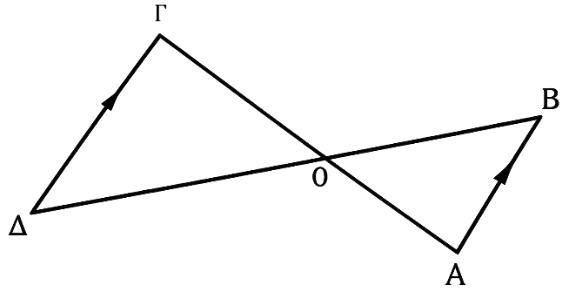


ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EZ}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{E}} = 60° \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{AB}\Gamma \approx \Delta\mathrm{EZ}$$

(2ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

4. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$. Να δείξετε ότι $OAB \approx O\Gamma\Delta$ και να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών τους:



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\left.\begin{cases} O\hat{B}A = O\hat{\Delta}\Gamma \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \\ \\ A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta \text{ (κατά κορυφήν γωνίες)} \end{cases}\right. \Longrightarrow OAB \approx O\Gamma\Delta$$

(1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων/Γ-Γ).

Άρα:

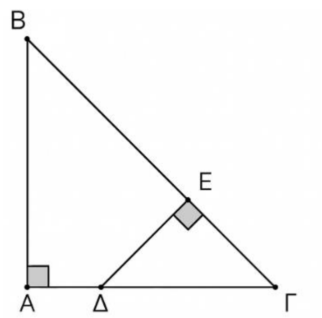
$$\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$$

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A} = 90^\circ\right)$ και Δ τυχαίο σημείο της ΑΓ, από το οποίο φέρουμε ΔΕ ⊥ ΒΓ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι όμοια.

(β) Ισχύει η σχέση: (ΑΓ)·(ΕΔ)=(ΑΒ)·(ΕΓ).



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ ισχύει ότι:Επίσης: $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνιά.

$$\left.\begin{array}{r} \hat{A} = 90^\circ \ \text{(δεδομένο)} \\ \Delta\hat{E}\Gamma = 90^\circ \text{(διότι } \Delta E \perp B\Gamma\text{)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{A} = \Delta\hat{E}\Gamma$$

Συνεπώς, τα τρίγωνα ΓΕΔ και ΓΑΒ είναι όμοια, επειδή έχουν δύο γωνίες ίσες μία **προς μία**.

(β) Από το (α) προκύπτει:

$$\frac{\Gamma B}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$$

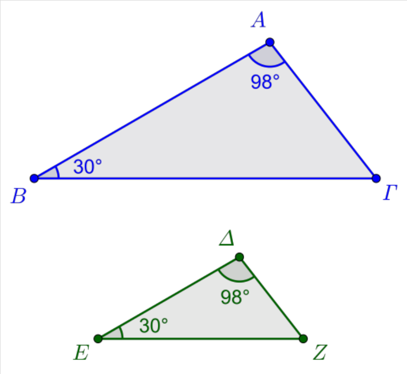
Επιλέγουμε τον κατάλληλο λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{E\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma} \Longrightarrow (A\Gamma)\cdot(E\Delta) = (AB)\cdot(E\Gamma)$$

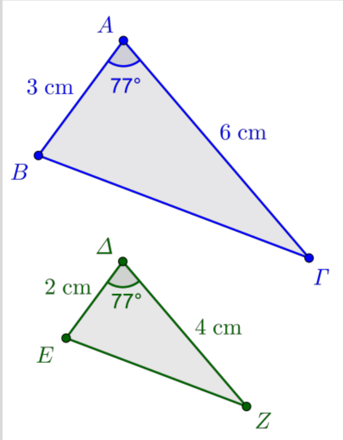
Δραστηριότητες σελ. 76-80 (Όμοια τρίγωνα)

1. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια.

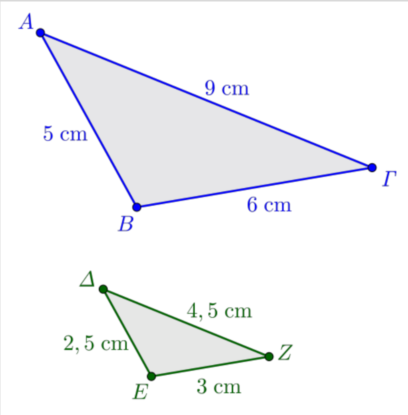
(α)



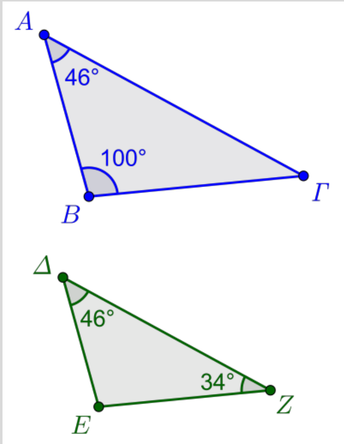
(β)



(γ)



(δ)



Απάντηση

(α) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$:

$$\hat{A} = 98°, \qquad \hat{B} = 30°$$

Στο τρίγωνο ΔEZ:

$$\hat{\Delta} = 98°, \qquad \hat{E} = 30°$$

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο ίσες γωνίες:

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 98°, \qquad \hat{B} = \hat{E} = 30°$$

Συμπέρασμα (1^{ο} κριτήριο ομοιότητας τριγώνων):

$$AB\Gamma \approx \Delta EZ$$

(β) Στο τρίγωνο $AB\Gamma$: $AB = 3\,cm,\ A\Gamma = 6\,cm,\ \hat{A} = 77°$

Στο τρίγωνο ΔEZ: $\Delta E = 2\,cm,\ \Delta Z = 4\,cm,\ \hat{\Delta} = 77°$

Ελέγχω την αναλογία των πλευρών που περιέχουν τις γωνιές $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$:

$$\frac{ΔΕ}{ΔΖ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

⟹ Οι δύο πλευρές είναι ανάλογες και η περιεχόμενη γωνία ίση.

Συμπέρασμα ($2^{ο}$ κριτήριο ομοιότητας τριγώνων): $ΑΒΓ \approx ΔΕΖ$

(γ) Στο τρίγωνο ΑΒΓ: ΑΒ = 5 cm, ΒΓ = 6 cm, ΑΓ = 9 cm

Στο τρίγωνο ΔΕΖ: ΔΕ = 2,5 cm, ΕΖ = 3 cm, ΔΖ = 4,5 cm

Ελέγχουμε τους λόγους των **αντίστοιχων** πλευρών:

$$\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{5}{2{,}5} = 2, \qquad \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{9}{4{,}5} = 2$$

⟹ Όλες οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες.

Συμπέρασμα (3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων): $ΑΒΓ \approx ΔΕΖ$

(δ) Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$: $\hat{Α}$= 46°, $\hat{Β}$= 100°

Άρα:
$\hat{Γ}$ = 180° − (46° + 100°)= 180° − 146°= 34°

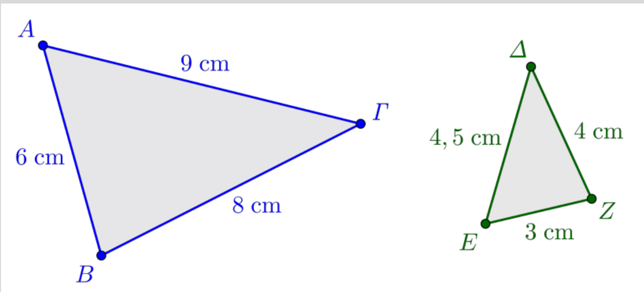
Στο τρίγωνο $ΔΕΖ$: $\hat{Δ}$ = 46°, $\hat{Ζ}$= 34°

Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία:

$\hat{Α}$ = $\hat{Δ}$ = 46°, $\hat{Γ}$ = $\hat{Ζ}$= 34°

Συμπέρασμα (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων): $ΑΒΓ \approx ΔΕΖ$

2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα στο πιο κάτω σχήμα είναι όμοια. Σε περίπτωση που αυτό ισχύει, να σημειώσετε τις ίσες γωνίες τους.



<u>Απάντηση</u>

Στο τρίγωνο ΑΒΓ: ΑΒ = 6 cm, ΒΓ = 8 cm, ΑΓ = 9 cm

Στο τρίγωνο ΔΕΖ: ΔΕ = 4,5 cm, ΕΖ = 3 cm, ΔΖ = 4 cm

Εξετάζω αν οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

AB = 6 cm ↔ EZ = 3 cm
BΓ = 8 cm ↔ ΔZ = 4 cm
AΓ = 9 cm ↔ ΔE = 4,5 cm

Υπολογίζω τους λόγους:

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{6}{3} = 2, \qquad \frac{B\Gamma}{\Delta Z} = \frac{8}{4} = 2, \qquad \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{9}{4{,}5} = 2$$

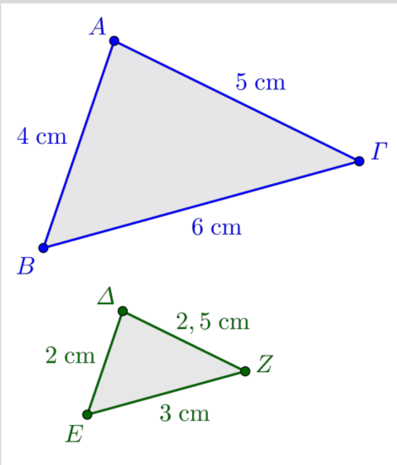
⟹ Όλες οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες με λόγο λ=2.

Συμπέρασμα (3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων): $AB\Gamma \approx \Delta EZ$.

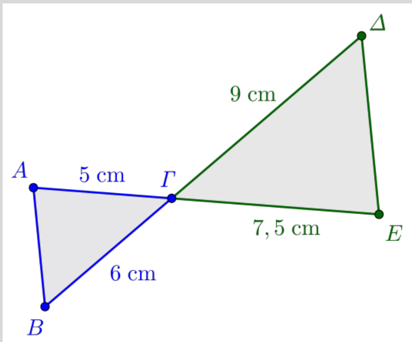
Ίσες γωνίες: $\hat{A} = \hat{Z},\ \hat{B} = \hat{E},\ \hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.

3. Να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα σε κάθε ζεύγος πιο κάτω είναι όμοια, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

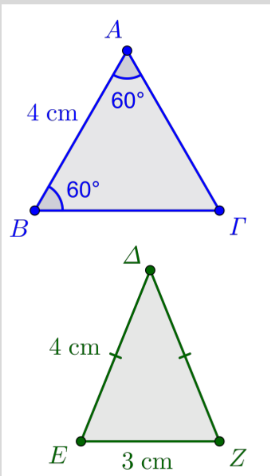
(α)



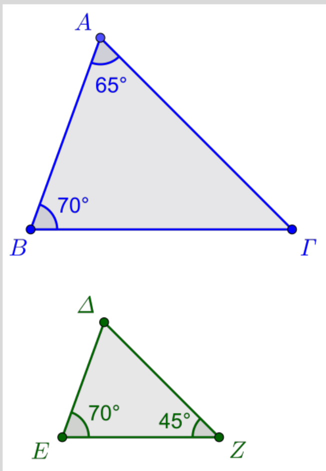
(β)



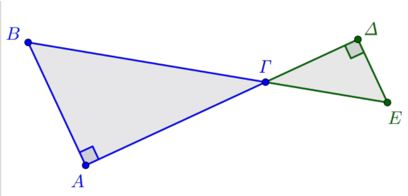
(γ)



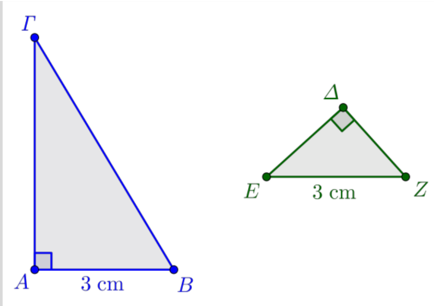
(δ)



(ε)



(στ)



Απάντηση

(α) $\frac{AB}{EZ} = \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{6}{2} = 2, \quad \frac{B\Gamma}{Z\Delta} = \frac{5}{2.5} = 2$

$\Longrightarrow$ οι πλευρές των δυο τριγώνων είναι ανάλογες. Έτσι, από το 3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων, $AB\Gamma \approx EZ\Delta$.

(β)

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \frac{AB}{AE} = \frac{5}{7{,}5} = \frac{2}{3} \\ \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{3}{9} = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \\ B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E \text{ (κατά κορυφήν γωνίες)} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB\Gamma \approx AE\Delta$ (2ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

(γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180° - 120° = 60°$). Επίσης, αφού $\Delta E = EZ = ZA = 4cm$, έπεται ότι και το τρίγωνο ΔEZ είναι επίσης ισόπλευρο.

Έτσι, $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

(δ) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \hat{\Gamma} = 180° - 70° - 65° = 45°$ και $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180° \Rightarrow \hat{E} = 180° - 70° - 45° = 65°$ και άρα

$AB\Gamma \approx \Delta EZ$ (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

(ε)

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{A} = 90° \\ B\hat{E}\Delta = A\hat{E}\Gamma \text{ (κατά κορυφήν γωνίες)} \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow BE\Delta \approx AE\Gamma$ (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

(στ) Δεν είναι όμοια γιατί οι πλευρές τους δεν μπορεί να είναι ανάλογες.

4. Ο Χαράλαμπος έχει ύψος 1,70 m. Αν η σκιά του είναι 2 m και η σκιά ενός ανεμόμυλου την ίδια στιγμή είναι 7 m, να βρείτε το ύψος του ανεμόμυλου.
(Είναι γνωστό από τη φυσική ότι οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες).

Απάντηση

Οι ακτίνες του ήλιου είναι παράλληλες, άρα τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι όμοια.

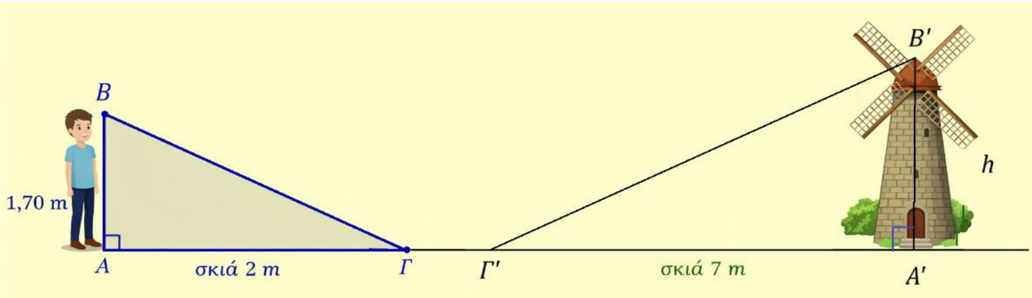
Έστω h το ύψος του ανεμόμυλου. Οι αντίστοιχες πλευρές είναι ανάλογες:

$$\frac{\text{ύψος Χαράλαμπου}}{\text{ύψος ανεμόμυλου}}=\frac{\text{μήκος σκιάς Χαράλαμπου}}{\text{μήκος σκιάς ανεμόμυλου}}$$

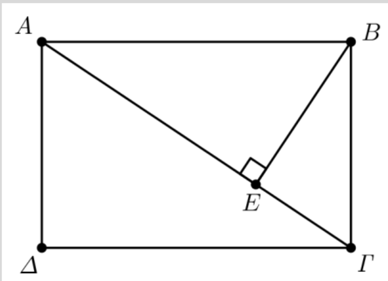
$$\Rightarrow \frac{1{,}7}{\text{ύψος ανεμόμυλου}}=\frac{2}{7}\Longrightarrow \frac{1{,}7}{2}=\frac{h}{7}$$

Λύνω ως προς h:

$$1{,}7\cdot 7=2h \Longrightarrow 11{,}9=2\cdot h \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{h=\frac{11{,}9}{2}=5{,}95\ \mathbf{m}}}$$



5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 6 cm και ΑΓ = 9 cm. Από το σημείο Β φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΓΕ.



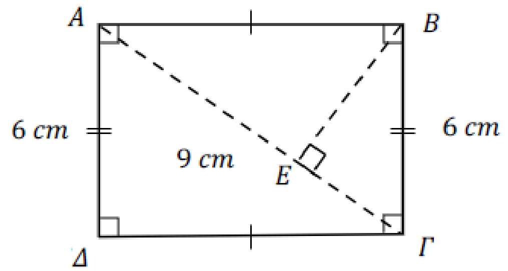
Απάντηση

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}E\ (\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\varepsilon\varsigma) \\ A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 90° \end{array}\right\}$$

και άρα $ΒΕΓ \approx ΑΔΓ$ (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

Συνεπώς, από την αναλογία των πλευρών:

$$\frac{ΑΔ}{ΕΓ}=\frac{ΔΓ}{ΕΒ}=\frac{ΑΓ}{ΒΓ}\Longrightarrow\frac{6}{ΕΓ}=\frac{ΔΓ}{ΕΒ}=\frac{9}{6}\Longrightarrow\frac{6}{ΕΓ}=\frac{9}{6}\Longrightarrow \boldsymbol{ΕΓ}=\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{9}}=\mathbf{4\ cm}$$



2ος τρόπος (κάνοντας χρήση των αποτλεσμάτων της άσκησης 14)

Σε ορθογώνιο τρίγωνο, **το τετράγωνο κάθε κάθετης πλευράς ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα** (**1ο θεώρημα Ευκλείδη** για ορθογώνιο τρίγωνο).

Δηλαδή:

$$(\text{κάθετη πλευρά})^2=(\text{υποτείνουσα})\cdot(\text{προβολή})$$

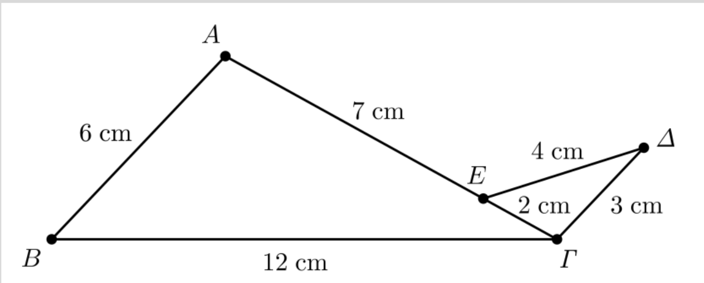
Στην περίπτωσή μας:

- Υποτείνουσα: ΑΓ
- Κάθετη πλευρά: ΒΓ
- Προβολή της ΒΓ στην ΑΓ: ΓΕ

Άρα:

$$(\mathrm{ΒΓ})^2=(\mathrm{ΑΓ})\cdot(\mathrm{ΓΕ})\Longrightarrow 6^2=9\cdot(\mathrm{ΓΕ})\Longrightarrow 36=9\cdot(\mathrm{ΓΕ})\Longrightarrow(\mathrm{ΓΕ})=4\ \mathrm{cm}$$

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $ΑΒ=6$ cm, $ΒΓ\ =\ 12$ cm, $ΑΕ\ =\ 7$ cm, $ΕΓ\ =$ 2 cm, $ΔΓ\ =\ 3$ cm και $ΕΔ\ =4$ cm. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ \parallel ΓΔ$.



__Απάντηση__

Είναι

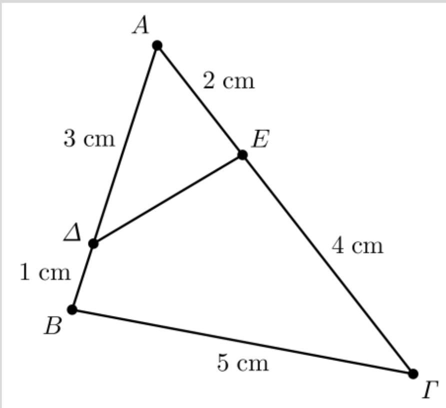
$$\begin{cases} \dfrac{AB}{\Gamma E} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{9}{3} = 3 \\ \dfrac{B\Gamma}{E\Delta} = \dfrac{12}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{\Gamma E} = \dfrac{A\Gamma}{\Gamma\Delta} = \dfrac{B\Gamma}{E\Delta} \Rightarrow \Gamma E\Delta \approx AB\Gamma$$

(3ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

(αντιστοιχία Α ↔ Γ, Β ↔ Ε, Γ ↔ Δ)

και άρα $\hat{A} = E\hat{\Gamma}\Delta$ και έτσι, αφού σχηματίζονται εντός εναλλάξ γωνίες μεταξύ των ευθυγράμμων τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$, έπεται ότι αυτά είναι παράλληλα.

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι: $A\Delta = 3$ cm, $B\Delta = 1$ cm, $AE = 2$ cm, $\Gamma E = 4$ cm, $\Gamma E = 4$ cm και $B\Gamma = 4$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος του ΔE.



<u>Απάντηση</u>

Είναι

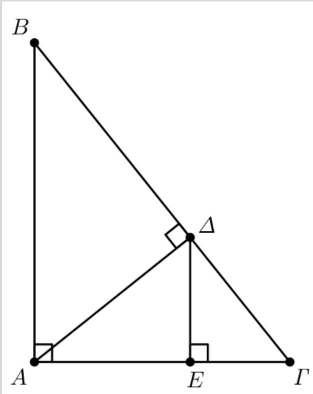
$$\begin{cases} \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{A\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ (κοινή)} \end{cases} \Rightarrow AE\Delta \approx AB\Gamma \text{ (2ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)}$$

με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{1}{2}$.

Έτσι,

$$\frac{E\Delta}{B\Gamma} = \lambda \Leftrightarrow \frac{\Delta E}{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta E = \frac{5}{2} = 2,5\ \mathrm{cm}}$$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($\hat{A} = 90°$), ΑΔ ύψος και $ΔΕ \perp ΑΓ$ (E σημείο στην $ΑΓ$).



Να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.

(β) $(ΑΔ)^2 = (ΑΒ)(ΑΕ)$.

Απάντηση

(α) Είναι
$Δ\hat{E}A = Α\hat{Δ}Β = 90°$ και $Δ\hat{A}E = Δ\hat{B}A$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό:

$$\left.\begin{cases} \hat{B} + Β\hat{A}Δ = 90° \\ Α\hat{Δ}Ε + Δ\hat{A}Ε = 90° \\ Β\hat{A}Δ + Δ\hat{A}Ε = 90° \end{cases}\right. \Rightarrow Δ\hat{A}E = Δ\hat{B}A$$

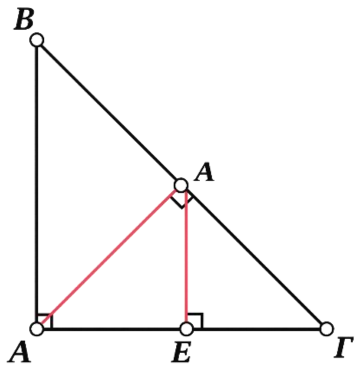
και άρα $ΑΒΔ \approx ΑΔΕ$ (1° κριτήριο ομοιότητας).

(β) Από την αναλογία που προκύπτει από την ομοιότητα τριγώνων $Δ\hat{A}E$ και $Δ\hat{B}A$:

$$\frac{AB}{AΔ} = \frac{AΔ}{ΔE} \implies (AB)\cdot(ΔE) = (AΔ)^2$$

Σημείωση:

Η σχέση αυτή είναι μία από τις βασικές **μετρικές σχέσεις** στο ορθογώνιο τρίγωνο (ύψος προς την υποτείνουσα).



9. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρουμε τα ύψη $ΑΔ$ και $ΒΕ$. Αν $Η$ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$, να δείξετε ότι:

(α) $(ΗΑ)(ΗΔ) = (ΗΒ)(ΗΕ)$

(β) $(ΓΑ)(ΓΕ) = (ΓΒ)(ΓΔ)$

Απάντηση

(α) Είναι

$Α\hat{Ε}Η = Η\hat{Δ}Β = 90°$ και $Α\hat{Η}Ε = Β\hat{Η}Δ$ (κατά κορυφήν γωνίες)

και άρα $ΑΗΕ \approx ΒΗΔ$ (1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

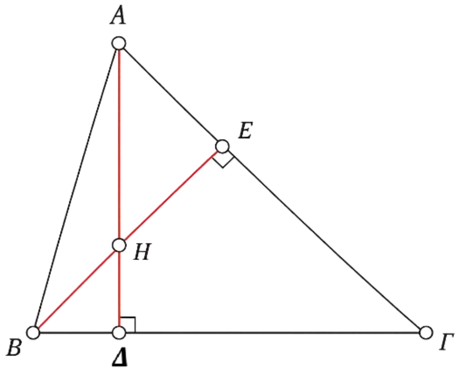
Συνεπώς, από την αναλογία των πλευρών:

$$\frac{ΗΑ}{ΗΒ} = \frac{ΗΕ}{ΗΔ} \Longrightarrow \boldsymbol{(ΗΑ)\cdot(ΗΔ) = (ΗΒ)\cdot(ΗΕ)}$$

(β) Ομοίως, $ΑΔΓ \approx ΒΕΓ$.

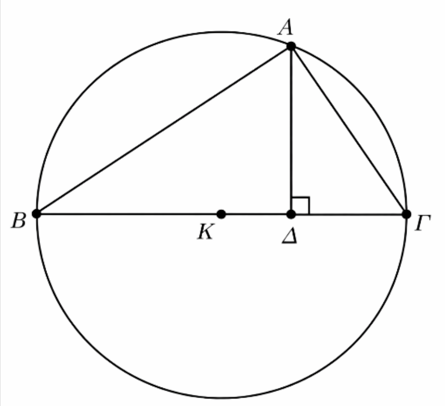
Συνεπώς,

$$\frac{ΓΑ}{ΓΒ} = \frac{ΓΔ}{ΓΕ} \Longrightarrow \boldsymbol{(ΓΑ)\cdot(ΓΕ) = (ΓΔ)\cdot(ΓΒ)}$$



10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο A αυτού. Από το σημείο A φέρουμε κάθετη $A\Delta$ σε διάμετρο $B\Gamma$ του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

$$(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)(\Delta\Gamma)$$



Απάντηση

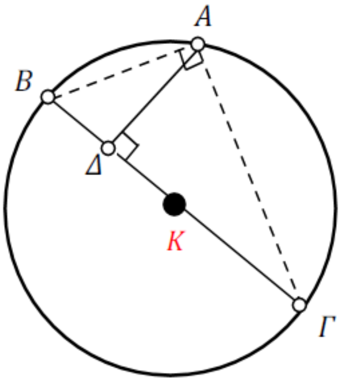
Θα δείξω ότι $A\Gamma\Delta \approx AB\Gamma$:

Είναι $B\hat{A}\Gamma = 90°$ (βαίνουσα σε ημικύκλιο) και άρα $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma = 90°$.

Επίσης, τα τρίγωνα αυτά έχουν κοινή τη γωνία $\hat{\Gamma}$ και άρα το συμπέρασμα έπεται από το 1º κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Έτσι, λόγω της ομοιότητας:

$$\frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \Longrightarrow \boldsymbol{(A\Gamma)^2 = (B\Gamma)\cdot(\Delta\Gamma)}$$



11. Δίνεται κύκλος (K, R) και δύο παράλληλες χορδές του AB και ΔE. Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, που τέμνει την προέκταση της ΔE στο σημείο Γ. Να αποδείξετε ότι:

$$(B\Delta)^2 = (BA)(\Delta\Gamma).$$

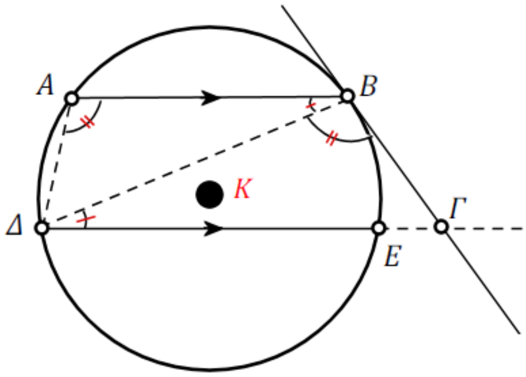
Απάντηση

Θα δείξω ότι $ΒΓΔ \approx ΑΔΒ$:

Είναι $Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ$ (εντός εναλλάξ γωνίες) και $\hat{Α} = Δ\hat{Β}Γ$ (Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης) και άρα το συμπέρασμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Έτσι, λόγω της ομοιότητας:

$$\frac{ΒΔ}{ΒΑ} = \frac{ΔΓ}{ΒΔ} \implies (\boldsymbol{ΒΔ})^2 = (\boldsymbol{ΒΑ}) \cdot (\boldsymbol{ΔΓ})$$



12. Δίνεται κύκλος $(Κ, R)$ με διάμετρο $ΑΒ$ και χορδή $ΑΓ$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της $ΑΓ$ φέρουμε την $ΔΕ$ κάθετη στην $ΑΒ$. Αν η προέκταση της $ΒΓ$ τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο $Α$ στο σημείο $Ζ$, να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $ΑΒΖ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.

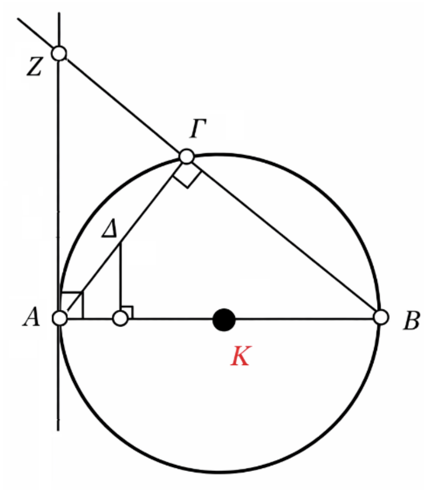
(β) $(ΑΕ)(ΒΖ) = (ΑΔ)(ΑΖ)$.

Απάντηση

(α) Είναι $\hat{Α} = 90°$ (αφού η $(ΑΖ)$ εφάπτεται του κύκλου στο $Α$) και επίσης $Β\hat{Α}Γ = 90°$. Επίσης, με εντελώς όμοιο επιχείρημα όπως στην άσκηση 8, βρίσκουμε ότι $Γ\hat{Α}Β = Γ\hat{Ζ}Α$. Έτσι, από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων, $ΑΔΕ \approx ΖΒΑ$.

(β) Αφού $ΑΔΕ \approx ΖΒΑ$,

$$\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΑΔ}{ΒΖ} \implies (\boldsymbol{ΑΕ}) \cdot (\boldsymbol{ΒΖ}) = (\boldsymbol{ΑΔ}) \cdot (\boldsymbol{ΑΖ})$$



13. Να δείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Απάντηση

Έστω τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΕΖ$ τέτοια ώστε $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{E}$.

Τότε και $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ (αφού έχουν 2 γωνίες ίσες μια προς μια, θα έχουν και την τρίτη γωνία ίση).

Θα δείξουμε ότι οι πλευρές τους είναι ανάλογες. Θεωρούμε σημείο H πάνω στην πλευρά AB τέτοιο ώστε

$$(AH) = (\Delta E) \quad (1)$$

Από το σημείο H φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $Β\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $Α\Gamma$ στο σημείο Θ και από το σημείο Θ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά AB η οποία τέμνει την πλευρά $Β\Gamma$ στο σημείο I. Τότε, το τετράπλευρο $H\Theta IB$ είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, $(H\Theta) \parallel= (BI)$. Έτσι,

$$A\hat{H}\Theta = \hat{B} \qquad (2)$$

(εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες) και αφού από πριν, $\hat{B} = \hat{E}$, έχουμε τελικά ότι

$$A\hat{H}\Theta = \hat{E} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1), (2)$ και (3) έπεται ότι τα τρίγωνα $AH\Theta$ και ΔEZ είναι **ίσα** (Π-Γ-Γ). Έτσι,

$$(A\Theta) = (\Delta Z), (H\Theta) = (EZ) \ \ και \ \ A\hat{\Theta}H = \hat{Z} \qquad (4)$$

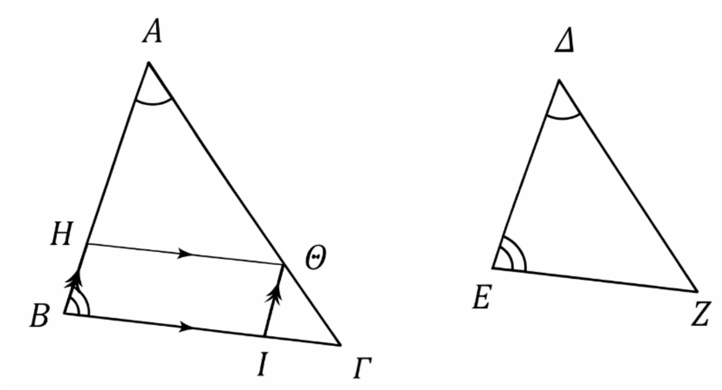
Τώρα,

$$(AB) \parallel (\Theta I) \xrightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{\overbrace{BI}^{=H\Theta}}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{H\Theta}{B\Gamma}, \qquad (B\Gamma) \parallel (H\Theta) \xrightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{A\Theta}{A\Gamma} = \frac{AH}{AB}$$

και άρα τελικά (χρησιμοποιώντας την (4)):

$$\frac{ΑΘ}{ΑΓ}=\frac{ΗΘ}{ΒΓ}=\frac{ΑΗ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{ΔΖ}{ΑΓ}=\frac{ΕΖ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΑΒ}$$

Συνεπώς, $ΑΒΓ \approx ΔΕΖ$.



14. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{Α} = 90°)$ φέρουμε το ύψος $ΑΔ$. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις, οι οποίες είναι γνωστές ως **μετρικές σχέσεις** σε ορθογώνιο τρίγωνο.

(α) $(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΔΒ)$

(β) $(ΑΒ)^2 = (ΒΔ)(ΒΓ)$

(γ) $(ΑΓ)^2 = (ΓΔ)(ΓΒ)$

(δ) $(ΑΔ)(ΒΓ) = (ΑΓ)(ΑΒ)$

(ε) $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2$

<u>Απάντηση</u>

(α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΓΔ$ και $ΑΒΔ$. Είναι $Α\hat{Δ}Β = Γ\hat{Δ}Α = 90°$ και $\hat{Γ} = Δ\hat{Α}Β$ (συμπληρωματικές). Από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων έχουμε ότι $ΑΓΔ \approx ΒΑΔ$. Έτσι,

$$\frac{ΑΔ}{ΔΓ}=\frac{ΔΒ}{ΑΔ} \Longrightarrow (ΑΔ)^2 = (ΔΓ)\cdot(ΔΒ)$$

(β) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θα συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΒΑ$. Είναι $\hat{Δ} = \hat{A} = 90°$ και $\hat{B} = \hat{B}$ (κοινή). Από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων έχουμε ότι $ΑΒΓ \approx ΔΒΑ$. Έτσι,

$$\frac{AB}{ΔB} = \frac{BΓ}{AB} \Longrightarrow (AB)^2 = (BΓ) \cdot (ΔB)$$

(γ) Όμοια με τα προηγούμενα, συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΑΓ$.

(δ) Όμοια με το προηγούμενο, συγκρίνοντας τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΓ,$ βρίσκω ότι είναι όμοια και αρα

$$\frac{AΔ}{AB} = \frac{AΓ}{BΓ} \Longrightarrow (AΔ) \cdot (BΓ) = (AΓ) \cdot (AB)$$

(ε) Είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Αφού $ΑΒΓ \approx ΔΒΑ$ έπεται ότι

$$\frac{AB}{ΔB} = \frac{BΓ}{AB} \Longrightarrow (AB)^2 = (BΓ) \cdot (ΔB)$$

και αφού $ΑΓΔ \approx ΒΓΑ$,

$$\frac{AΓ}{BΓ} = \frac{ΓΔ}{AΓ} \Longrightarrow (AΓ)^2 = (BΓ) \cdot (ΓΔ)$$

Προσθέτω κατά μέλη τις δυο αυτές σχέσεις:

$$(AB)^2 + (AΓ)^2 = (BΓ) \cdot \underbrace{[(ΓΔ) + (ΔB)]}_{=(BΓ)} = (BΓ)^2$$

6.4 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο

Ορισμός (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

Αν δυο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ ενός κύκλου (K, ρ) (ή οι προεκτάσεις αυτών) τέμνονται σε ενα σημείο Σ, τότε

$$(\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = (\Sigma\Gamma) \cdot (\Sigma\Delta)$$

Απόδειξη

Περίπτωση 1: το σημείο Σ βρίσκεται **εκτός** του κύκλου

Θα δείξουμε ότι $\Sigma A\Delta \approx \Sigma\Gamma B$.

$$\begin{cases} \hat{\Sigma} = \hat{\Sigma} \text{ (κοινή)} \\ \hat{\Delta} = \hat{B} \text{ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)} \end{cases}$$

και το συμπέρασμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Συνεπώς, οι πλευρές των δυο αυτών τριγώνων είναι ανάλογες:

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma A}}{\boldsymbol{\Sigma\Gamma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma\Delta}}{\boldsymbol{\Sigma B}} = \frac{\Gamma B}{A\Delta} \quad \Longrightarrow \quad (\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = (\Sigma\Gamma) \cdot (\Sigma\Delta)$$

Περίπτωση 2: το σημείο Σ βρίσκεται **εντός** του κύκλου

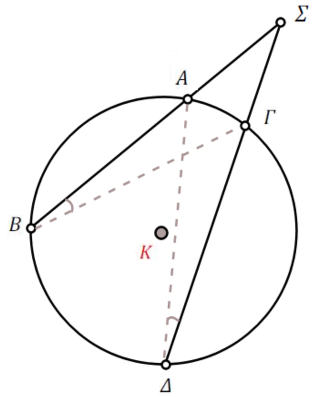
Θα δείξουμε ότι $\Sigma A\Delta \approx \Sigma\Gamma B$.

$$\begin{cases} \Delta\hat{\Sigma}A = B\hat{\Sigma}\Gamma \text{ (κατά κορυφήν γωνίες)} \\ \hat{\Delta} = \hat{B} \text{ (εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο)} \end{cases}$$

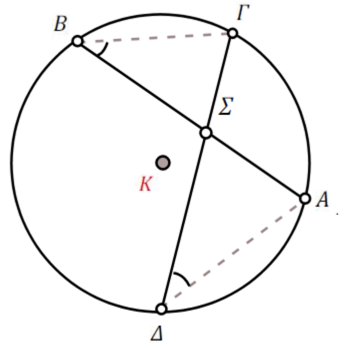
και το συμπέρασμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

Συνεπώς, οι πλευρές των δυο αυτών τριγώνων είναι ανάλογες:

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma A}}{\boldsymbol{\Sigma\Gamma}} = \frac{\boldsymbol{\Sigma\Delta}}{\boldsymbol{\Sigma B}} = \frac{\Gamma B}{A\Delta} \quad \Longrightarrow \quad (\Sigma A) \cdot (\Sigma B) = (\Sigma\Gamma) \cdot (\Sigma\Delta)$$



Περίπτωση 1



Περίπτωση 2

📌 Το σημαντικό του πιο πάνω αποτελέσματος είναι ότι το γινόμενο (ΣΑ)(ΣΒ) είναι σταθερό. Δηλαδή, δεν εξαρτάται από τη θέση της τέμνουσας ΣΑΒ ή ΑΣΒ, αντίστοιχα.

Πόρισμα

Αν $ΣAB$ είναι μια τέμνουσα του κύκλου (K, ρ) και $ΣΓ$ ένα εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το $Σ$, τότε

$$(ΣA)\cdot(ΣB) = (ΣΓ)^2$$

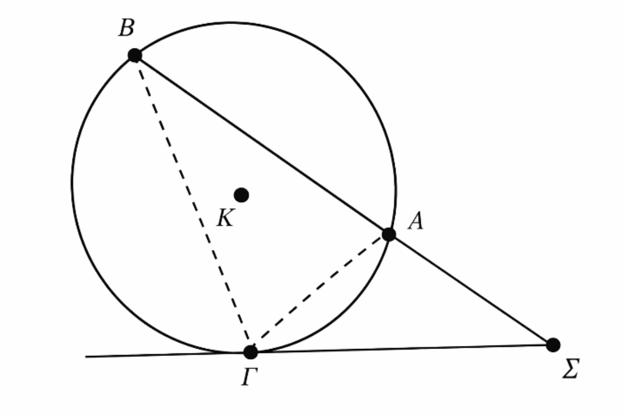
Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι $ΣΓA \approx ΣBΓ$. Πράγματι,

$$\begin{cases} \hat{Σ} = \hat{Σ} \text{ (κοινή)} \\ Σ\hat{Γ}A = \hat{B} \text{ (Θεώρημα Χορδής και εφαπτομένης)} \end{cases}$$

και το συμπέρασμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων. Συνεπώς, οι πλευρές των δυο αυτών τριγώνων είναι ανάλογες:

$$\frac{\boldsymbol{ΣB}}{\boldsymbol{ΣΓ}} = \frac{\boldsymbol{ΣΓ}}{\boldsymbol{ΣA}} = \frac{BΓ}{AΓ} \implies (ΣA)\cdot(ΣB) = (ΣΓ)^2$$



Πόρισμα

Έστω κύκλος (K, ρ) και $Σ$ ενα σταθεροποιημένο σημείο του επιπέδου. Τότε

(α) Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται εκτός του κύκλου, τότε

$$(ΣA)\cdot(ΣB) = \delta^2 - \rho^2$$

(β) Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται εντός του κύκλου, τότε

$$(ΣA)\cdot(ΣB) = \rho^2 - \delta^2$$

Απόδειξη

(α) Αν το σημείο $Σ$ βρίσκεται εκτός του κύκλου, τότε

$$(ΣA) = (ΣK) - (AK)$$

και

$$(ΣB) = (ΣK) + (KB).$$

Συνεπώς,

$$(\Sigma A)\cdot(\Sigma B) = \big((\Sigma K)-(AK)\big)\cdot\big((\Sigma K)+(KB)\big) = (\delta-\rho)\cdot(\delta+\rho) = \delta^2-\rho^2.$$

(β) Αν το σημείο Σ βρίσκεται εντός του κύκλου, τότε

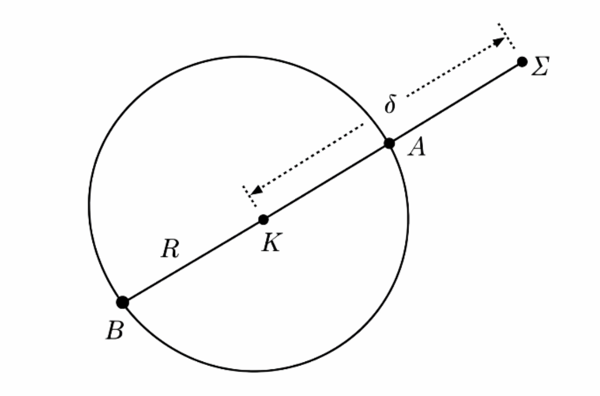
$$(\Sigma A) = (AK) - (\Sigma K)$$

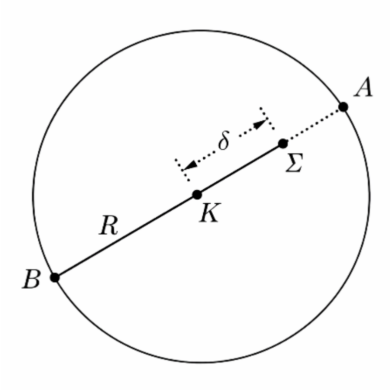
και

$$(\Sigma B) = (KB) + (\Sigma K).$$

Συνεπώς,

$$(\Sigma A)\cdot(\Sigma B) = \big((AK)-(\Sigma K)\big)\cdot\big((KB)+(\Sigma K)\big) = (\rho-\delta)\cdot(\rho+\delta) = \rho^2-\delta^2.$$



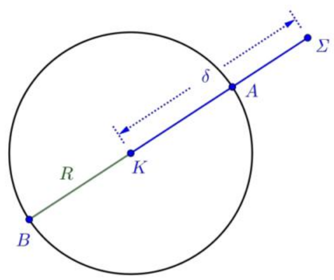


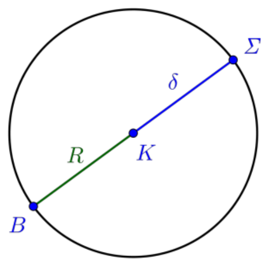
Ορισμός

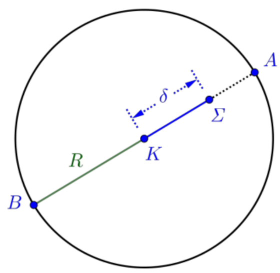
Έστω κύκλος (K,ρ) και Σ ενα σταθεροποιημένο σημείο του επιπέδου. Ονομάζουμε $\delta(K,\Sigma)$ (ή με δ αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχισης) την απόσταση του σημείου Σ από το κέντρο K, δηλ. $\delta(K,\Sigma) = (\Sigma K)$.

Δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (K,ρ) ονομάζεται ο (σταθερός) αριθμός $\Delta(K,\Sigma) = \delta^2-\rho^2$.

- Αν $\Delta(K,\Sigma) > 0$, δηλ. $\delta > \rho$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται **εκτός** του κύκλου,
- Αν $\Delta(K,\Sigma) = 0$, δηλ. $\delta = \rho$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται **στην περιφέρεια** του κύκλου,
- Αν $\Delta(K,\Sigma) < 0$, δηλ. $\delta < \rho$, τότε το σημείο Σ βρίσκεται **εντός** του κύκλου.







📌 **Γιατί λέγεται "δύναμη";**

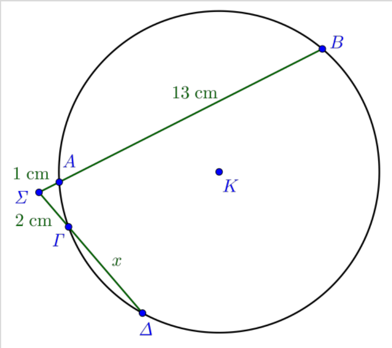
Ιστορικά, από τη γαλλική γεωμετρική σχολή (18ος–19ος αιώνας), το "power" σήμαινε μέγεθος που προκύπτει από γινόμενο ή τετράγωνο.

Δεν έχει φυσική έννοια δύναμης. Είναι "δύναμη" με την έννοια του **τετραγωνικού μέτρου**.

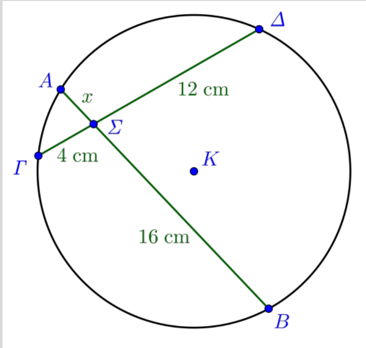
Δραστηριότητες σελ. 88-89 (Δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

1. Να υπολογίσετε την τιμή του αγνώστου στις πιο κάτω περιπτώσεις:

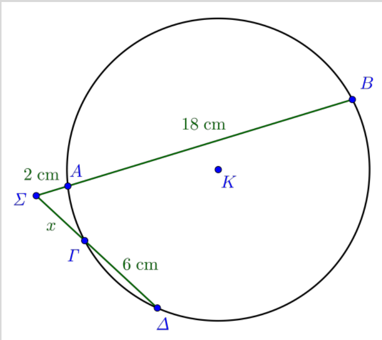
(α) $x =;$



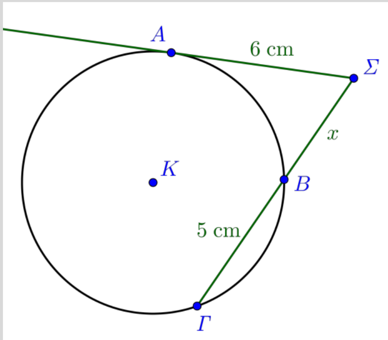
(β) $x =;$



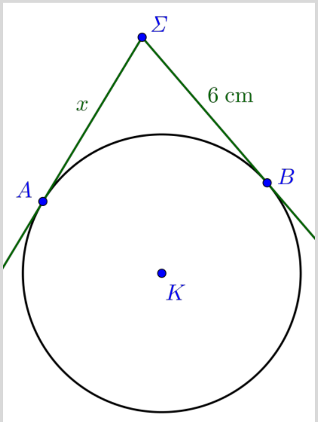
(γ) $x =;$



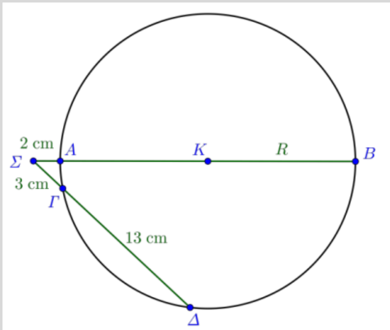
(δ) $x =;$



(ε) $x =;$



(στ) $R =;$



Απάντηση

(α) $$(ΣA) \cdot (ΣB) = (ΣΓ) \cdot (ΣΔ) \Leftrightarrow 1 \cdot 14 = 2 \cdot (x+2) \Leftrightarrow x + 2 = 7$$
$$\Leftrightarrow x = 5\ cm$$

(β) $$(ΣA) \cdot (ΣB) = (ΣΓ) \cdot (ΣΔ) \Leftrightarrow x \cdot 16 = 4 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 3\ cm$$

(γ)

$$(\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta)=(\Sigma A)\cdot(\Sigma B)\Leftrightarrow x\cdot(x+6)=2\cdot 20$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-40=0\Leftrightarrow (x+10)\cdot(x-4)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-10\ cm \text{ ή } x=4\ cm$$

Η λύση $x=-10$ απορρίπτεται (δεν μπορώ να έχω αρνητικό μήκος!) και άρα $x=4\ cm$.

(δ)

$$(\Sigma A)^2=(\Sigma B)\cdot(\Sigma\Gamma)\Leftrightarrow 36=x\cdot(x+5)\Leftrightarrow x^2+5x-36=0$$
$$\Leftrightarrow (x-4)\cdot(x+9)=0$$
$$\Leftrightarrow x=-9\ \omega \text{ ή } x=4\ cm$$

Η λύση $x=-9$ απορρίπτεται (δεν μπορώ να έχω αρνητικό μήκος!) και άρα $x=4\ cm$.

(ε)

$$(\Sigma A)^2=(\Sigma B)^2\Leftrightarrow x^2=6^2\Leftrightarrow x=-6,\ \ 6\ cm$$

Η λύση $x=-6$ απορρίπτεται (δεν μπορώ να έχω αρνητικό μήκος!) και άρα $x=6\ cm$.

(στ)

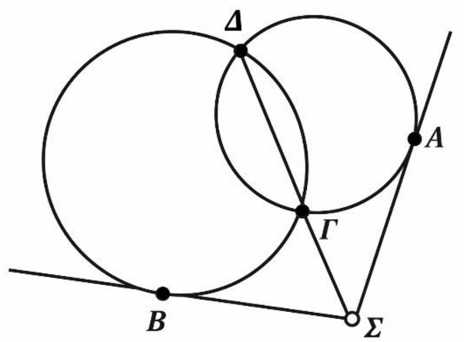
$$(\Sigma A)\cdot(\Sigma B)=(\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta)\Leftrightarrow 2\cdot(2R+2)=3\cdot 16$$
$$\Leftrightarrow 4R=44\Leftrightarrow R=11\ cm$$

2. Πάνω στην προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων παίρνουμε ένα σημείο Σ. Από το Σ φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα ΣA και ΣB προς τους δύο κύκλους. Να αποδείξετε ότι $(\Sigma A)=(\Sigma B)$.

Απάντηση

$$\left.\begin{cases}(\Sigma B)^2=(\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta)\\[2ex](\Sigma A)^2=(\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta)\end{cases}\right.\Rightarrow\ (\Sigma B)^2=(\Sigma A)^2$$

$\Rightarrow (\boldsymbol{\Sigma B})=(\boldsymbol{\Sigma A})$ ή $(\Sigma B)=-(\Sigma A)$ (απορρίπτεται, διότι το ένα από τα δύο αυτά μήκη θα είναι αρνητικό).



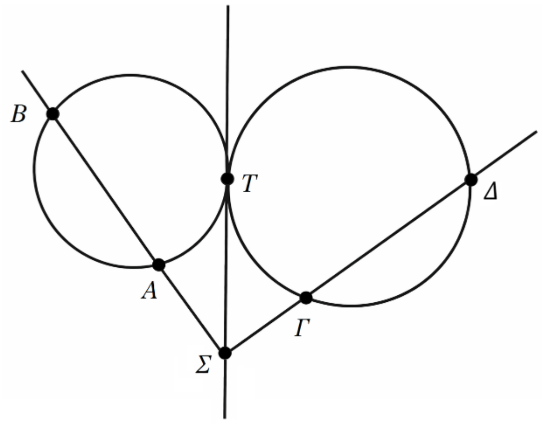
3. Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο T. Από ένα τυχαίο σημείο Σ της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των δύο κύκλων φέρουμε τέμνουσες ΣAB και $\Sigma\Gamma\Delta$, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma\Gamma)(\Sigma\Delta)$.

<u>Απάντηση</u>

(Δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

$$\begin{cases} (\Sigma B)^2 = (\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta) \\ (\Sigma A)^2 = (\Sigma\Gamma)\cdot(\Sigma\Delta) \end{cases} \Rightarrow (\Sigma B)^2 = (\Sigma A)^2$$

$\Rightarrow \boldsymbol{(\Sigma B) = (\Sigma A)}$ ή $(\Sigma B) = -(\Sigma A)$ (απορρίπτεται, διότι το ένα από τα δύο αυτά μήκη θα είναι αρνητικό).



4. Πάνω στη διάμετρο $N\Lambda$ κύκλου παίρνουμε δύο σημεία P και Σ που ισαπέχουν από το κέντρο K. Από σημείο Μτης περιφέρειας φέρουμε τις τέμνουσες MPA και $M\Sigma B$. Να δείξετε ότι:

$$\frac{MP}{M\Sigma} = \frac{\Sigma B}{PA}$$

<u>Απάντηση</u>

Αφού $KP = K\Sigma$ και $KN = K\Lambda = R$, έπεται ότι $P\Lambda = \Sigma N$ και $NP = \Lambda\Sigma$.

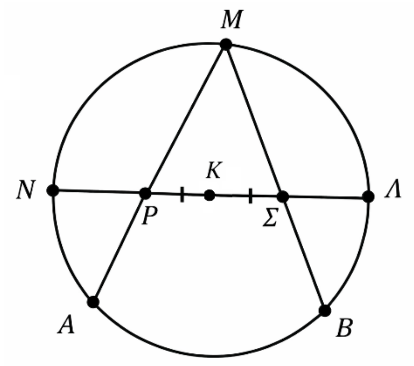
Τότε,

$$\begin{cases} (MP)\cdot(PA) = (NP)\cdot(P\Lambda) \\ (M\Sigma)\cdot(\Sigma B) = (\Lambda\Sigma)\cdot(\Sigma N) \end{cases} \Rightarrow (MP)\cdot(PA) = (M\Sigma)\cdot(\Sigma B)$$

$$\Rightarrow \frac{MP}{M\Sigma} = \frac{\Sigma B}{PA}$$

Διαφορετικά:

$KP = K\Sigma = \alpha$. Τότε, από τη δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (K, R) έχουμε: $(MP)\cdot(PA) = R^2 - \alpha^2$ και από τη δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο (K, R) έχουμε: $(M\Sigma)\cdot(\Sigma B) = R^2 - \alpha^2$ και το αποτέλεσμα έπεται.



5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ.$ Ο κύκλος, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $Α$ και τα μέσα $Μ,\ Ν$ των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ,$ αντίστοιχα, εφάπτεται της $ΒΓ$ στο σημείο $Δ.$ Να αποδείξετε ότι:

(α) Το σημείο τομής των $ΜΝ$ και $ΑΔ$ είναι μέσο της $ΑΔ.$

(β) $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ)$

Απάντηση

(α) Από γνωστό μας Θεώρημα είναι $(ΜΝ) \parallel= \frac{(ΒΓ)}{2}$ (αφού το $(ΜΝ)$ ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών του τριγώνου). Έτσι, αφού το $Μ$ είναι το μέσον της $(ΑΒ),$ έπεται ότι το $Ξ$ είναι το μέσον της $(ΑΔ)$.

(β) Από το ίδιο Θεώρημα, έχουμε:

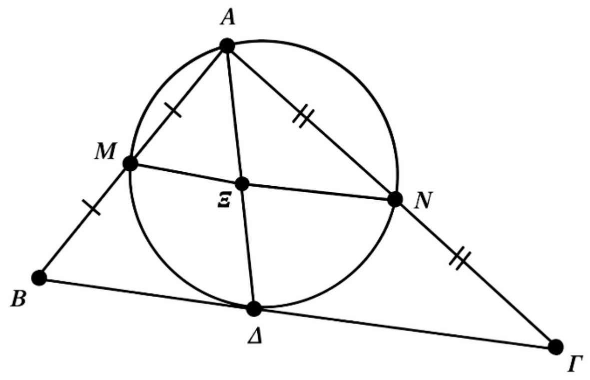
$$(ΜΞ) \parallel= \frac{(ΒΔ)}{2} \quad και \quad (ΞΝ) \parallel= \frac{(ΔΓ)}{2}$$

Αλλά οι $(ΑΔ)$ και $(ΜΝ)$ είναι τέμνουσες του κύκλου, τότε

$$\underbrace{(ΞΑ)}_{\frac{(ΑΔ)}{2}} \cdot \underbrace{(ΞΔ)}_{\frac{(ΑΔ)}{2}} = \underbrace{(ΞΜ)}_{\frac{(ΒΔ)}{2}} \cdot \underbrace{(ΞΝ)}_{\frac{(ΔΓ)}{2}}$$

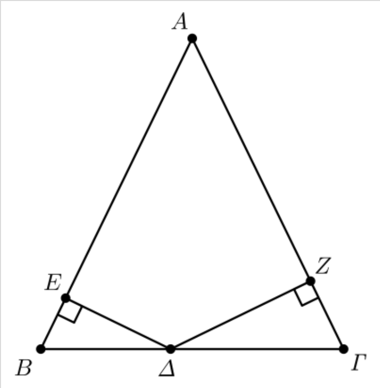
και άρα

$$(ΑΔ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΔΓ)$$



Δραστηριότητες σελ. 94-97 (Ενότητας)

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Από τυχαίο σημείο $Δ$ της $ΒΓ$ φέρουμε τη $ΔΕ$ κάθετη στην $ΑΒ$ και τη $ΔΖ$ κάθετη στην $ΑΓ$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΒΔΕ$ και $ΓΔΖ$ είναι όμοια.



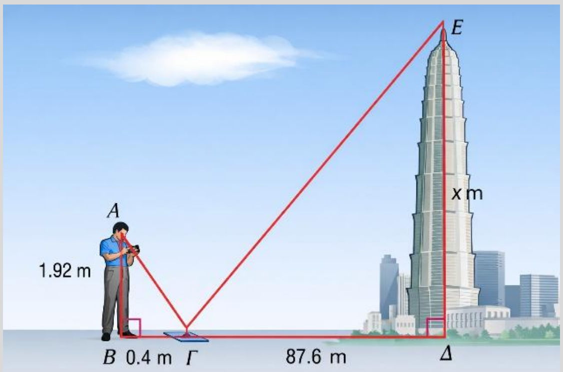
<u>Απάντηση</u>

Τα τρίγωνα $ΒΔΕ$ και $ΓΔΖ$ είναι όμοια:

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{Γ} \text{ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)} \\ Δ\hat{E}B = Δ\hat{Z}Γ = 90° \end{cases}$$

και το συμπέρασμα έπεται από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων.

2. Ο Λίνος παρατηρεί μέσα από έναν καθρέφτη την κορυφή ενός κτηρίου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του κτηρίου.

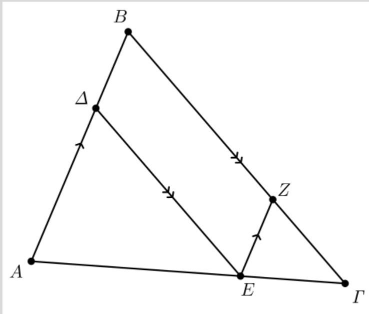


<u>Απάντηση</u>

Επειδή ο καθρέφτης είναι οριζόντιος, η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης. Άρα τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΕΔΓ$ είναι **όμοια** (γωνία–γωνία). Από την αναλογία των πλευρών τους:

$$\frac{AB}{BΓ} = \frac{EΔ}{ΓΔ} \Rightarrow \frac{1.92}{0.4} = \frac{x}{87.6} \Rightarrow x = \frac{(1.92) \cdot (87.6)}{0.4} = 420.48\ m$$

3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημεία $Δ, Ε$ και $Ζ$ πάνω στις πλευρές του $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$, αντίστοιχα, ώστε $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και $ΕΖ \parallel ΑΒ$. Αν $ΑΒ = 15$ m, $ΑΔ = 10$ m και $ΒΓ = 20$ m, τότε να υπολογίσετε το μήκος του $ΒΖ$.



Απάντηση

1ος τρόπος: με χρήση του Θεωρήματος του Θαλή

Από το Θεώρημα του Θαλή, αφού $ΕΖ \parallel ΑΒ$:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΖΒ}{ΒΓ} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΖΒ}{20}}$$

Από το Θεώρημα του Θαλή, αφού $ΔΕ \parallel ΒΓ$:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}}$$

Από τα πιο πάνω:

$$\frac{ΖΒ}{20} = \frac{2}{3} \Rightarrow (\boldsymbol{ΖΒ}) = \boldsymbol{\frac{40}{3}} \textbf{ m}.$$

2ος τρόπος: με ομοιότητα τριγώνων

Ομοιότητα τριγώνων $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$:

Εφόσον $ΔΕ \parallel ΒΓ$:

- $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Β}Γ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες)
- $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Γ}Β$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες)

Άρα τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια (1ο κριτήριο ομοιότητας/Γ–Γ).

Επομένως ισχύει η αναλογία αντίστοιχων πλευρών:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{2}{3}. \quad (1)$$

Ομοιότητα τριγώνων $ΓΕΖ$ και $ΓΑΒ$:

Εφόσον $ΕΖ \parallel ΑΒ$:

- $Γ\hat{Ε}Ζ = Γ\hat{Α}Β$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες)
- $Γ\hat{Ζ}Ε = Γ\hat{Β}Α$ (εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες)

Άρα τα τρίγωνα $ΓΕΖ$ και $ΓΑΒ$ είναι όμοια (1ο κριτήριο ομοιότητας/Γ–Γ).

Επομένως ισχύει η αναλογία αντίστοιχων πλευρών:

$$\frac{ΓZ}{ΓB}=\frac{ΓE}{ΓA}. \quad (2)$$

Όμως:

$$ΓE=ΓA-AE.$$

άρα η (2) δίνει

$$\frac{ΓZ}{ΓB}=\frac{ΓE}{ΓA}=\frac{ΓA-AE}{ΓA}=\frac{ΓA}{ΓA}-\frac{AE}{ΓA}=1-\frac{AE}{ΓA} \quad (3).$$

Από τις (1) και (3):

$$\frac{AE}{ΓA}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{ΓE}{ΓA}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

Άρα:

$$\frac{ΓZ}{ΓB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{ΓZ}{20}=\frac{1}{3}\Rightarrow \boldsymbol{ΓZ=\frac{20}{3}}.$$

Τελικά:

$$BZ=BΓ-ΓZ=20-\frac{20}{3}=\frac{60-20}{3}=\frac{40}{3}\text{ m.}$$

4. Στη διαγώνιο $BΔ$ ενός παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ παίρνουμε σημείο P, ώστε το BP να είναι τετραπλάσιο του $ΔP$. Αν η ευθεία $ΓP$ τέμνει την $AΔ$ στο σημείο E, να δείξετε ότι:

$$(EP)=\frac{1}{5}(EΓ)$$

<u>Απάντηση</u>

Τα τρίγωνα $ΓBP$ και $EΔP$ είναι όμοια:

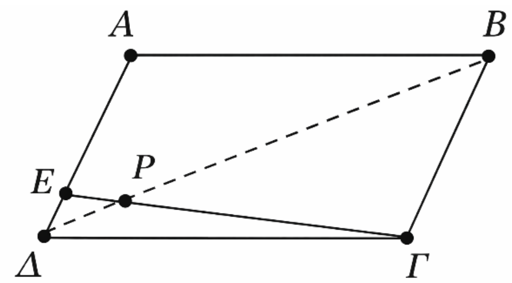
$Γ\hat{B}P=E\hat{Δ}P$ (εντός εναλλάξ γωνίες, $AB \parallel ΔΓ$)

$B\hat{P}Γ=E\hat{P}Δ$ (κατά κορυφήν γωνίες)

(1ο κριτήριο ομοιότητας/Γ–Γ) και άρα από την ομοιότητα των πλευρών τους:

$$\frac{EP}{ΓP}=\frac{PΔ}{PB}\Rightarrow\frac{EP}{ΓP}=\frac{PΔ}{4PΔ}\Rightarrow EP=\frac{ΓP}{4}\Rightarrow EP=\frac{1}{4}(EΓ-EP)$$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}EP=\frac{1}{4}EΓ\Rightarrow\ EP=\frac{1}{5}EΓ$$



5. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $\hat{A} = \hat{Δ} = 90°.$ Αν οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα, να αποδείξετε ότι:

$$(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΑΒ)$$

Απάντηση

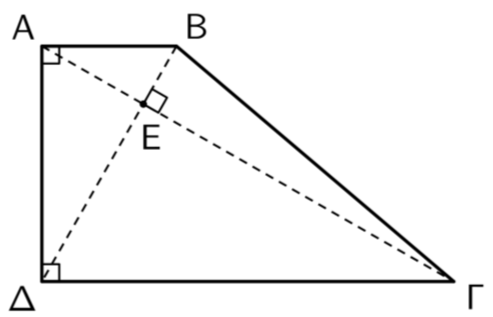
Τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι όμοια:

$\hat{A} = \hat{Δ} = 90°$

$B\hat{Δ}A = A\hat{Γ}Δ$ (αν δύο γωνίες έχουν αντίστοιχα τις πλευρές τους κάθετες, τότε οι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή κάθε μία από τις δύο γωνίες είναι συμπληρωματική της γωνίας που σχηματίζουν οι διαγώνιοι, άρα ίσες)

(1ο κριτήριο ομοιότητας/Γ–Γ) και άρα από την ομοιότητα των πλευρών τους:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ} \Rightarrow (ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΑΒ).$$



6. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(Κ, R)$. Αν η $ΑΕ$ είναι η κάθετη από το $Α$ στη $ΒΔ$ και επιπλέον ισχύει ότι:

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΕΒ}$$

να δείξετε ότι η $ΑΓ$ είναι διάμετρος.

Απάντηση

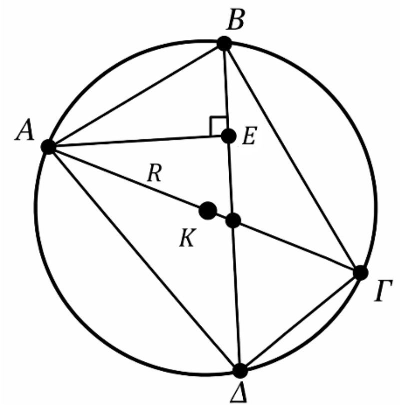
Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΚΒ$ και $ΑΓΔ$ είναι όμοια. Είναι $A\hat{B}Δ = A\hat{Γ}Δ$ (βαίνουν στο ίδιο τόξο, το μικρό τόξο $ΑΔ$) και η υπόθεση

$$\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{ΓΔ}{ΚΒ}$$

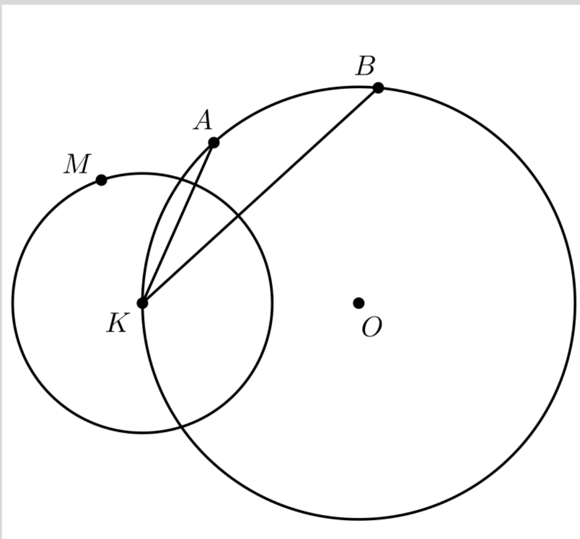
μας λέει ότι οι ομόλογες πλευρές των τριγώνων που περιέχουν τις πιο πάνω γωνίες είναι ανάλογες. Έτσι, από το 1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων,

$ΑΚΒ \approx ΑΓΔ$ και άρα $A\hat{K}B = A\hat{Δ}Γ$, δηλαδή $A\hat{Δ}Γ = 90°$.

Άρα, η γωνιά $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και ορθή, συνεπώς, η $A\Gamma$ είναι διάμετρος (αν μια γωνία είναι εγγεγραμμένη σε κύκλο και είναι ορθή, τότε η απέναντι πλευρά (η υποτείνουσα) είναι διάμετρος του κύκλου).



7. Ένας κύκλος (O, ρ) διέρχεται από το κέντρο κύκλου (K, R). Αν η εφαπτομένη του κύκλου (K, R) σε ένα σημείο του M τέμνει τον κύκλο (O, ρ) σε σημεία A και B, να δείξετε ότι το γινόμενο $(KA)(KB)$ είναι σταθερό.

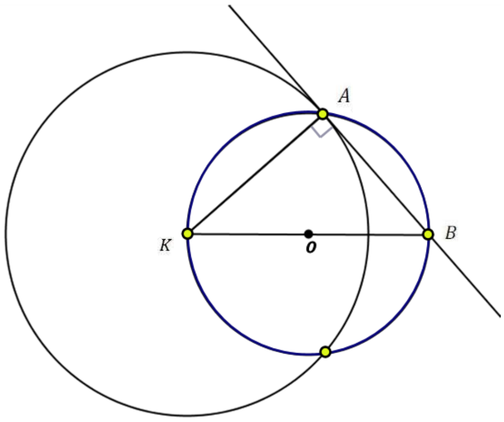


<u>Απάντηση</u>

Περίπτωση 1:

Αν η εφαπτομένη είναι στο κοινό σημείο των δύο κύκλων, τότε το σημείο M ταυτίζεται με το σημείο A. Έτσι, η χορδή AB είναι διάμετρος του κύκλου (O, ρ).

Τότε, εύκολα βλέπουμε (αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$είναι ορθογώνιο) ότι $(KA)(KB) = 2\rho R$.



Περίπτωση 2:

Αν η εφαπτομένη είναι στο σημείο M είναι κάθετη στη διάκεντρο δ των δύο κύκλων, τότε $(MA) = (MB)$, αφού το τρίγωνο $\triangle AKB$ είναι ισοσκελές. Αλλά (από το Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$(MA)^2 = (KA)^2 - (KM)^2 = (KA)^2 - R^2$$

$\Rightarrow (KA)^2 = (MA)^2 + R^2$, δηλαδή:

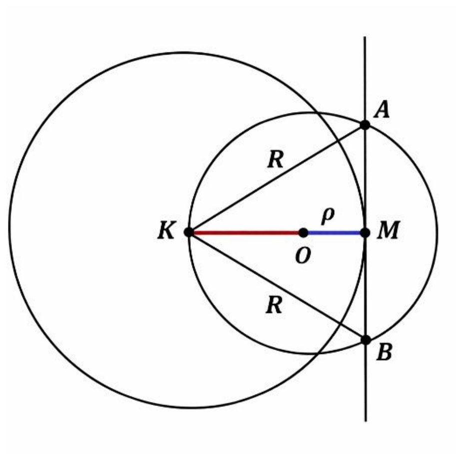
$$(MA)(MB) + R^2 = (KA)(KB)$$

Όμως, (δύναμη σημείου προς κύκλο)

$$(MA)(MB) = R(2\rho - R)$$

και από τα πιο πάνω:

$$(KA)(KB) = 2\rho R$$



Περίπτωση 3:

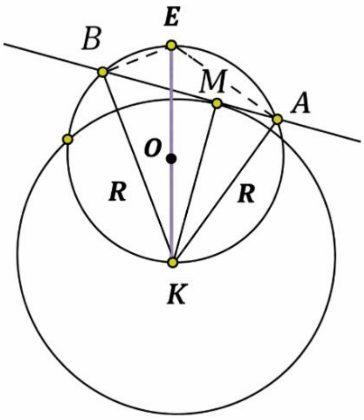
Αν το σημείο M βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (O, ρ), τότε φέρουμε τη διάμετρο (KE) του κύκλου (O, ρ).

Τότε

$$\left.\begin{cases} B\hat{A}K = \hat{E} \text{ (βαίνουν στο ίδιο τόξο)} \\ B\widehat{M}K = \hat{B} = 90° \text{ (αφού } (KM) \perp (AB) \text{ και η } \hat{B} \\ \text{βαίνει σε ημικύκλιο)} \end{cases}\right. \Rightarrow KMA \approx KBE$$

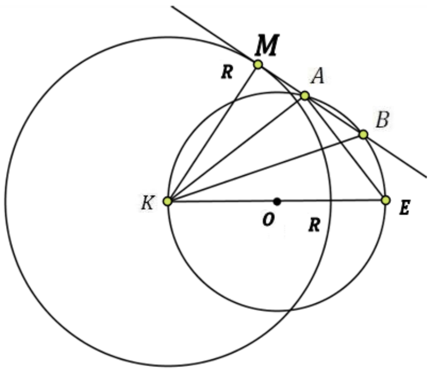
και άρα

$$\frac{\overbrace{KM}^{R}}{KB} = \frac{KA}{\underbrace{KE}_{2\rho}} \Rightarrow (KA)(KB) = 2\rho R$$



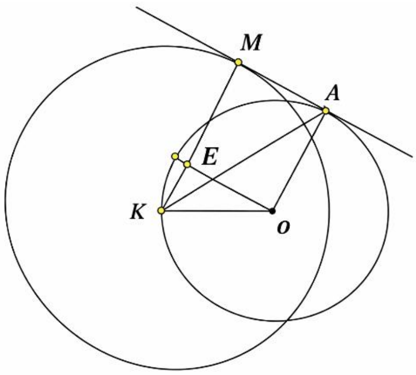
Περίπτωση 4:

Αν το σημείο M βρίσκεται εντός του κύκλου (K,R) αλλά εκτός του κύκλου (O,ρ). Εύκολα δείχνουμε ότι $KMB \approx KAE$ και το αποτέλεσμα έπεται από την ομοιότητα των πλευρών των τριγώνων.



Περίπτωση 5:

Αν η (AM) εφάπτεται και στους δυο κύκλους. Τότε $(OA)=(OK)=\rho$ και $(KT)=(AM)=R-\rho$. Φέρουμε $(OE)\perp(KM)$, εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αποτέλεσμα έπεται.



8. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι κορυφές τριγώνου όμοιου με το $ΑΒΓ$ και να βρείτε τον λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.

Απάντηση

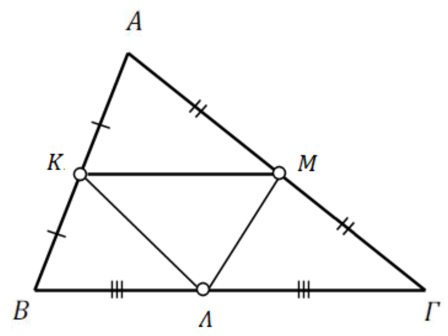
Έστω $Κ, Λ$ και $Μ$ τα μέσα των πλευρών $ΑΒ, ΑΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα. Τότε

$$ΚΜ \parallel = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{ΚΜ}}{\boldsymbol{ΒΓ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \qquad ΚΛ \parallel = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{ΚΛ}}{\boldsymbol{ΑΓ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \; και \; ΜΛ \parallel = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{ΜΛ}}{\boldsymbol{ΑΒ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

και άρα

$$\frac{\boldsymbol{ΚΜ}}{\boldsymbol{ΒΓ}} = \frac{\boldsymbol{ΚΛ}}{\boldsymbol{ΑΓ}} = \frac{\boldsymbol{ΜΛ}}{\boldsymbol{ΑΒ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

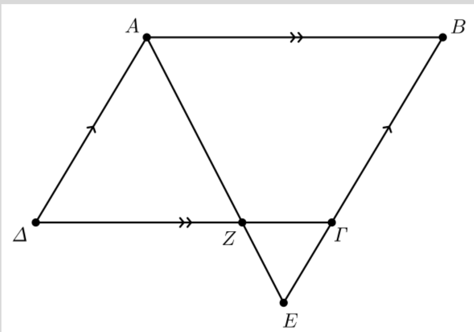
δηλαδή $ΚΜΛ \approx ΑΒΓ$ (3ο κριτήριο ομοιότητας) με λόγο ομοιότητας $\boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.



9. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία που τέμνει τη $ΔΓ$ στο σημείο $Ζ$ και την προέκταση της $ΒΓ$ στο Ε. Να δείξετε ότι:

(α) $(ΖΑ)(ΖΓ) = (ΖΔ)(ΖΕ)$

(β) $(ΑΕ)(ΑΔ) = (ΒΕ)(ΑΖ)$



Απάντηση

(α) $\widehat{\boldsymbol{Z_1}} = \widehat{\boldsymbol{Z_2}}$ $(κατα\ κορυφήν\ γωνίες)$

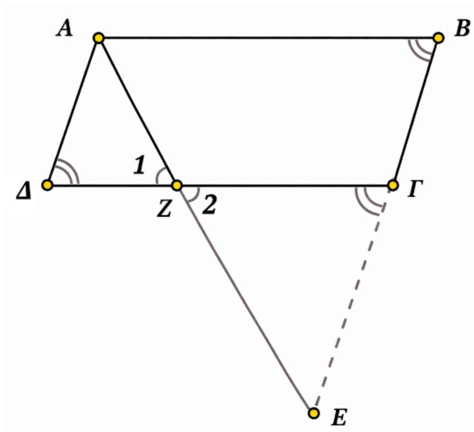
$$\left.\begin{cases} Δ\widehat{Γ}Ε = \widehat{Β} \ (εντός\ εκτός\ και\ επι\ τα\ αυτά\ γωνίες) \\ \widehat{Β} = \widehat{Δ} \ (απέναντι\ γωνίες\ παραλληλογράμμου) \end{cases}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Δ\widehat{Γ}Ε = \widehat{Δ}}$$

Έτσι, τα τρίγωνα $ΖΔΑ$ και $ΖΓΕ$ είναι όμοια (1ο κριτήριο ομοιότητας) και άρα, από την ομοιότητα των πλευρών:

$$\frac{ΖΓ}{ΖΔ} = \frac{ΖΕ}{ΖΑ} \Rightarrow (ΖΑ)(ΖΓ) = (ΖΔ)(ΖΕ)$$

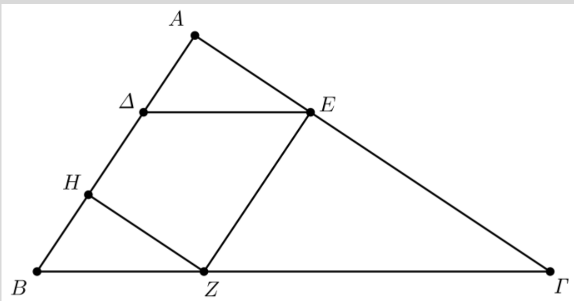
(β) Ομοίως, δείχνουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΔ$ είναι όμοια (1ο κριτήριο) και άρα, από την ομοιότητα των πλευρών:

$$\frac{ΑΕ}{ΑΖ} = \frac{ΒΕ}{ΑΔ} \Rightarrow (ΑΕ)(ΑΔ) = (ΒΕ)(ΑΖ)$$



10. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από σημείο $Δ$ της πλευράς $ΑΒ$ φέρουμε $ΔΕ \parallel ΒΓ$, όπου $Ε$ σημείο της $ΑΓ$. Από το σημείο $Ε$ φέρουμε $ΕΖ \parallel ΑΒ$, όπου $Ζ$ σημείο της $ΒΓ$. Από το σημείο $Ζ$ φέρουμε $ΖΗ \parallel ΓΑ$, όπου $Η$ σημείο της $ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ} = \frac{ΗΒ}{ΗΑ}.$$



Απάντηση

- $Α\hat{Δ}Ε = Α\hat{Β}Γ$ $(ΔΕ \parallel ΒΓ)$
- $Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Γ}Β$ $(ΔΕ \parallel ΒΓ)$

Άρα

$$ΑΔΕ \approx ΑΒΓ \;\; (Γ–Γ)$$

και επομένως, από την αναλογία των πλευρών τους:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}\Rightarrow ΑΕ=ΑΓ\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\quad (1).$$

(Διαφορετικά, η αναλογία προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Θαλή).

$$(1)\Rightarrow \boldsymbol{ΓΕ=ΑΓ-ΑΕ=ΑΓ-ΑΓ\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=ΑΓ\left(1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\right)}\quad \boldsymbol{(2)}$$

Ομοίως, αφού $ΕΖ \parallel ΑΒ$:

$$\boldsymbol{\frac{ΓΖ}{ΓΒ}=\frac{ΓΕ}{ΓΑ}}\quad \boldsymbol{(3)}$$

$$(2)\Rightarrow \frac{ΓΖ}{ΓΒ}=\frac{ΑΓ}{ΓΑ}\left(1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\right)=1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$$

$$\Rightarrow \frac{ΓΖ}{ΓΒ}=1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\Rightarrow \frac{ΓΒ-ΒΖ}{ΓΒ}=1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\Rightarrow \frac{ΓΒ}{ΓΒ}-\frac{ΒΖ}{ΓΒ}=1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{ΒΖ}{ΓΒ}=1-\frac{ΑΔ}{ΑΒ}\Rightarrow \boldsymbol{\frac{ΒΖ}{ΓΒ}=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}}\quad \boldsymbol{(4)}$$

αφού $ΖΗ \parallel ΓΑ$:

$$\frac{ΒΗ}{ΒΑ}=\frac{ΒΖ}{ΒΓ}\Rightarrow \boldsymbol{ΒΗ=ΒΑ\frac{ΒΖ}{ΓΒ}}\quad \boldsymbol{(5)}$$

και άρα από τις (4),(5):

$$ΒΗ=ΒΑ\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=ΑΔ$$

Τότε

$$ΗΑ=ΑΒ-ΒΗ=ΑΒ-ΑΔ=ΔΒ.$$

Άρα

$$\frac{ΔΑ}{ΔΒ}=\frac{ΒΗ}{ΗΑ}.$$

11. Ίδια με την άσκηση 8, σελ. 59.

12. Οι διαγώνιοι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) τέμνονται στο $Ε$. Αν $ΑΒ=4$ cm, $ΒΔ=8$ cm και $ΓΔ=12$ cm, να υπολογίσετε το μήκος της $ΒΕ$.

Απάντηση

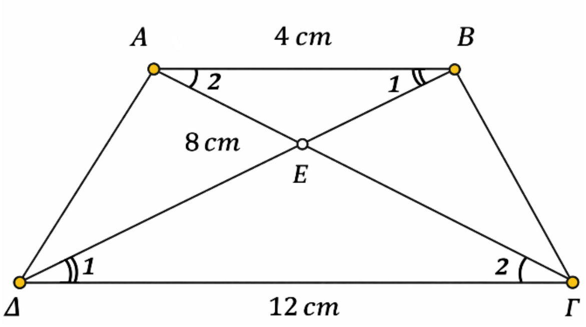
Από την ομοιότητα των τριγώνων $ΑΒΕ$ και $ΓΔΕ$:

$$\widehat{Β_1}=\widehat{Δ_1}\ (εντός\ εναλλάξ)\ και\ \widehat{Α_2}=\widehat{Γ_2}\ \ (εντός\ εναλλάξ)$$

($1^ο$ κριτήριο ομοιότητας) και άρα από το λόγο ομοιότητας:

$$\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{ΒΕ}{ΕΔ}\Rightarrow \frac{4}{12}=\frac{ΒΕ}{ΒΔ-ΒΕ}\Rightarrow \frac{1}{3}=\frac{ΒΕ}{8-ΒΕ}8-ΒΕ=3ΒΕ$$

$$\Rightarrow 4ΒΕ=8\Rightarrow \boldsymbol{ΒΕ=2cm}$$



13. Από σημείο M που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου BA κύκλου (K, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $M\Gamma$. Η κάθετος πάνω στη MA στο σημείο M τέμνει την $A\Gamma$ στο E. Να δείξετε ότι:

$$(M\Gamma)^2 - (MA)^2 = (A\Gamma)(AE).$$

Απάντηση

Θα δείξω ότι $(MA)^2 - (M\Gamma)^2 = (A\Gamma) \cdot (AE)$, ισοδύναμα

$$(M\Gamma)^2 = (MA)^2 + (A\Gamma) \cdot (AE)$$

Είναι (δύναμη σημείου προς κύκλο):

$$(M\Gamma)^2 = (MB) \cdot (MA)$$

και άρα αρκεί να δείξω ότι $(MB) \cdot (MA) = (MA)^2 + (A\Gamma) \cdot (AE)$.

Όμως:

$$(MB) \cdot (MA) = (MA)^2 + (A\Gamma) \cdot (AE)$$

$$\Leftrightarrow [(MA) - (BA)] \cdot (MA) = (MA)^2 + (A\Gamma) \cdot (AE)$$

$$\Leftrightarrow (MA)^2 - (BA) \cdot (MA) = (MA)^2 + (A\Gamma) \cdot (AE)$$

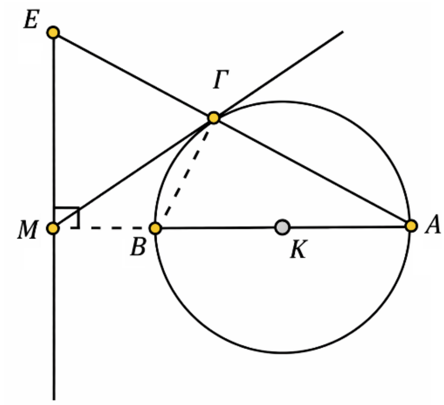
$$\Leftrightarrow (A\Gamma) \cdot (AE) = -(BA) \cdot (MA)$$

Αλλά, το τετράπλευρο $B\Gamma EM$ είναι εγγράψιμο:

- $B\hat{\Gamma}A = 90°$ (βαίνει σε ημικύκλιο)
- $B\hat{M}E = 90°$ (κατασκευή, κάθετη στο MA)

Άρα $B\hat{\Gamma}A = B\hat{M}E = 90°$.

Αφού το τετράπλευρο $B\Gamma EM$ είναι εγγράψιμο, η $(A\Gamma) \cdot (AE) = -(BA) \cdot (MA)$ είναι αληθής. Το αρνητικό πρόσημο δεν παίζει ρόλο (δηλώνει προσανατολισμό).



14. Από σημείο M που βρίσκεται έξω από κύκλο φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα MA και τέμνουσα $MB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

$$(M\Gamma)(AB)^2 = (MB)(A\Gamma)^2.$$

Απάντηση

$$\begin{cases} B\hat{A}M = \hat{\Gamma} \ (\textit{Θεώρημα χορδής + εφαπτομένης}) \\ \hat{M} = \hat{M} \ (\textit{κοινή}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow MAB \approx M\Gamma\Delta \Rightarrow \frac{MA}{M\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \Rightarrow (\boldsymbol{MA}) = \frac{(\boldsymbol{M\Gamma}) \cdot (\boldsymbol{AB})}{(\boldsymbol{A\Gamma})} \ (\mathbf{1})$$

Επίσης (δύναμη σημείου προς κύκλο)

$$(\boldsymbol{MA})^2 = (\boldsymbol{MB})(\boldsymbol{M\Gamma}) \ (\mathbf{2})$$

Από τις $(\mathbf{1})$ και $(\mathbf{2})$:

$$\frac{(\boldsymbol{M\Gamma})^2 \cdot (\boldsymbol{AB})^2}{(\boldsymbol{A\Gamma})^2} = (\boldsymbol{MB}) \cdot (\boldsymbol{M\Gamma}) \Rightarrow (\boldsymbol{M\Gamma})(\boldsymbol{AB})^2 = (\boldsymbol{MB})(\boldsymbol{A\Gamma})^2$$

15. Δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB. Φέρουμε τις εφαπτόμενες Ax και By στα σημεία A και B, αντίστοιχα. Από σημείο Γ του μικρότερου τόξου AB φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τη Ax και By που τέμνουν την AB στα σημεία Δκαι E, αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και ΓEB είναι όμοια

(β) $(\Gamma E)^2 = (A\Delta)(BE)$.

Απάντηση

(α) Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και ΓEB είναι όμοια:

$$\left\{\begin{array}{l}\widehat{B_1} = \widehat{A_1} \ (\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\ \chi o\rho\delta\acute{\eta}\varsigma + \varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta\varsigma) \\ \\ \widehat{\Gamma_1} = \widehat{B_1} \ (\varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\ \varepsilon\nu\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\xi)\end{array}\right. \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{\Gamma_1}$$

Ομοίως, δείχνω ότι $\Gamma\hat{\Delta}A = \Gamma\hat{E}B$.

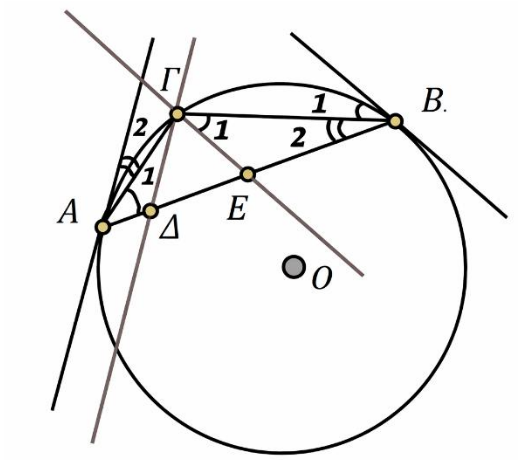
Έτσι, από το 1ο κριτήριο, έπεται ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και ΓEB είναι όμοια.

(β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $A\Gamma\Delta$ και ΓEB, έχω:

$$\frac{\Gamma E}{A\Delta} = \frac{EB}{\Delta\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \Rightarrow (\Gamma E)\cdot(\Delta\Gamma) = (EB)\cdot(A\Delta).$$

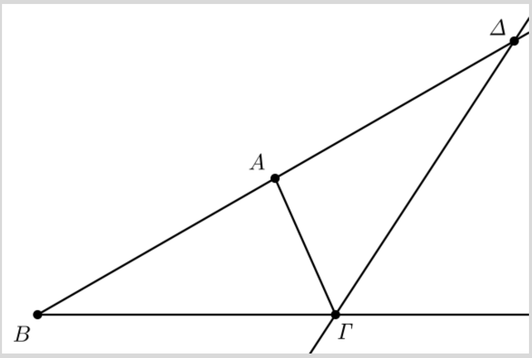
Αλλά $(\Delta\Gamma) = (\Gamma E)$ (αφού το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές-παρά τη βάση γωνίες ίσες) και τότε η πιο πάνω γίνεται

$$(\boldsymbol{\Gamma E})^2 = (\boldsymbol{EB})\cdot(\boldsymbol{A\Delta})$$



16. Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας του τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, του οποίου οι αποστάσεις από τα άκρα της πλευράς αυτής είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές του τριγώνου.

(Υπόδειξη: Να φέρετε ευθεία παράλληλη από την κορυφή του τριγώνου προς την εξωτερική διχοτόμο, ώστε να τέμνει το τρίγωνο.)



Απάντηση

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνω την $B\Gamma$ προς το Γ και έστω ότι η **εξωτερική** διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο σημείο Δ.

Θα δείξω ότι:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Φέρνω από το Γ ευθεία ΓE παράλληλη προς την εξωτερική διχοτόμο $A\Delta$, ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E.

Επειδή $\Gamma E \parallel A\Delta$,

$$E\hat{\Gamma}A=\Delta\hat{A}\Gamma \quad \text{και} \quad A\hat{\Gamma}E=A\hat{\Delta}\Gamma.$$

Όμως, Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της **εξωτερικής** γωνίας στο A, άρα:

$$\Delta\hat{A}\Gamma=E\hat{A}B.$$

(διότι η AE είναι προέκταση της AB και η $A\Delta$ διχοτομεί την εξωτερική γωνία μεταξύ AB και $A\Gamma$).

Άρα:

$$E\hat{\Gamma}A=E\hat{A}B.$$

Επομένως $E\Gamma A \approx EAB$ (Γ–Γ), άρα:

$$\frac{E\Gamma}{EB}=\frac{A\Gamma}{AB}. \qquad (1)$$

Επίσης, αφού $\Gamma E \parallel A\Delta$, τα τρίγωνα $\Gamma\Delta B$ και EAB είναι όμοια (Γ–Γ), οπότε:

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{BE}{E\Gamma}. \qquad (2)$$

Από την (1) παίρνω:

$$\frac{BE}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Αντικαθιστώ στη (2):

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Άρα, οι αποστάσεις του σημείου Δ από τα άκρα B,Γ της πλευράς $B\Gamma$ είναι ανάλογες προς τις προσκείμενες πλευρές $AB, A\Gamma$ του τριγώνου:

$$\boxed{\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}}$$

Λύση προβλήματος σελ. 98

ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΚΗΛΙΔΑ

Ένα πετρελαιοφόρο προσέκρουσε σε έναν βράχο στη θάλασσα με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μία τρύπα στις δεξαμενές αποθήκευσης πετρελαίου. Το πετρελαιοφόρο βρισκόταν γύρω στα 65 km μακριά από τη ξηρά. Μετά από μερικές μέρες, το πετρέλαιο εξαπλώθηκε, όπως φαίνεται στο κάτω σχήμα.

(Κλίμακα: 1 cm αντιστοιχεί σε 10 km)

Να εκτιμήσεις, χρησιμοποιώντας την κλίμακα του χάρτη, το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας σε τετραγωνικά χιλιόμετρα (km²).

PISA 2012

Απάντηση

Η ιδέα είναι μα μετρήσουμε με το χάρακα (!) και να προσεγγίσουμε το εμβαδόν της πετρελαιοκηλίδας με εμβαδά γνωστών σχημάτων έχοντας υπόψιν ότι 1cm=1km.

Το εμβαδόν της κηλίδας είναι περίπου 45 cm^2.

Μετατροπή σε πραγματικό εμβαδόν $(1 \text{ cm}^2 \leftrightarrow (10 \text{ km})^2 = 100 \text{ km}^2)$:

$$45 \times 100 = 4500 \text{ km}^2$$

Δραστηριότητες σελ. 99-100 (Εμπλουτισμού)

1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Από το $Γ$ φέρουμε τη $ΓΕ \perp ΒΔ$ ($Ε$ σημείο της $ΒΔ$). Η προέκταση της $ΓΕ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο $Η$ και την προέκταση της $ΔΑ$ στο $Ζ$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\frac{ΒΕ}{ΕΗ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ}$

(β) $(ΓΕ)^2 = (ΕΗ)(ΕΖ)$

<u>Απάντηση</u>

(α) Θα δείξω ότι $ΗΒΕ \approx ΔΕΖ$:

$$\begin{cases} Β\hat{Ε}Η = Δ = 90° \\ Η\hat{Β}Ε = \hat{Ζ}\ (συμπληρωματικές\ της\ Ε\hat{Ζ}Δ) \end{cases} \xRightarrow{1ο\ κριτήριο} ΗΒΕ \approx ΔΕΖ$$

και άρα, από την ομοιότητα των πλευρών:

$$\boldsymbol{\frac{ΕΒ}{ΕΗ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ}}\left(= \frac{ΒΗ}{ΖΔ}\right)$$

(β) Εύκολα δείχνουμε ότι $ΕΓΔ \approx ΕΒΓ$ και άρα

$$\boldsymbol{\frac{ΕΓ}{ΕΒ} = \frac{ΕΔ}{ΕΓ} \Rightarrow (ΓΕ)^2 = (ΕΒ)\cdot(ΕΔ) \quad (1)}$$

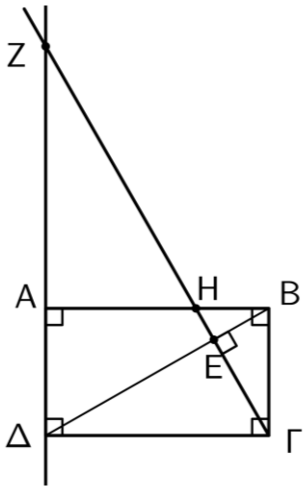
Από το ερώτημα (α):

$$\boldsymbol{\frac{ΕΒ}{ΕΗ} = \frac{ΕΖ}{ΕΔ} \Rightarrow (ΕΒ)(ΕΔ) = (ΕΗ)(ΕΖ) \quad (2)}$$

και από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$\boldsymbol{(ΓΕ)^2 = (ΕΗ)(ΕΖ)}$$

που είναι και το ζητούμενο.



2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ = 2α$ και $ΒΓ = α$. Από το $Α$ φέρουμε κάθετη στη διαγώνιο $ΒΔ$, που τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Ε$. Να δείξετε ότι $(ΔΓ) = 4(ΔΕ)$.

Απάντηση

Θα δείξω ότι $ΑΒΔ \approx ΑΔΕ$:

$\hat{A} = \hat{Δ} = 90°$

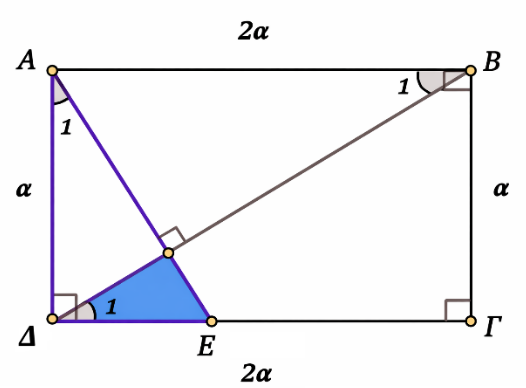
$\widehat{B_1} = Α\hat{Ε}Δ$ (αφού $ΑΕ \perp ΒΔ$ και $ΕΔ \parallel ΑΒ$)

Άρα, από το 1ο κριτήριο ομοιότητας (Γ-Γ), $ΑΒΔ \approx ΑΔΕ$ και άρα

$$\frac{\boldsymbol{ΑΔ}}{\boldsymbol{ΑΒ}} = \frac{\boldsymbol{ΔΕ}}{\boldsymbol{ΑΔ}} \Longrightarrow \frac{\boldsymbol{α}}{\boldsymbol{2α}} = \frac{\boldsymbol{ΔΕ}}{\boldsymbol{α}} \Longrightarrow \boldsymbol{2(ΔΕ) = α}$$

Αλλά, $(\boldsymbol{ΔΓ}) = \boldsymbol{2α}$ και τελικά,

$$(\boldsymbol{ΔΓ}) = \boldsymbol{4(ΔΕ)}.$$



3. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος $ΑΔ$ τέμνει τον κύκλο στο σημείο $Τ$, έτσι ώστε $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ)$. Να αποδείξετε ότι $(ΑΤ)^2 = 2(ΤΓ)^2$.

Απάντηση

Οι χορδές $ΑΔΤ$ και $ΒΔΓ$ τέμνουσες του κύκλου

$$\Rightarrow (ΔΑ) \cdot (ΔΤ) = (ΔΒ) \cdot (ΔΓ)$$

(δύναμη σημείου προς κύκλο).

Αλλά από υπόθεση είναι $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ) \cdot (ΔΓ)$ και άρα η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την προηγούμενη δίνουν $(ΑΔ)^2 = (ΑΔ) \cdot (ΔΤ)$.

Συνεπώς,

$$(ΑΔ) = (ΔΤ).$$

Τα τρίγωνα $ΑΤΓ$ και $ΓΤΔ$ είναι όμοια ($\hat{T}$ κοινή και $\hat{Γ} = \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ αφού $ΑΔ$ διχοτόμος) και άρα

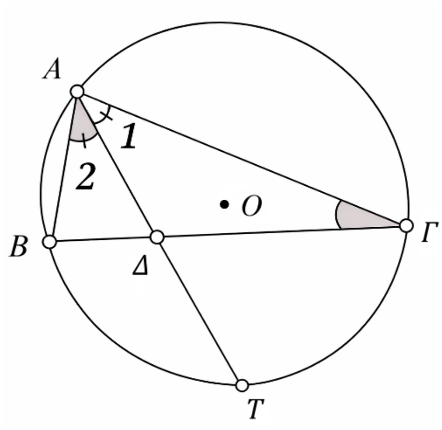
$$\frac{ΑΤ}{ΤΓ} = \frac{ΤΓ}{ΔΤ} \Rightarrow (ΤΓ)^2 = (ΑΤ) \cdot (ΔΤ) \quad (1)$$

Αλλά

$$(AT) = 2 \cdot (\Delta T) \Rightarrow (AT)^2 = 2 \cdot (AT) \cdot (\Delta T) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2):

$$(AT)^2 = 2 \cdot (T\Gamma)^2$$



4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διάμεσος AM τέμνει τον κύκλο στο σημείο T, έτσι ώστε $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι $6(MT) = \alpha\sqrt{3}$.

<u>Απάντηση</u>

Από το 1ο Θεώρημα διαμέσων έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2(AM)^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$

Από υπόθεση έχουμε $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$ και αρα οι δυο αυτές σχέσεις μας δίνουν:

$$2(AM)^2 + \frac{\alpha^2}{2} = 2\alpha^2 \;\Rightarrow\; (AM)^2 = 3\frac{\alpha^2}{4}$$

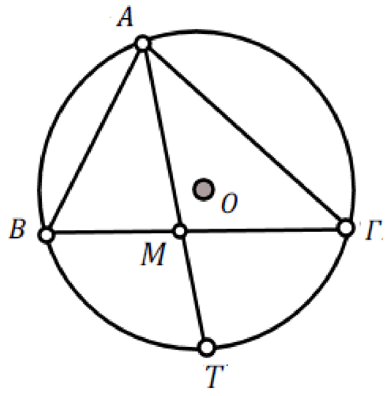
και άρα

$$(AM) = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

Αλλά, AMT και $BM\Gamma$ τέμνουσες του κύκλου

$$\Rightarrow (AM) \cdot (MT) = (MB) \cdot (M\Gamma) \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot (MT) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{6(MT) = \alpha\sqrt{3}}$$



5. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και οι διάμεσοί του $ΒΔ$ και $ΓΕ$. Αν O είναι το σημείο τομής των διαμέσων, να αποδείξετε ότι:

(α) $(ΒΟ) = 2(ΔΟ)$

(β) $\frac{ΓΕ}{ΓΟ} = \frac{3}{2}$.

Απάντηση

(α) Ξέρω ότι $(ΕΔ) \parallel = \frac{ΒΓ}{2}$, από γνωστό αποτέλεσμα, αφού $ΒΔ$ και $ΓΕ$ διάμεσοι του τριγώνου $ΑΒΓ$ *(κέντρο βάρους / ιδιότητα διαμέσων).*

Θα δείξω ότι $ΕΟΔ \approx ΒΟΓ$.

Είναι

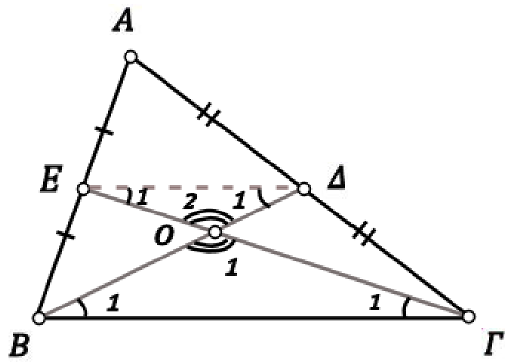
$$\left\{\begin{aligned} &\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \ (κατα\ κορυφήν) \\ &\hat{Δ} = \widehat{Β_1} \ (εντός\ εναλλάξ) \end{aligned}\right. \xRightarrow{1ο\ κριτήριο} ΕΟΔ \approx ΒΟΓ$$

και άρα

$$\frac{\boldsymbol{ΟΕ}}{\boldsymbol{ΟΓ}} = \frac{\boldsymbol{ΟΔ}}{\boldsymbol{ΟΒ}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{ΟΔ}}{\boldsymbol{ΟΒ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \Rightarrow (\boldsymbol{ΟΒ}) = \mathbf{2}(\boldsymbol{ΟΔ})$$

(β) Από την πιο πάνω σχέση ομοιότητας έχουμε επίσης ότι

$$\frac{ΟΓ}{2} = ΟΕ \Rightarrow ΓΕ = ΟΓ + \frac{ΟΓ}{2} = \frac{3ΟΓ}{2} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{ΓΕ}}{\boldsymbol{ΟΓ}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$



6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(\hat{A}=90°)$, εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Κατασκευάζουμε το ύψος του τριγώνου $ΑΔ$. Ευθεία που διέρχεται από το $Γ$ τέμνει το ύψος $ΑΔ$ σε ένα σημείο T και τον κύκλο στο σημείο P. Να αποδείξετε ότι:

$$(ΓT)(ΓP)=(ΓA)^2.$$

<u>Απάντηση</u>

Φέρουμε τη (PB). Τότε $\hat{P}=90°$ (βαίνει σε ημικύκλιο, αφού η $\hat{A}=90°$). Επίσης, $Α\hat{Δ}Γ=90°$. Κατά συνέπεια, το τετράπλευρο $PTΔB$ είναι εγγράψιμο. Έτσι,

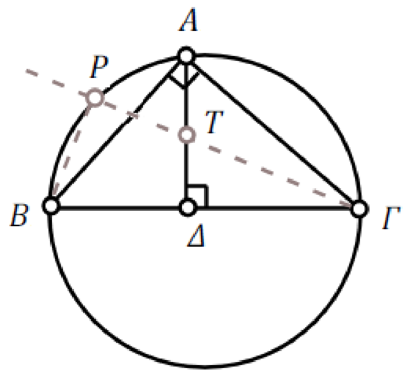
$$(ΓT)\cdot(ΓP)=(ΓΔ)\cdot(ΓB)$$

Επίσης,

$$\frac{ΑΓ}{ΓΔ}=\frac{ΓB}{ΑΓ}\Longrightarrow(ΑΓ)^2=(ΓΔ)\cdot(ΓB)$$

και άρα οι πιο πάνω σχέσεις δίνουν

$$(ΓT)\cdot(ΓP)=(ΓA)^2$$



7. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Φέρουμε τη διχοτόμο $ΑΔ$, τη διάμεσο AM και τον περιγεγραμμένο κύκλο (κ) του τριγώνου $ΑΔM$. Αν E,Z είναι τα σημεία τομής των AB και $ΑΓ$ με τον κύκλο (κ), αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $(BE)=(ΓZ)$.

<u>Απάντηση</u>

Έχουμε (δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

$$(BE)\cdot(BA)=(BΔ)\cdot(BM)$$

και αφού AM διάμεσος $\Longrightarrow(BM)=(ΓM)$ και η πιο πάνω γίνεται:

$$\boxed{(BE)\cdot(BA)=(BΔ)\cdot(ΓM)}$$

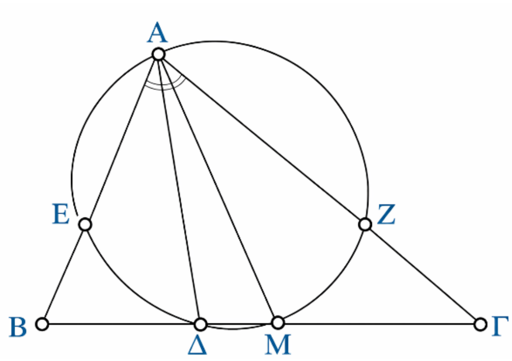
Επίσης, (δύναμη σημείου ως προς κύκλο)

$$\boxed{(ΓZ)\cdot(ΓA)=(ΓM)\cdot(ΓΔ)}$$

Διαιρώ κατά μέλη τις πιο πάνω:

$$\frac{(BE)\cdot(BA)}{(\Gamma Z)\cdot(\Gamma A)}=\frac{(B\Delta)\cdot(\Gamma M)}{(\Gamma M)\cdot(\Gamma\Delta)} \Longrightarrow \frac{BE}{\Gamma Z}=\frac{\Gamma A}{BA}\cdot\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}=1$$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{\Gamma Z}).$$



8. Θεωρούμε κύκλο (O,R) και τις χορδές του $AB,\Gamma\Delta$ που τέμνονται στο σημείο P. Αν ισχύει ότι $(PA)(P\Delta)=(PB)(P\Gamma)$, να αποδείξετε ότι οι χορδές $AB,\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

<u>Απάντηση</u>

APB και $\Gamma P\Delta$ τέμνουσες του κύκλου $\Rightarrow (\boldsymbol{PA})\cdot(\boldsymbol{PB})=(\boldsymbol{P\Gamma})\cdot(\boldsymbol{P\Delta})$.

Αλλά, την υπόθεση:

$$(\boldsymbol{PA})\cdot(\boldsymbol{P\Delta})=(\boldsymbol{PB})\cdot(\boldsymbol{P\Gamma})$$

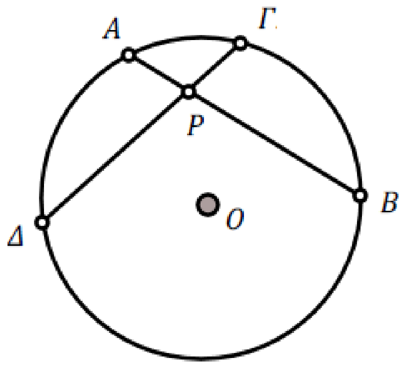
και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο αυτές σχέσεις:

$$(PA)^2=(P\Gamma)^2 \Rightarrow (\boldsymbol{PA})=(\boldsymbol{P\Gamma}).$$

Επίσης, διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις αυτές:

$$\frac{PB}{P\Delta}=\frac{P\Delta}{PB}\Rightarrow (PB)^2=(P\Delta)^2\Rightarrow (\boldsymbol{PB})=(\boldsymbol{P\Delta})$$

Έτσι, αφού τα σημεία A,P,B είναι συνευθειακά, όπως επίσης και τα Γ,P,Δ, δυνάμει των 2 σχέσεων που αποδείχτηκαν, έπεται ότι $(\boldsymbol{AB})=(\boldsymbol{\Gamma\Delta})$**.**



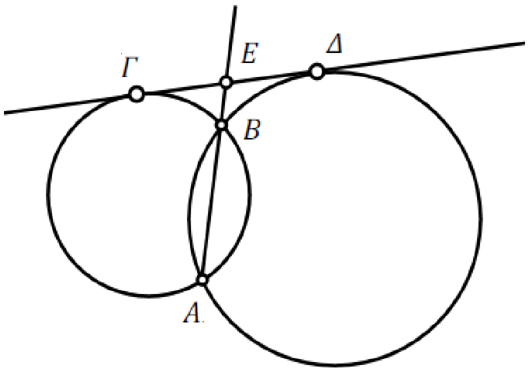
9. Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.

Απάντηση

Έστω AB η κοινή χορδή δυο κύκλων και E το σημείο τομής της προέκτασής της με την κοινή εφαπτομένη $\Gamma\Delta$ αυτών. Τότε

$$\begin{cases}(E\Gamma)^2 = (EB)\cdot(EA) \\ (E\Delta)^2 = (EB)\cdot(EA)\end{cases} \Rightarrow (E\Gamma)^2 = (E\Delta)^2 \Rightarrow (E\Gamma) = (E\Delta)$$

δηλαδή το σημείο E είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $(\Gamma\Delta)$ και το συμπέρασμα έπεται.

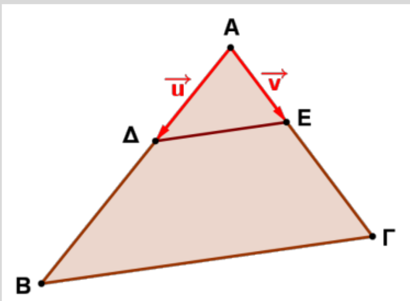


10. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$με $A\Delta = \frac{1}{3}(AB)$ και $AE = \frac{1}{3}(A\Gamma)$. Αν $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{u}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{v}$, να υπολογίσετε συναρτήσει των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα πιο κάτω (το σχήμα δεν είναι σε κλίμακα):

(α) $\overrightarrow{\Delta E}$

(β) $\overrightarrow{AB}$

(γ) $\overrightarrow{B\Gamma}$



Απάντηση

(α)
$$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$$

(β)

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{A\Delta} = 3\vec{u}$$

(γ)

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}$$

Αλλά

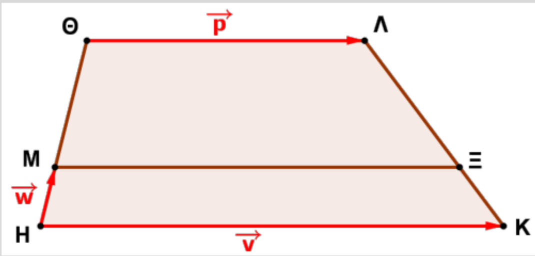
$$\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{v}, \qquad \overrightarrow{AB} = 3\vec{u}$$

Άρα

$$\overrightarrow{B\Gamma} = 3(\vec{v} - \vec{u})$$

11. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο $\Theta\Lambda K H$ με $\Theta\Lambda \parallel HK$ και $M\Xi \parallel \Theta\Lambda$. Αν $\overrightarrow{\Theta\Lambda} = \vec{\rho}$, $\overrightarrow{HK} = \vec{v}$, $\overrightarrow{HM} = \vec{w}$, $\Xi K = 2$ cm και $K\Lambda = 6$ cm, να δείξετε ότι:

$$\overrightarrow{M\Xi} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\rho} = \frac{2\vec{v} + \vec{\rho}}{3}$$



<u>Απάντηση</u>

Λόγω της ομοιότητας των δυο τραπεζίων έχουμε ότι

$$\frac{\Theta M}{\Theta H} = \frac{\Lambda\Xi}{\Lambda K} \Longrightarrow \frac{\Theta M}{\Theta H} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

και άρα

$$\overrightarrow{K\Xi} = \frac{1}{3}\overrightarrow{K\Lambda}$$

Συνεπώς,

$$\vec{w} + \overrightarrow{M\Xi} + \overrightarrow{\Xi K} = \vec{v} \Longrightarrow \overrightarrow{M\Xi} = \overrightarrow{K\Xi} + \vec{v} - \vec{w}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{M\Xi} = \frac{1}{3}\overrightarrow{K\Lambda} + \vec{v} - \vec{w} \Longrightarrow \overrightarrow{M\Xi} = \vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{3}(3\vec{w} - \vec{v} + \vec{\rho})$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{M\Xi} = \vec{v} - \vec{w} + \vec{w} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\rho}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{M\Xi} = \frac{2}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\rho} = \frac{2\vec{v} + \vec{\rho}}{3}$$

12. Δίνεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $Μ, Ν$ τα μέσα των $ΑΔ$, $ΒΓ$, αντίστοιχα. Με τη χρήση διανυσμάτων, να δείξετε ότι:

$$(ΜΝ) = \frac{(ΑΒ) + (ΓΔ)}{2}.$$

<u>Απάντηση</u>

Θέτω: $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{u},\ \overrightarrow{ΓΔ} = \vec{v},\ \overrightarrow{ΑΔ} = \vec{w}$.

Τότε:

$$\overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΒΑ} + \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΔΓ} = -\vec{u} + \vec{w} - \vec{v}.$$

Το $Μ$ είναι το μέσο του $ΑΔ \Longrightarrow \overrightarrow{ΑΜ} = \frac{1}{2}\vec{w}$.

Το $Ν$ είναι το μέσο του $ΒΓ \Longrightarrow \overrightarrow{ΒΝ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ΒΓ} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{w} - \vec{v})$.

Τώρα:

$$\overrightarrow{ΜΝ} = \overrightarrow{ΜΑ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΝ} = -\overrightarrow{ΑΜ} + \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΝ} = -\frac{1}{2}\vec{w} + \vec{u} + \frac{1}{2}(-\vec{u} + \vec{w} - \vec{v}).$$

$$= \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΓΔ}}{2} = \frac{\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΔΓ}}{2}$$

Στο τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ όμως ισχύει $ΑΒ \parallel ΓΔ$. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΔΓ}$ είναι **συνευθειακά**. Επομένως το $\overrightarrow{ΜΝ}$ είναι επίσης συνευθειακό με τις βάσεις και έχει μέτρο

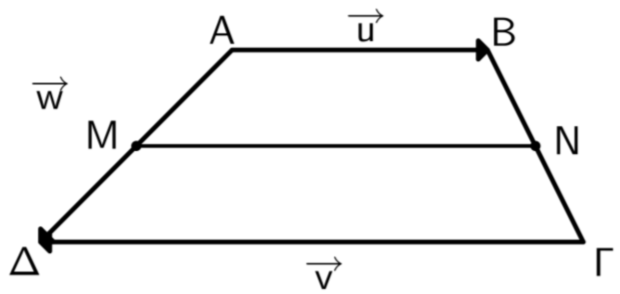
$$\left|\overrightarrow{ΜΝ}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{ΑΒ}\right| + \left|\overrightarrow{ΔΓ}\right|}{2}.$$

Δηλαδή:

$$\boxed{ΜΝ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}}$$

Αν δεν ήταν παράλληλα τα διανύσματα, δεν θα μπορούσαμε να περάσουμε με τον τρόπο αυτό στα μέτρα. Εδώ όμως η παραλληλία το επιτρέπει.

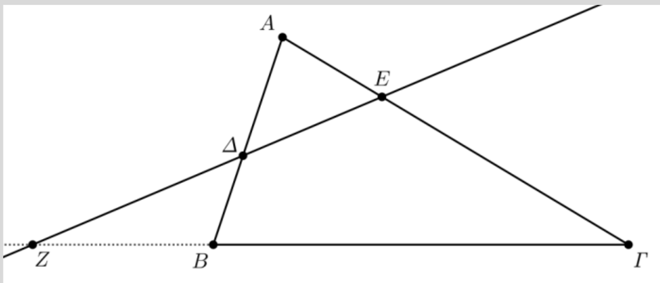
Αποδείχθηκε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του.



13. Να αποδείξετε το Θεώρημα Μενελάου:

Αν μια ευθεία τέμνει τις πλευρές AB, $AΓ$ και $BΓ$ενός τριγώνου (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία $Δ$, E και Z, αντίστοιχα, τότε ισχύει:

$$\frac{BΔ}{ΔA}\cdot\frac{AE}{EΓ}\cdot\frac{ΓZ}{ZB}=1.$$



Υπόδειξη: Να φέρετε $BΘ \parallel ΔE$.

<u>Απάντηση</u>

Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στην πλευρά $(AΓ)$ το οποίο τέμνει την (AB) στο σημείο $Θ$. Τα τρίγωνα $ΔAE$ και $ΔBΘ$ είναι όμοια:

$$\begin{cases} A\hat{Δ}E = Θ\hat{Δ}B \ (κατα\ κορυφήν\ γωνίες) \\ Θ\hat{B}Δ = E\hat{A}Δ \ (εντός\ εναλλάξ\ γωνίες) \end{cases}$$

(1ο κριτήριο ομοιότητας τριγώνων).

Συνεπώς, οι πλευρές των δυο αυτών τριγώνων είναι ανάλογες:

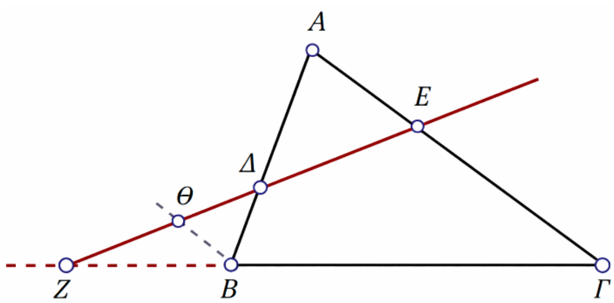
$$\boldsymbol{\frac{ΔA}{BΔ}}=\boldsymbol{\frac{AE}{BΘ}}=\frac{ΔE}{ΔΘ}$$

Ομοίως, δείχνουμε ότι τα τρίγωνα $ZΘB$ και $ZEΓ$ είναι όμοια και έτσι

$$\boldsymbol{\frac{ZB}{ZΓ}}=\boldsymbol{\frac{BΘ}{ΓE}}=\frac{ZΘ}{ZE}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατα μέλη τις $\boldsymbol{\frac{ΔA}{BΔ}}=\boldsymbol{\frac{AE}{BΘ}}$ και $\boldsymbol{\frac{ZB}{ZΓ}}=\boldsymbol{\frac{BΘ}{ΓE}}$, έχουμε:

$$\boldsymbol{\frac{ΔA}{BΔ}\cdot\frac{ZB}{ZΓ}=\frac{BΘ}{ΓE}\cdot\frac{AE}{BΘ}\Rightarrow\frac{ΔA}{BΔ}\cdot\frac{ZB}{ZΓ}=\frac{AE}{ΓE}\Rightarrow\frac{BΔ}{ΔA}\cdot\frac{AE}{EΓ}\cdot\frac{ΓZ}{ZB}=1}$$



Χαρακτηριστικά των συγκεκριμένων ασκήσεων εμπλουτισμού:

Απαιτούν:

- **Συνθετική γεωμετρία υψηλού επιπέδου**
- Με χρήση ομοιοτήτων, δύναμης σημείου, εγγράψιμων τετραπλεύρων, διανυσμάτων κτλ.
- **Δομική σκέψη** και καλή οργάνωση απόδειξης.
- Κριτήρια ομοιότητας, παράλληλες, καθέτους
- καθαρή ευθεία απόδειξη

Είναι θεωρητικά δομημένες και στηρίζονται σε γνωστά θεωρήματα.

Έχουν «κρυμμένη» βασική ιδέα

Θέλουν σωστή αναγνώριση εργαλείου (π.χ. δύναμη σημείου, ζεύγη καθέτων, εγγράψιμο τετράπλευρο)

Αλλά στην πραγματικότητα είναι **προχωρημένη σχολική γεωμετρία**.