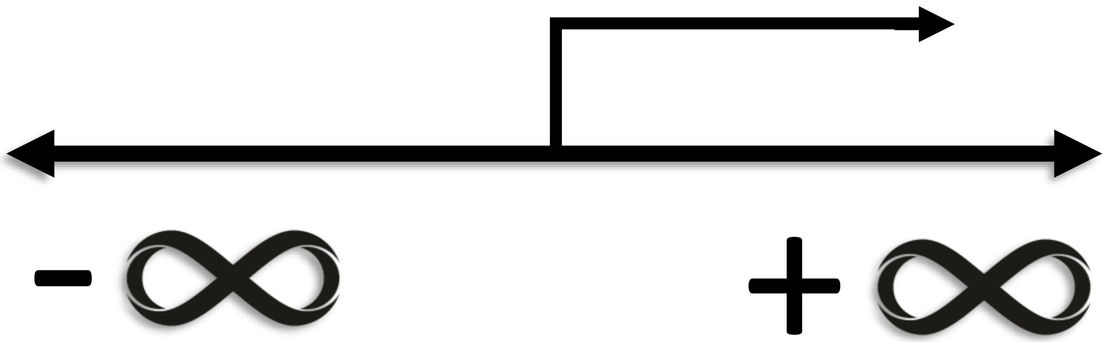
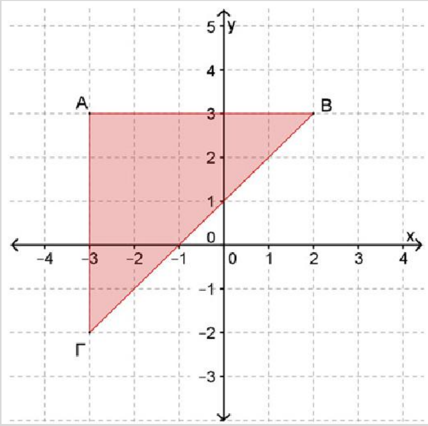
1 Πραγματικοί αριθμοί



Δραστηριότητες σελ. 8-11 (Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο)

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και να δώσετε την απάντησή σας στην πιο απλή μορφή.



<u>Απάντηση</u>

$A(-3,3)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-3,-2)$.

Είναι

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\big(2-(-3)\big)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|A\Gamma| = \sqrt{(x_\Gamma - x_A)^2 + (y_\Gamma - y_A)^2} = \sqrt{\big(-3-(-3)\big)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|B\Gamma| = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{2}$$

Διαφορετικά,
$|AB| = 2 - (-3) = 5$ αφού τα σημεία A και B έχουν την ίδια τετμημένη (και αρα το ευθύγραμμο τμήμα (AB) είναι παράλληλο με τον άξονα των τετμημένων)

$|A\Gamma| = -2 - 3 = 5$ αφού τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη (και αρα το ευθύγραμμο τμήμα $(A\Gamma)$ είναι παράλληλο με τον άξονα των τεταγμένων), τα ευθύγραμμα τμήματα (AB) και $(A\Gamma)$ είναι κάθετα μεταξύ τους και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $(B\Gamma) = 5\sqrt{2}$.

2. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{29}, \quad \sqrt{29}$$

<u>Απάντηση</u>

$5 < 8 \Longrightarrow \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$

$\sqrt[3]{29} < \sqrt{29}$

Επίσης,

$$4 < 5 < 9 \Longrightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 \Longrightarrow 2 < \sqrt{5} < 3.$$

Αλλά,

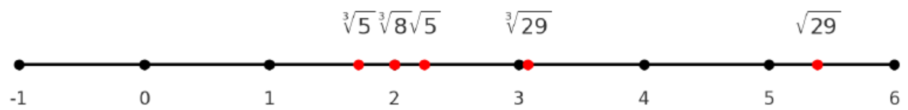
$$27 < 29 < 64 \Longrightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{29} < \sqrt[3]{64} = 4 \Longrightarrow 3 < \sqrt[3]{29} < 4.$$

Άρα,

$$\sqrt{5} < \sqrt[3]{29}$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω,

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{29} < \sqrt{29}$$



3. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε κάθε σειρά;

<u>Απάντηση</u>

30 σειρές επί 30 καθίσματα, άρα θα τοποθετηθούν $\sqrt{900} = 30$ καθίσματα σε κάθε σειρά.

4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο 10 m.

<u>Απάντηση</u>

$$\delta = 10m \Rightarrow 2R = 10m \Rightarrow R = 5m$$

και αρα

$$\Pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma = 2\pi R = 10m$$

και

$$E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu = \pi R^2 = 25\pi m^2$$

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x - 6 = 4x - 2$ **(β)** $3(x-4) = 2x - 5$

(γ) $5(x+3) = 5x + 3$ **(δ)** $\dfrac{a-1}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{3} + \dfrac{1}{6}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $2x - 6 = 4x - 2 \Leftrightarrow -6 + 2 = 4x - 2x$

$\Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow x = -2$

(β) $3(x-4) = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x - 12 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow 3x - 2x = 12 - 5$

$\Leftrightarrow x = 7$

(γ) $5(x+3) = 5x + 3 \Leftrightarrow 5x + 15 = 5x + 3$

$\Leftrightarrow 5x - 5x = 3 - 15 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -12$

και αρα η εξίσωση είναι *αδύνατη*.

(δ) $\frac{\alpha - 1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2(\alpha - 1) + 3 \cdot 1}{6} = \frac{2\alpha + 1}{6}$

$\Leftrightarrow 2(\alpha - 1) + 3 = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 + 3 = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha - 2\alpha = 1 - 1$

$\Leftrightarrow 0\alpha = 0$

και αρα η εξίσωση είναι *αόριστη*.

6. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, έτσι ώστε να είναι αδύνατες:

(α) $(\lambda - 3)x = 7$ **(β)** $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$

<u>Απάντηση</u>

(α) Η εξίσωση $(\lambda - 3)x = 0$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

(β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x \Leftrightarrow 3x + \lambda x + 6x = 15 - 6 \Leftrightarrow (9 + \lambda)x = 9$

Η εξίσωση $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow$ η εξίσωση $(9 + \lambda)x = 9$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow 9 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -9$.

7. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, έτσι ώστε να είναι αόριστες:

(α) $(\alpha + 3)x = 0$ **(β)** $\alpha x = 6x$

Απάντηση

(α) Η εξίσωση $(\alpha+3)x=0$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow \alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha=-3$.

(β) $\alpha x=6x \Leftrightarrow \alpha x-6x=0 \Leftrightarrow (\alpha-6)x=0$

Η εξίσωση $\alpha x=6x$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow$ η εξίσωση $(\alpha-6)x=0$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow \alpha-6=0 \Leftrightarrow \alpha=6$.

8. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\sqrt{3x-2},\quad B=\sqrt{20-5x}$$

Απάντηση

Η παράσταση $A=\sqrt{3x-2}$ ορίζεται για τα $x\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $3x-2\geq 0$.

Είναι

$$3x-2\geq 0 \Leftrightarrow 3x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}.$$

Λύση σε μορφή διαστήματος:

$$x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$$

Η παράσταση $B=\sqrt{20-5x}$ ορίζεται για τα $x\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $20-5x\geq 0$.

Είναι

$$20-5x\geq 0 \Leftrightarrow 20\geq 5x \Leftrightarrow \frac{20}{5}\geq\frac{5x}{5} \Leftrightarrow \underbrace{4\geq x}_{x\leq 4}.$$

Λύση σε μορφή διαστήματος:

$$x\in(-\infty,4]$$

9. Δίνονται οι ανισώσεις $3x-4\geq x-2$ και $2x+3<13$.

(α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.

(β) Να παραστήσετε την κοινή λύση των δύο ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(γ) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί τις δύο ανισώσεις;

(δ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν τις δύο ανισώσεις.

(ε) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραιη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.

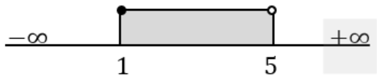
<u>Απάντηση</u>

(α) $3x - 4 \geq x - 2 \Leftrightarrow 3x - x \geq 4 - 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$

και

$$2x + 3 < 13 \Leftrightarrow 2x < 13 - 3 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5)$$

(β) Οι δυο ανισώσεις συναληθεύουν για $1 \leq x < 5$, δηλαδή στο διάστημα $[1,5)$.



(γ) Η μικρότερη τιμή του x η οποία ικανοποιεί και τις 2 ανισώσεις είναι η $x = 1$.

(δ) Π.χ. $x = 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ 4.$

(ε) Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x η οποία ικανοποιεί και τις 2 ανισώσεις είναι η $x = 4$.

10. Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών και να τις παραστήσετε γραφικά:

(α) $y = x + 2$ **(β)** $y = 2x$

(γ) $y = 3x - 2$ **(δ)** $y + 3x = 2$

(ε) $y = 2$ **(στ)** $x = 3$

<u>Απάντηση</u>

(α) $y = x + 2 \Rightarrow \lambda = 1$ (ο συντελεστής του x)

(β) $y = 2x \Rightarrow \lambda = 2$ (ο συντελεστής του x)

(γ) $y = 3x - 2 \Rightarrow \lambda = 3$ (ο συντελεστής του x)

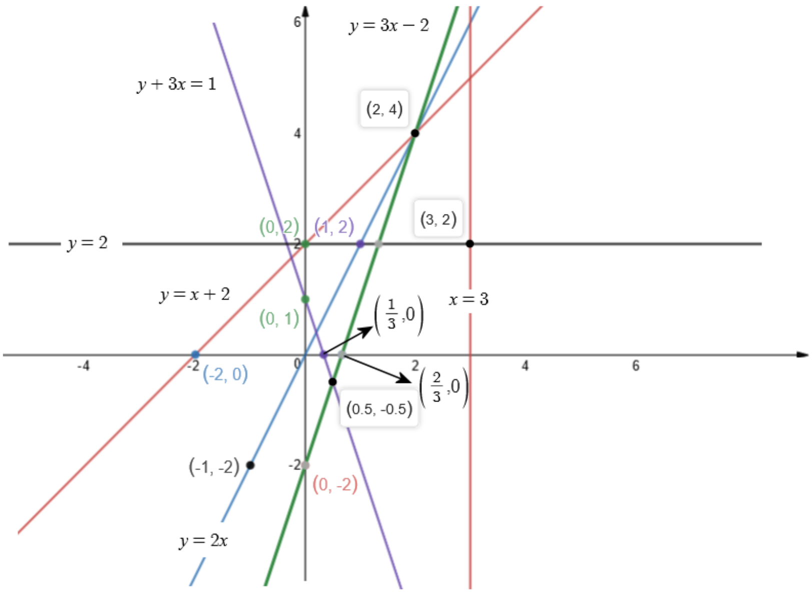
(δ) $y + 3x = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow \lambda = -3$ (ο συντελεστής του x)

(ε) $y = 2 \Rightarrow \lambda = 9$ (η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων)

(στ) $x=3 \Rightarrow \eta\ \lambda\ \delta\varepsilon\nu\ o\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\tau\alpha\iota$ (η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων)

Για τη γραφική τους αναπαράσταση:

(α) $y=x+2$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,2)\ \kappa\alpha\iota\ (-2,0)$
(β) $y=2x$. Περνά από την αρχή των αξόνων. Επίσης, π.χ. τα $(1,2)$ και $(-1,-2)$ ανήκουν στην ευθεία
(γ) $y=3x-2$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,-2)\ \kappa\alpha\iota\ \left(\frac{2}{3},0\right)$
(δ) $y+3x=1$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,1)\ \kappa\alpha\iota\ \left(\frac{1}{3},0\right)$



11. Η ευθεία $y=\alpha x$ περνά από το σημείο $A(-1,3)$.

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του α.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία $y=\alpha x$.

<u>Απάντηση</u>

(α) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(-1,3)$ στην εξίσωση της ευθείας:

$$3=-\alpha \Rightarrow \alpha=-3.$$

(β) Η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $(0,0)$. Βάζουμε π.χ. $x=1$ στην εξίσωση της ευθείας:

$$y=-3\cdot 1=-3$$

και άρα το σημείο $B(1,-3)$ ανήκει επίσης στην ευθεία.

12. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y=-2x+\beta$ περνά από το σημείο $A(-2,6)$. Να υπολογίσετε την τιμή του β.

Απάντηση

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(-1,3)$ στην εξίσωση της ευθείας:

$$6 = -2 \cdot (-2) + \beta \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\beta = 6 - 4 = 2}.$$

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:

(α) $(0,1)$ και $(2,4)$

(β) $(0,4)$ και $(-1,4)$

Απάντηση

(α) $A(0,1)$ και $B(2,4)$

Η εξίσωση της ευθείας που ψάχνουμε είναι η $y = \alpha x + \beta$.
Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην ευθεία $\Rightarrow$ $\beta = 1$.
Άρα,

$$y = \alpha x + 1 .$$

Αντικαθιστούμε το σημείο $B(2,4)$ στην πιο πάνω εξίσωση:

$$y = \alpha x + 1 \Rightarrow 4 = 2\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

Συνεπώς,

$$y = \frac{3}{2}\, x + 1 .$$

(β) $A(0,4)$ και $B(-1,4)$

Αφού η ευθεία περνά από τα σημεία $(0,4)$ και $(-1,4)$, είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα των x). Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι η

$$y = 4.$$

14. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

(α) $y = 3 + x$
$x + 2y = 6$

(β) $y - 2x = 0$
$2x + y = 3$

Απάντηση

(α) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση είναι λυμένη ως προς τον ένα άγνωστο (τον y)

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την 1η εξίσωση στη 2η, δηλ. όπου y θα αντικαταστήσουμε με $3 + x$ και (λύνουμε ως προς x)

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2(3 + x) = 6 \Leftrightarrow 2x + 6 + 2x = 6 \Leftrightarrow 4x = 0 - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο 2ο Βήμα στην 1η εξίσωση και βρίσκουμε το y

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 + 0 = 3$$

Έτσι, η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (0,3)$.

(β) Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Βήμα 1: Βλέπουμε τους συντελεστές των x και y και των 2 συστημάτων. Εδώ οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι.

Βήμα 2: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και λύνουμε ως προς y

$$\begin{array}{c} y - 2x = 0 \\ \underline{2x + y = 3} \\ 2y = 3 \end{array} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

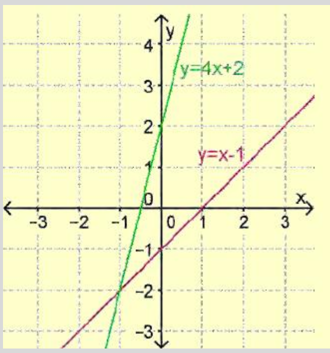
Βήμα 3: Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα του 2ου Βήματος στην 1η εξίσωση και βρίσκουμε το x

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Έτσι, η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών $(\varepsilon_1): y = x - 1$ και $(\varepsilon_2): y = 4x + 2$.
Να λύσετε γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$



Απάντηση
Η λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών: $(-1, -2)$.

16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 2)^2$ **(β)** $(2x - 3y)^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ **(δ)** $(x-3)(x+3)$

(ε) $(x+4)^3$ **(στ)** $(2x-1)(2x+1)$

<u>**Απάντηση**</u>

(α) $(x+2)^2 = x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

(β) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2\cdot(2x)\cdot(3y) + (3\psi)^2 = 4x^2 + 12x + 9y^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2 + 2^2 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4$

(δ) $(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

(ε) $(x+4)^3 = x^3 + 3x^2\cdot 4 + 3x\cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

(στ) $(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)(\alpha+1) = 2(\alpha+1)$.

<u>**Απάντηση**</u>

Α' μέλος	$=$	$(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)(\alpha+1)$	$=$	$\alpha^2 + 2\alpha\cdot 1 + 1^2 - (\alpha^2 - 1^2)$
	$=$	$\alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 1$	$=$	$2\alpha + 2$
	$=$	$2(\alpha+1)$	$=$	**Β' μέλος**

18. Αν $\alpha+\beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\cdot\beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

(β) $(3\alpha+1)^2 + (3\beta+1)^2 + 10(\alpha+\beta) = \frac{119}{3}$

(γ) $\alpha^3 + \beta^3 = -\frac{64}{27}$

<u>**Απάντηση**</u>

(α) $\alpha+\beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\alpha+\beta)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{1}{9}$

$$\xRightarrow{\alpha\cdot\beta=-\frac{7}{3}} \quad \alpha^2+\beta^2-\frac{14}{3}=\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; \alpha^2+\beta^2=\frac{1}{9}+\frac{14}{3}=\frac{43}{9}$$

(β)

$$(3\alpha+1)^2+(3\beta+1)^2+10\overbrace{(\alpha+\beta)}^{-\frac{1}{3}}$$

$$=(3\alpha)^2+2\cdot(3\alpha)\cdot 1+1^2+(3\beta)^2+2\cdot(3\beta)\cdot 1+1^2-\frac{10}{3}$$

$$=\boldsymbol{9\alpha^2}+6\alpha+1+\boldsymbol{9\beta^2}+6\beta+1-\frac{10}{3}$$

$$=9\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{\frac{43}{9}}+6\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-\frac{1}{3}}+2-\frac{10}{3}$$

$$=9\cdot\frac{43}{9}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+2-\frac{10}{3}=43-2+2-\frac{10}{3}=\frac{119}{3}$$

(γ) $\alpha^3+\beta^3=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{-\frac{1}{3}}(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

(αφού $\alpha^2+\beta^2=\frac{43}{9}$ και $\alpha\cdot\beta=-\frac{7}{3}$)

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{43}{9}+\frac{7}{3}\right) \;=\; -\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{64}{9}\right)=-\frac{64}{27}$$

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $2x^3-2x$ **(β)** $y^2-x^2-10y+25$

(γ) $\alpha^3x^3-\beta^3x^3+\alpha^3-\beta^3$ **(δ)** $(x-2y)^2-(x+3y)^2$

<u>Απάντηση</u>

(α) $2x^3-2x=2x(x^2-1)=2x(x-1)(x+1)$

(β) $y^2-x^2-10y+25=(y^2-10y+25)-x^2 \;=\; \underbrace{(y-5)^2-x^2}_{\delta\iota\alpha\varphi o\rho\acute{\alpha}\ 2\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu}$

$$=[(y-5)-x]\cdot[(y-5)+x]$$

$$=(y-5-x)\cdot(y-5+x)$$

(γ) $\alpha^3x^3-\beta^3x^3+\alpha^3-\beta^3=x^3(\alpha^3-\beta^3)+(\alpha^3-\beta^3)$

$$=(\alpha^3-\beta^3)(x^3+1)$$

$$=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(x+1)(x^2-x+1)$$

(δ) $\underbrace{(x-2y)^2-(x+3y)^2}_{διαφορά\ 2\ τετραγώνων}=[(x-2y)-(x+3y)]\cdot[(x-2y)+(x+3y)]$

$=(x-2y-x-3y)\cdot(x-2y+x+3y)$

$=(-5y)\cdot(2x+y)$

$=-5y\cdot(2x+y)$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $3x^2-15x=0$ **(β)** $x^2+x=6$

(γ) $(a-2)(2a+8)=0$ **(δ)** $3x^2-5x+2=0$

<u>Απάντηση</u>

(α) $3x^2-15x=0 \Leftrightarrow 3x(x-5)=0$

$\Leftrightarrow x(x-5)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x-5=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=5$

(β) $x^2+x=6 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x+5=0$ ή $x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-5$ ή $x=1$

(γ) $(a-2)(2a+8)=0 \Leftrightarrow 2(a-2)(a+4)=0$

$\Leftrightarrow a-2=0$ ή $a+4=0$

$\Leftrightarrow a=-4$ ή $a=2$

(δ) <u>1ος τρόπος</u>

$3x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow (3x-1)(x-2)=0$

$3x-1=0$ ή $x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=2$

2ος τρόπος

$3x^2-5x+2=0$

$\alpha=3,\qquad \beta=-5,\qquad \gamma=2$

και έχουμε:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm1}{6}\quad\Longrightarrow x_1=\frac{5+1}{6}=\frac{6}{6}=1,\quad x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\dfrac{x^2+2x}{x^2+3x+2}$

(β) $\dfrac{(a+1)(a-2)^2-4(a+1)}{a^3+a^2}$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί: $x^2+3x+2\neq0\Leftrightarrow(x+2)(x+1)\neq0\Leftrightarrow x\neq-2,\ -1$

Για $x\neq-2,-1$:

$$\frac{x^2+2x}{x^2+3x+2}=\frac{x(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$$

(β) Περιορισμοί: $a^3+a^2\neq0\Leftrightarrow a^2(a+1)\neq0\Leftrightarrow a\neq-1,0$

Για $a\neq-1,0$:

$$\frac{(a+1)(a-2)^2-4(a+1)}{a^3+a^2}=\frac{(a+1)[(a-2)^2-4]}{a^2(a+1)}$$

$$=\frac{(a-2)^2-4}{a^2}=\frac{a^2-4a+4-4}{a^2}=\frac{a^2-4a}{a^2}=\frac{a(a-4)}{a^2}=\frac{a-4}{a}$$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{4}{x^2-1}=0$

(β) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{x+2}{x+3}$

(γ) $\dfrac{2x-19}{x^2+x-6}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{5}{x+3}$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1 \\ x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \\ x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq -1,+1$$

ΕΚΠ$(x-1,(x-1)(x+1),x+1)=(x-1)(x+1)$

Για $x\neq -1,+1$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{4}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1+2(x+1)-4}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1+2x+2-4}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{(x-1)(x+1)}=0$$

$\Leftrightarrow$ $3x-3=0 \Leftrightarrow x=1$ *απορρίπτεται*

(β) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} x^2+2x-3\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1,3 \\ x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \\ x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq -3,1$$

ΕΚΠ$(x-1,(x-1)(x+3),x+3)=(x-1)(x+3)$

Για $x\neq -3,1$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x+2}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x-3)}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1+(x+3)(x+1)-(x-1)(x+}{(x-1)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+5x+6}{(x-1)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2)=0 \\ \Leftrightarrow x=-2\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}, x=-3\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{array}$$

(γ) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} (x-2)(x+3)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3{,}2 \\ x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \\ x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq -3,\ \ 2$$

ΕΚΠ$(x-2,(x-2)(x+3),x+3)=(x-2)(x+3)$

Για $x\neq -3,\ \ 2$

$$\frac{2x-19}{(x-2)(x+3)}+\frac{x}{x-2}-\frac{5}{x+3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x-19+x(x+3)-5(x-2)}{(x-2)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2x-19+x(x+3)-5(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x^2-9}{(x-2)(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} x^2-9 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0 \\ \Leftrightarrow x=3\ \delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta}, \\ x=-3\ \alpha\pi o\rho\rho\acute{\iota}\pi\tau\varepsilon\tau\alpha\iota \end{array}$$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων τα τετράγωνα να έχουν άθροισμα 145.

<u>Απάντηση</u>

Έστω ν και $\nu+1$ δυο διαδοχικοί αιρθμοί τέτοιοι ώστε $\nu^2+(\nu+1)^2=145$

Έχουμε

$\nu^2+(\nu+1)^2=145 \Leftrightarrow \nu^2+\nu^2+2\nu+1=145$

$2\nu^2+2\nu-144=0$

$\Leftrightarrow 2(\nu^2+\nu-72)=0$
$\Leftrightarrow 2(\nu-9)(\nu-8)=0$
$\Leftrightarrow \nu=8$ ή $\nu=9$.

24. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.

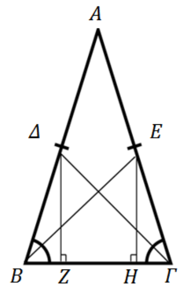
Απάντηση

$Α\Delta = \Delta Β = ΑΕ = ΕΓ$ (μέσα ίσων πλευρών)

$\Delta Ε \perp ΒΓ$ και $ΕΗ \perp ΒΓ$. Επίσης, $\hat{B} = \hat{Γ}$ (παρα τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)

Άρα, τα τρίγωνα $\Delta ΒΖ$ και $ΕΓΗ$ είναι ίσα (Π-Ο-Γ) και αρα

$$\Delta Ζ = ΕΗ.$$



25. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές ($ΑΒ = ΑΓ$). Στις προεκτάσεις της $ΒΓ$ παίρνουμε σημεία $Ε, Ζ$ έτσι ώστε $ΒΕ = ΓΖ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΕΖ$ είναι ισοσκελές.

Απάντηση

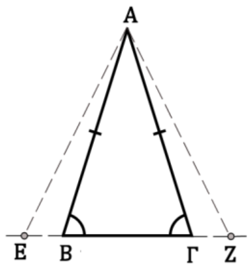
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΑΖΓ$. Είναι ίσα Π-Γ-Π αφού

$$ΑΒ = ΑΓ\ (ΑΒΓ\ ισοσκελές\ τρίγωνο)$$

$$Α\hat{Ε}Β = Α\hat{Γ}Ζ\ (παραπληρωματικές\ ίσων\ γωνιών)$$

$$ΕΒ = ΓΖ\ (υπόθεση)$$

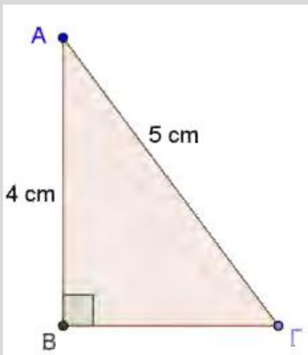
και αρα $ΑΕ = ΑΖ$ και αρα το τρίγωνο $Α\hat{Ε}Ζ$ είναι ισοσκελές.



26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:

(α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{A}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;

(β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{Γ}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;



<u>Απάντηση</u>

(α) $συν\hat{A} = \frac{4}{5}$

(β) $ημ\hat{Γ} = \frac{4}{5}$

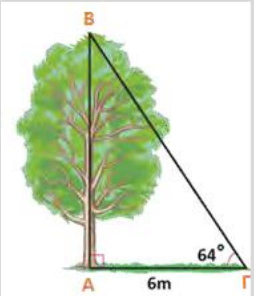
27. Να υπολογίσετε το συνθ και την εφ$θ$ οξείας γωνίας $θ$ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι ημ$θ = \frac{3}{5}$.

<u>Απάντηση</u>

$ημθ = \frac{3}{5}$ και αφού η γωνία $θ$ είναι οξεία, έπεται ότι η απέναντι πλευρά της είναι ίση με 3 και η υποτείνουσα του αντίστοιχου ορθογωνίου τριγώνου ίση με 5. Βρίσκουμε (οι αριθμοί 3,4,5 αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα) η προσκείμενη πλευρά της $θ$ είναι ίση με 4 και άρα

$$συνθ = \frac{4}{5}, \qquad εφθ = \frac{3}{4}$$

28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64°. Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου.

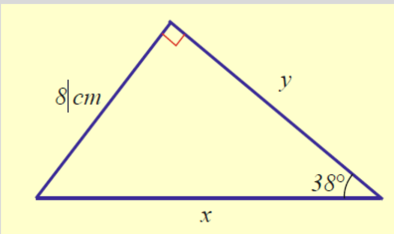


<u>Απάντηση</u>

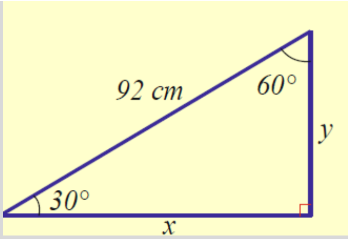
$$εφ\hat{A} = \frac{AB}{AΓ} \Rightarrow εφ68^o = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 6εφ68^o = 6 \times 2{,}05 = 12.3 \text{ m}$$

29. Να υπολογίσετε τους αγνώστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



Απάντηση

(α)

$$\eta\mu 38^o = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{\eta\mu 38^o} = 12{,}99\ \text{cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu 38^o = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \cdot \sigma\upsilon\nu 38^o = 12{,}99 \cdot 0.788 = 10.24\ \text{cm}$$

(ή με το Πυθαγόρειο Θεώρημα ή με την $\varepsilon\varphi 38^o$)

(β) $\eta\mu 30^o = \frac{y}{92} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 92 = 46\ \text{cm}$

$\eta\mu 60^o = \frac{x}{92} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 92 = 79{,}67\ \text{cm}$

1.1 Η έννοια της ν-οστής ρίζας

Θεωρία

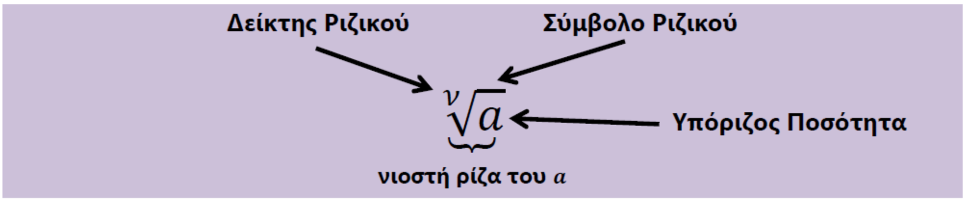
Ορισμός (νιοστής ρίζας)

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη-αρνητικού αριθμού α, όπου ν φυσικός αριθμός, είναι ο μη-αρνητικός αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί στη δύναμη με εκθέτη το ν, δίνει τον αριθμό α.

Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Δηλαδή, αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta^\nu = \alpha$$



Από τον πιο πάνω ορισμό έπονται άμεσα τα πιο κάτω:

$\alpha \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$,

- $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$, διότι $\alpha^1 = \alpha$.
- $\sqrt[\nu]{\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$

  Πράγματι, αν $\sqrt[\nu]{\alpha} = 0$ τότε $0^\nu = \alpha \implies \alpha = 0$ και αντίστροφα, αν $\alpha = 0$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{0} = 0.$
- $\sqrt[\nu]{1} = 1$, διότι $1^\nu = 1$.
- $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$, διότι $\alpha^\nu = \alpha^\nu$.

Διερεύνηση της εξίσωσης $\boldsymbol{x^\nu = \alpha}$, $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ και $\boldsymbol{\nu \in \mathbb{N}}$

$\alpha = 0$. Τότε, $\quad x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = 0$

$\alpha > 0$. Τότε

- Αν $\nu =$άρτιος, έχουμε $\quad x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Αν $\nu =$περιττός, έχουμε $\quad x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{\alpha}$

$\alpha < 0$. Τότε,

- Αν $\nu =$άρτιος, έχουμε ότι η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν $\nu =$περιττός, έχουμε $\quad x^\nu = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{|\alpha|}$

Δραστηριότητες σελ. 24 (Η έννοια της νιοστής ρίζας)

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{100}$ **(β)** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **(γ)** $\sqrt[4]{81}-\sqrt{81}$ **(δ)** $\sqrt[5]{0{,}00032}$

Απάντηση

(α) $\sqrt{100}=\sqrt{10^2}=10$

(β) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^3}=\frac{2}{3}$

(γ) $\sqrt[4]{81}-\sqrt{81}=\sqrt[4]{3^4}-\sqrt{9^2}=3-3=0$

(δ) $\sqrt[5]{0{,}00032}=\sqrt[5]{32\cdot 10^{-5}}=\sqrt[5]{\frac{32}{10^5}}=\sqrt[5]{\frac{2^5}{10^5}}=\sqrt[5]{\left(\frac{2}{10}\right)^5}=\frac{2}{10}$

2. **(α)** Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός και να αναφέρετε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερός του.

(β) Δίνεται ότι $x=\sqrt[3]{25}$ και $y=\sqrt{8}$. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να υπολογίσετε τους αριθμούς x^3, x^6, y^2 και y^6.

(γ) Με βάση το (β), να συγκρίνετε τα x και y.

Απάντηση

(α) Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ ήταν ακέραιος, δηλαδή, $\sqrt[3]{25}=\alpha$, όπου α ακέραιος. Τότε, από τον ορισμό της κυβικής ρίζας, $25=\alpha^3$. Όμως, $2^3=8$ και $3^3=27$ και εφόσον ο αριθμός 25 βρίσκεται ανάμεσα στο 8 και το 27, δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος αριθμός α. Από τον προηγούμενο συλλογισμό, έχουμε ότι ο μικρότερος ακέραιος αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερός του είναι ο 3.

Με άλλα λόγια, το $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος διότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός του οποίου ο κύβος να ισούται με 25.

(β)
$$x^3=\left(\sqrt[3]{25}\right)^3=25$$
$$x^6=(x^3)^2=(25)^2=625$$
$$y^2=\left(\sqrt{8}\right)^2=8$$
$$y^6=(y^2)^3=8^3=512$$

(γ) Με βάση το (β), $x>y$, αφού $x^6>y^6$.

3. Ένας αριθμός, όταν υψωθεί στην $5^η$ δύναμη, μας δίνει 10.

(α) Να δώσετε τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτόν τον αριθμό.

(β) Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής, να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

Απάντηση

(α) $x^5 = 10 \Leftrightarrow \ x = \sqrt[5]{10}$

(β) $x^5 = 10 \ \Leftrightarrow \ x = \sqrt[5]{10} \approx 1.585$

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες, δίνοντας την απάντησή σας σε μορφή δύναμης:

(α) $\sqrt[3]{5^{36}}$ **(β)** $\sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}}$ **(γ)** $\sqrt[4]{2^{31}+2^{31}}$ **(δ)** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{5^{36}} = \sqrt[3]{(5^{12})^3} = 5^{12}$

(β) $\sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}} = \sqrt{3^{7+4+19}} = \sqrt{3^{30}} = \sqrt{(3^{15})^2} = 3^{15}$

(γ) $\sqrt[4]{2^{31}+2^{31}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{31}} = \sqrt[4]{2^{1+31}} = \sqrt[4]{2^{32}} = \sqrt[4]{(2^8)^4} = 2^8$

(δ) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{(7^{30})^3}} = \sqrt[6]{7^{30}} = \sqrt[6]{(7^5)^6} = 7^5$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3^{12}}$ **(β)** $\sqrt[3]{6^{60}}$ **(γ)** $\sqrt[5]{\dfrac{32}{x^{20}}}$, $x > 0$ **(δ)** $\sqrt[6]{\dfrac{\beta^{18}}{1000000}}$, $\beta \geq 0$

Απάντηση

(α) $\sqrt{3^{12}} = \sqrt{(3^6)^2} = 3^6$

(β) $\sqrt[3]{6^{60}} = \sqrt[3]{(6^{20})^3} = 6^{20}$

(γ) $\sqrt[5]{\dfrac{32}{x^{20}}} = \sqrt[5]{\dfrac{2^5}{(x^4)^5}} = \sqrt[5]{\left(\dfrac{2}{x^4}\right)^5} = \dfrac{2}{x^4}$

(δ) $\sqrt[6]{\dfrac{\beta^{18}}{1000000}} = \sqrt[6]{\dfrac{(\beta^3)^6}{10^6}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{\beta^3}{10}\right)^6} = \dfrac{\beta^3}{10}$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 = 16$ **(β)** $2x^3 = -54$ **(γ)** $3x^7 - 1 = 383$

<u>Απάντηση</u>

(α) $x^4 = 16 \iff x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm\sqrt[4]{2^4} = \pm 2.$

(β) $2x^3 = -54 \iff x^3 = -27 \iff x = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$

(γ) $3x^7 - 1 = 383 \iff 3x^7 = 383 + 1 \iff 3x^7 = 384$

$\iff x^7 = 128 \iff x = \sqrt[7]{128} = 2$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^6 = 1000000$ **(β)** $x^4 = -16$ **(γ)** $1 - 2x^6 = \dfrac{31}{32}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $x^6 = 1000000 \iff x^6 = 10^6 \iff x = \pm\sqrt[6]{10^6} = \pm 10.$

(β) $x^4 = -16$
αδύνατη εξίσωση (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών)

(γ) $1 - 2x^6 = \dfrac{31}{32} \iff 1 - \dfrac{31}{32} = 2x^6 \iff \dfrac{1}{32} = 2x^6 \iff x^6 = \dfrac{1}{64}$

$\iff x = \pm\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}} = \pm\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^6}} = \pm\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^6} = \pm\dfrac{1}{2}$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^3 = 2$ **(β)** $3x^4 + 5 = 11$ **(γ)** $x^5 + 20 = 10$

<u>Απάντηση</u>

(α) $x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2}.$

(β) $3x^4 + 5 = 11 \iff 3x^4 = 11 - 5 \iff 3x^4 = 6 \iff x^4 = 2$

$\iff x = \pm\sqrt[4]{2}$

(γ) $x^5 + 20 = 10 \iff x^5 = 10 - 20 \iff x^5 = -10 \iff x = -\sqrt[5]{10}$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(x+2)^4 = 81$ **(β)** $(1-x)^5 = -1024$ **(γ)** $2x^3 + 1 = 129$

Απάντηση

(α) $(x+2)^4 = 81 \iff x + 2 = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3.$

$x + 2 = 3 \iff x = 1$ και $x + 2 = -3 \iff x = -5$

(β) $(1-x)^5 = -1024 \iff 1 - x = -\sqrt[5]{1024}$

$\iff 1 - x = -4 \iff -x = -5 \iff x = 5$

(γ) $2x^3 + 1 = 129 \iff 2x^3 = 129 - 1 \iff 2x^3 = 128$

$\iff x^3 = 64 \iff x = \sqrt[3]{64} = 4$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{2x+3} = 5$ **(β)** $\sqrt[3]{3x} = 6$ **(γ)** $3\sqrt[4]{x} - 2 = 7$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί:
$2x + 3 \geq 0 \iff 2x \geq -3 \iff x \geq -\dfrac{3}{2}$

$\sqrt{2x+3} = 5 \iff \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 = 5^2 \iff 2x + 3 = 25$
$\iff 2x = 22 \iff x = 11$ δεκτή.

(β) Περιορισμοί:
$3x \geq 0 \iff x \geq 0$

$\sqrt[3]{3x} = 6 \iff \left(\sqrt[3]{3x}\right)^3 = 6^3 \iff 3x = 216 \iff x = 72$ δεκτή.

(γ) Περιορισμοί:
$x \geq 0$

$3\sqrt[4]{x}-2=7 \iff 3\sqrt[4]{x}=9 \iff \sqrt[4]{x}=3 \iff \left(\sqrt[4]{x}\right)^4=3^4$
$\iff x=81$ δεκτή.

11. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά 2, έχει κυβική ρίζα ίση με 10.

<u>Απάντηση</u>
Έστω x ο αριθμός.
Τότε:

$$\sqrt[3]{x-2}=10 \iff \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3=10^3 \iff x-2=1000 \iff x=1002.$$

12. Ποσό €3000 ανατοκίζεται με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια γίνεται €3828,84. Να υπολογίσετε την τιμή του τ από την εξίσωση:

$$3000(1+\tau)^5=3828{,}84$$

<u>Απάντηση</u>
Η εξίσωση που μας δίνεται είναι ο ανατοκισμός του ποσού 3000 με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια.

$$3000(1+\tau)^5=3828{,}84 \iff (1+\tau)^5=\frac{3828{,}84}{3000}$$

$$\iff (1+\tau)^5=1{,}27628 \iff 1+\tau=\sqrt[5]{1{,}27628}$$

$$\iff 1+\tau=1{,}05 \iff \tau=0{,}05=5\%$$

1.2 Ιδιότητες νιοστής ρίζας

Θεωρία

Οι πιο κάτω ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της νιοστής ρίζας:

αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \iff \beta^\nu = \alpha$$

και επιβάλλεται να τις δουλέψει ο μαθητής για να αντιληφθεί πως δουλεύει στην πράξη ο ορισμός αυτός.

Ιδιότητα 1

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Θέτω $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$. Τότε, δυνάμει του ορισμού,

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \iff x^\nu = \alpha,$$

δηλαδή

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = x = \alpha.$$

Ιδιότητα 2

$$\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

όπου $\alpha, \beta \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων[1], έχουμε ότι:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu \overset{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \alpha \cdot \beta$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$$

Ιδιότητα 3

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$$

όπου $\alpha \geq 0,\ \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$.

[1] $(x \cdot y)^\nu = x^\nu \cdot y^\nu$

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων[2], έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}} \overset{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \frac{\alpha}{\beta}$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$$

Ιδιότητα 4

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων[3], έχουμε ότι:

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} \overset{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \alpha$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\cdot\nu]{\alpha}$$

Ιδιότητα 5

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από την ιδιότητα 4,

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu\rho]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

---

[2] $\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu} = \frac{x^{\nu}}{y^{\nu}}$

[3] $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

Δραστηριότητες σελ. 30-31 (Ιδιότητες νιοστής ρίζας)

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{4+9++6^2}$ **(β)** $\sqrt{10^2-8^2}$

(γ) $\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}$ **(δ)** $\sqrt[3]{108:4}$

(ε) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^4}$ **(στ)** $\sqrt[5]{16}:\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt{4+9++6^2}=\sqrt{13+36}=\sqrt{49}=7$

(β) $\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$

(γ) $\sqrt{\left(4+\sqrt{5}\right)^2}=4+\sqrt{5}$

(δ) $\sqrt[3]{108:4}=\sqrt[3]{108:4}=\sqrt[3]{27}=3$

(ε) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^4}=\sqrt{6}-\sqrt{7}$

(στ) $\sqrt[5]{16}:\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[5]{16\cdot 2}=\sqrt[5]{32}=2$

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{8x^3},\ x>0$ **(β)** $\sqrt{4x^4y^{14}}$

(γ) $\sqrt[4]{-16a^4},\ a>0$ **(δ)** $\sqrt[5]{2y}\cdot\sqrt[5]{8y^3}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{2y}{27}},\ y>0$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{8x^3}=\sqrt[3]{(2x)^3}=2x$

(β) $\sqrt{4x^4y^{14}}=\sqrt{(2x^2y^7)^2}=2x^2y^7$

(γ) $\sqrt[4]{-16a^4}=\sqrt[4]{-(2a)^4}$
Η ρίζα δεν είναι πραγματικός αριθμός.

(δ) $\sqrt[5]{2y}\cdot\sqrt[5]{8y^3}\cdot\sqrt[5]{\frac{2y}{27}}=\sqrt[5]{2y\cdot 8y^3\cdot\frac{2y}{27}}=\sqrt[5]{32y^5\cdot\frac{1}{27}}$

$=\sqrt[5]{32y^5}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{27}}=\sqrt[5]{(2y)^5}\,\frac{1}{\sqrt[5]{27}}=\frac{2y}{\sqrt[5]{27}}$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$ **(β)** $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{128}$ **(γ)** $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{2}$

(δ) $\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[4]{\alpha^3},\ \alpha\geq 0$ **(ε)** $\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^{10}},\ x\geq 0$ **(στ)** $\sqrt{200}\cdot\sqrt{2}:\frac{1}{\sqrt[5]{32}}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{4\cdot 8}=\sqrt[5]{32}=2$

(β) $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2:128}=\sqrt[3]{1:64}=\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$

(γ) $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{\frac{24\cdot 2}{3}}=\sqrt{16}=4$

(δ) $\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[4]{\alpha^3}=\sqrt[4]{\alpha\cdot\alpha^3}=\sqrt[4]{\alpha^4}=\alpha$

(ε) $\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^{10}}=\sqrt[6]{x^2\cdot x^{10}}=\sqrt[6]{x^{12}}=\sqrt[6]{(x^2)^6}=x^2$

(στ) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{2}:\frac{1}{\sqrt[5]{32}}=\sqrt{200}\cdot\sqrt{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{200}\cdot\sqrt{2}\cdot 2=2\sqrt{200\cdot 2}$

$=2\sqrt{400}=2\cdot 20=40$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $\sqrt{90}=9\sqrt{10}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $\sqrt[\nu]{x}:\sqrt[\nu]{y}=\sqrt[\nu]{\frac{x}{y}}\ \ (x,y>0,\ \ \nu\text{ φυσικός})$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{10}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) $\sqrt{32}:\sqrt{2} = 4$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(στ) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ζ) $\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = 100$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(η) $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

<u>Απάντηση</u>

(α) **ΣΩΣΤΟ:**
$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$

(β) **ΛΑΘΟΣ:**
$9\sqrt{10} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{81 \cdot 10} = \sqrt{810} \neq \sqrt{90}$

(γ) **ΣΩΣΤΟ:**
Είναι Θεωρία.

(δ) **ΛΑΘΟΣ:**
$\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$
(Στην υπολογιστική. Αργότερα θα μάθουμε πως να συγκρίνουμε αριθμούς).

(ε) **ΣΩΣΤΟ:**
$\sqrt{32}:\sqrt{2} = \sqrt{32:2} = \sqrt{16} = 4$

(στ) **ΛΑΘΟΣ:**
$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$

(ζ) **ΛΑΘΟΣ:**
$\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \neq 100$

(η) **ΣΩΣΤΟ:**
$\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[5]{64}$ **(β)** $\sqrt{18\alpha^5}, \alpha > 0$ **(γ)** $\sqrt{\sqrt[4]{x^{24}}},\ x \geq 0$

(δ) $\sqrt[3]{16\alpha^4},\ \alpha \geq 0$ **(ε)** $\sqrt{9\alpha^2\beta^3\gamma^5},\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0$ **(στ)** $\sqrt[3]{\frac{16}{x^6}}, x > 0$

Απάντηση

(α) $\sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2 \cdot 32} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{32} = 2\sqrt[5]{2}$

(β) $\sqrt{18\alpha^5} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^4} \cdot \sqrt{\alpha}$

$= 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\alpha^2)^2} \cdot \sqrt{\alpha} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \alpha^2 = 3\alpha^2\sqrt{2\alpha}$

(γ) $\sqrt{\sqrt[4]{x^{24}}} = \sqrt{\sqrt[4]{(x^6)^4}} = \sqrt{x^6} = \sqrt{x^{2 \cdot 3}} = x^3$

(δ) $\sqrt[3]{16\alpha^4} = \sqrt[3]{8 \cdot 2\alpha^4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^3 \cdot \alpha}$

$= 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^3} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \alpha = 2\alpha\sqrt[3]{2\alpha}$

(ε) $\sqrt{9\alpha^2\beta^3\gamma^5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^3} \cdot \sqrt{\gamma^5} = 3\alpha\sqrt{\beta^2 \cdot \beta} \cdot \sqrt{\gamma^4 \cdot \gamma}$

$3\alpha\sqrt{\beta^2} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\gamma^4} \cdot \sqrt{\gamma} = 3\alpha\beta\gamma^2\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\gamma} = 3\alpha\beta\gamma^2\sqrt{\beta\gamma}$

(στ) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^6}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 2}{x^6}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{x^6}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^3} = \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{2}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{5}$

(β) $\left(2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}\right) : \sqrt{27}$

(γ) $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2^5 - 5} + \sqrt{121}}$

(δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7\beta^{18}}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5}$

$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$= 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

(β) **1ος τρόπος**

$\left(2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}\right) : \sqrt{27}$

$= \left(2\sqrt{3 \cdot 25} + 3\sqrt{3 \cdot 16} - 9\sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3}\right) : \sqrt{27}$

$= \left(2\sqrt{3} \cdot \sqrt{25} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{16} - 9\sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}\right) : \sqrt{27}$

$$= \left(2\sqrt{3}\cdot 5 + 3\sqrt{3}\cdot 4 - 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) : \sqrt{27}$$

$$= \left(10\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\right) : \sqrt{27} = 16\sqrt{3} : \sqrt{27} = 16\sqrt{3:27} = 16\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{16}{3}$$

2^{ος} τρόπος

$$\left(2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}\right) : \sqrt{27}$$

$$= 2\sqrt{75} : \sqrt{27} + 3\sqrt{48} : \sqrt{27} - 9\sqrt{3} : \sqrt{27} + \sqrt{27} : \sqrt{27}$$

$$= 2\sqrt{75:27} + 3\sqrt{48:27} - 9\sqrt{3:27} + 1$$

$$= 2\sqrt{\frac{25}{9}} + 3\sqrt{\frac{16}{9}} - 9\sqrt{\frac{1}{9}} + 1 = 2\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + 3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - 9\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 1$$

$$= 2\cdot\frac{5}{3} + 3\cdot\frac{4}{3} - 9\cdot\frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{3}$$

(γ) $\sqrt{2 + \sqrt[3]{2^5 - 5} + \sqrt{121}} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{32 - 5} + 11} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{27} + 11}$

$$= \sqrt{2 + 3 + 11} = \sqrt{16} = 4$$

(δ) $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7\beta^{18}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7\beta^{18}}} = \sqrt[6]{\alpha^7\beta^{18}} = \sqrt[6]{\alpha^7}\cdot\sqrt[6]{\beta^{18}} = \sqrt[6]{\alpha^6\cdot\alpha}\cdot\sqrt[6]{(\beta^3)^6}$

$$= \sqrt[6]{\alpha^6}\cdot\sqrt[6]{\alpha}\cdot\beta^3 = \alpha\beta^3\sqrt[6]{\alpha}$$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}$

(β) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$

(γ) $\sqrt[40]{\alpha^{16}},\ \alpha > 0$

(δ) $\sqrt{\left(7 + \sqrt{13}\right)}\cdot\sqrt{\left(7 - \sqrt{13}\right)}$

(ε) $\left(2\sqrt{3} + 3\right)^2$

(στ) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{16}}$

(ζ) $\sqrt{x^2 + 9 - 6\sqrt{x}},\ \ x > 3$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[3\cdot 4]{6} = \sqrt[12]{6}$

(β) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3\cdot 3\cdot 3]{3} = \sqrt[27]{3}$

(γ) $\sqrt[40]{\alpha^{16}} = \sqrt[8\cdot 5]{\alpha^{8\cdot 2}} = \sqrt[5]{\alpha^2}$

(δ) $\sqrt{\left(7+\sqrt{13}\right)} \cdot \sqrt{\left(7-\sqrt{13}\right)} = \sqrt{\left(7+\sqrt{13}\right)\cdot\left(7-\sqrt{13}\right)}$

$= \sqrt{7^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2} = \sqrt{49-13} = \sqrt{36} = 6$

(ε) $\left(2\sqrt{3}+3\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3 + 3^2 = 4\cdot 3 + 12\sqrt{3} + 9$

$= 21 + 12\sqrt{3}$

(στ) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[3\cdot 2]{4} \cdot \sqrt[3\cdot 2]{16} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{4\cdot 16} = \sqrt[6]{64} = 2$

(ζ) $\sqrt{x^2 + 9 - 6\sqrt{x}} = \sqrt{x^2 - 6\sqrt{x} + 9} = \sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{x} + 9^2}$

$= \sqrt{\left(\sqrt{x}-3\right)^2} = \sqrt{x} - 3$

8. Αν $x = 1+\sqrt{2}$ και $y = 1-\sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $x+y$ **(β)** x^2-y^2 **(γ)** xy **(δ)** x^2+y^2

<u>Απάντηση</u>

(α) $x+y = 1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 2$

(β) $x^2-y^2 = (x-y)(x+y) = \left[\left(1+\sqrt{2}\right)-\left(1-\sqrt{2}\right)\right]\left[\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)\right]$

$= \left(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\right)$

$= 2\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}$

(γ) $xy = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = 1^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 1-2 = -1$

(δ) **1ος τρόπος**

$x^2+y^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2=1+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+1-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$=1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2=6$

2ος τρόπος

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \underset{(\alpha),(\gamma)}{\Longrightarrow} 2^2=x^2+2(-1)+y^2$

$\Rightarrow 4=-2+x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2=6$

9. Να δείξετε ότι η παράσταση $A=\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

(α) $\alpha\sqrt[3]{\beta}$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{N}$

(β) $\sqrt[3]{\gamma}$, $\gamma\in\mathbb{N}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $A=\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{320}=\sqrt[3]{8\cdot5}+\sqrt[3]{27\cdot5}+\sqrt[3]{64\cdot5}$

$=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{5}$

$=2\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}=9\sqrt[3]{5}$

(β) $A=9\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{9^3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{9^3\cdot5}=\sqrt[3]{3645}$

10. Αν $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, να δείξετε ότι $\varphi^2=\varphi+1$.

<u>Απάντηση</u>

$$\varphi^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{4}=\frac{1+2\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2}{4}=\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$=\frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\frac{2+\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\varphi$$

11. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός α είναι θετικός ρητός.

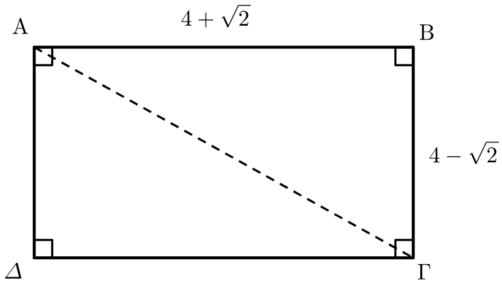
<u>Απάντηση</u>

$$\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\alpha+2+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+2)+1}{\alpha}\in\mathbb{Q}$$

12. Οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη $\left(4+\sqrt{2}\right)$ και $\left(4-\sqrt{2}\right)$. Να αποδείξετε ότι το μήκος της υποτείνουσάς του είναι φυσικός αριθμός.

<u>Απάντηση</u>

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ:



$$\left(4+\sqrt{2}\right)^2+\left(4-\sqrt{2}\right)^2=(A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow 4^2+8\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+4^2-8\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=(A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow 16+2+16+2=(A\Gamma)^2$$

$$\Rightarrow\ (A\Gamma)^2=36\ \Rightarrow\ (A\Gamma)=\sqrt{36}=6$$

1.3 Δυναμεις με ρητό εκθέτη

Θεωρία

Έστω μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$ και έστω $\alpha \geq 0$.

Η παράσταση της μορφής

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

λέγεται **δύναμη με ρητό εκθέτη.**

Πρόταση

Έστω $\alpha \geq 0$ και μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$. Τότε,

(α) $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$

(β) $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$

Απόδειξη

(α) Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας θετικού πραγματικού αριθμού,

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^\nu = \alpha \iff \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

(β) Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας θετικού πραγματικού αριθμού,

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\nu = \alpha \iff \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Μπορούμε λοιπόν να δούμε τον αριθμό $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ με δύο τρόπους:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \begin{cases} (\alpha^\mu)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \\ \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^\mu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu \end{cases}$$

<u>**Παρατηρήσεις**</u>

- $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$ και $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha}$, όπου $\alpha \geq 0$.
- $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$.
- Για $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}.$$

Δραστηριότητες σελ. 33-34 (Δυνάμεις με ρητό εκθέτη)

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω ριζικά σε δύναμη με ρητό εκθέτη:

(α) $\sqrt[3]{5^2}$ **(β)** $\sqrt{3}$ **(γ)** $\sqrt[5]{10000}$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ **(β)** $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ **(γ)** $\sqrt[5]{10000} = \sqrt[5]{10^4} = 10^{\frac{4}{5}}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $16^{\frac{1}{2}}$ **(β)** $8^{\frac{1}{3}}$ **(γ)** $81^{\frac{1}{4}}$

(δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ **(ε)** $9^{-\frac{1}{2}}$ **(στ)** $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$ **(η)** $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$ **(θ)** $8^{\frac{10}{6}}$

Απάντηση

(α) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ **(β)** $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(γ) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

(ε) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

(στ) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^2} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)^2} = \sqrt[5]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2} = \sqrt[5]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{9^2}{8^2}\right)^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{9}{8}\right)^3\right]^2} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{9^3}{8^3} = \frac{729}{512}$

ή

$\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3} = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4\cdot\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{512}$

(η) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{2}} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{2}} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$

ή

$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{4}{9}$

(θ) $8^{\frac{10}{6}} = 8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{(2^3)^5} = \sqrt[3]{(2^5)^3} = 2^5 = 32$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27}$ είναι φυσικός αριθμός.

<u>Απάντηση</u>

$\mathrm{A} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3^3}$

$= \sqrt[4]{2^4} + \sqrt{\frac{3^3}{3}} = 2 + \sqrt{3^2} = 2 + 9 = 11 \in \mathbb{N}.$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α)	$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$4^{\frac{1}{2}} = 2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η λύση της εξίσωσης $x^{\frac{1}{2}} = 3,\ x > 0$ είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^3 = -27$ είναι αδύνατη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΣΩΣΤΟ:**
Εξ ορισμού είναι $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

(β) **ΣΩΣΤΟ:**
$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

(γ) **ΛΑΘΟΣ:**
$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4 \neq \frac{1}{4}$$

(δ) **ΣΩΣΤΟ:**
$$\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

(ε) **ΛΑΘΟΣ:**
$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \iff \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \iff x = 9$$

(στ) **ΛΑΘΟΣ:**
Η εξίσωση λύνεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:
$x^3 = -27 \iff x = -\sqrt[3]{27} = -3$

(ζ) **''ΛΑΘΟΣ'':**
$\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 3$
ενώ ο αριθμός $(-8)^{\frac{2}{3}}$ δεν έχει νόημα αφού -8<0 και εμείς ορίσαμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη θετικό αριθμό.

5. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$ **(β)** $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}}$

(γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$ **(δ)** $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}$

Απάντηση

(α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$

(β) $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}} = \div\, 2^{\frac{18}{5}-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{17}{5}} = 2^{\frac{15}{5}+\frac{2}{5}} = 2^{3+\frac{2}{5}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{2}{5}}$

$= 8 \cdot \sqrt[5]{2^2} = 8 \cdot \sqrt[5]{4}$

ή
$\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}} = \div\, 2^{\frac{18}{5}-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{17}{5}} = \sqrt[5]{2^{17}}$

(γ)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{24} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{24}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 24}{3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{(3 \cdot 2)^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

(δ)

$$2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{1+\frac{1}{2}} + 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 7 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{2}$$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 5,\ \ x \geq 0$ **(β)** $x^{\frac{1}{3}} = 2,\ \ x > 0$

(γ) $1 + x^{\frac{2}{3}} = 5,\ \ x \geq 0$ **(δ)** $5(x+1)^{\frac{1}{3}} = 20,\ \ x \geq -1$

Απάντηση

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 25$ (δεκτή)

(β) $x^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow x = 8$ (δεκτή)

(γ) $1 + x^{\frac{2}{3}} = 5 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$
(δεκτή)

(δ) $5(x+1)^{\frac{1}{3}} = 20 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 4^3 \Leftrightarrow x + 1 = 64$

$\Leftrightarrow x = 63$ (δεκτή)

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{-\frac{1}{2}} = 4,\ \ x > 0$ **(β)** $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27},\ \ x > 0$

Απάντηση

(α) $x^{-\frac{1}{2}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 4^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$ (δεκτή)

(β) $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 27^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$
(δεκτή)

8. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε το χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διένυσε είναι 640 m.

<u>Απάντηση</u>

$$s(t) = 640 \Leftrightarrow 10t^{\frac{3}{2}} = 640 \Leftrightarrow t^{\frac{3}{2}} = 64 \Leftrightarrow \left(t^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow t = 4^2 = 16\ \mathrm{sec}$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}, \qquad \alpha, \beta \geq 0$$

<u>Απάντηση</u>

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} + \left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha + 2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

1.4 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό

Θεωρία

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν α ρητός αριθμός και β άρρητος αριθμός, τότε ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι άρρητος.
- Αν α ρητός αριθμός, $\alpha \neq 0$ και β άρρητος αριθμός, τότε ο αριθμός $\alpha+\beta$ είναι άρρητος.
- Δεν ισχύει ότι το άθροισμα δύο άρρητων είναι άρρητος αριθμός. Για παράδειγμα, αν $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι άρρητοι, αλλά ο αριθμός $\alpha+\beta=0$ είναι ρητός. Όμως, $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ κ.ο.κ. είναι άρρητοι αριθμοί.

Παράσταση $\boldsymbol{A}$	**Συζυγής παράσταση** $\boldsymbol{B}$	**Γινόμενο** $\boldsymbol{A\cdot B}$
$\frac{\alpha}{\beta}$ $\alpha,\beta\in\mathbb{Z},\quad \beta\neq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$
$\alpha+\kappa\sqrt{\beta}$ $\alpha,\kappa\in\mathbb{R},\ \beta\geq 0$	$\alpha-\kappa\sqrt{\beta}$	$(\alpha+\kappa\sqrt{\beta})\cdot(\alpha-\kappa\sqrt{\beta})$ $=\alpha^2-(\kappa\sqrt{\beta})^2=\alpha^2-\kappa^2\beta^2$
$\lambda\sqrt{\alpha}+\mu\sqrt{\beta}$ $\alpha,\ \beta\geq 0$ $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$	$\lambda\sqrt{\alpha}-\mu\sqrt{\beta}$	$(\lambda\sqrt{\alpha}+\mu\sqrt{\beta})\cdot(\lambda\sqrt{\alpha}-\mu\sqrt{\beta})$ $=(\lambda\sqrt{\alpha})^2-(\mu\sqrt{\beta})^2$ $=\lambda^2\alpha^2-\mu^2\beta^2$

Παράδειγμα

Παράσταση $\boldsymbol{A}$	**Συζυγής παράσταση** $\boldsymbol{B}$	**Γινόμενο** $\boldsymbol{A\cdot B}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$
$3+2\sqrt{5}$	$3-2\sqrt{5}$	$(3+2\sqrt{5})\cdot(3-2\sqrt{5})$ $=3^2-(2\sqrt{5})^2=9-4\cdot 25$ $=91$
$2\sqrt{3}-5\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}+5\sqrt{2}$	$(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3}+5\sqrt{2})$ $=(2\sqrt{3})^2-(5\sqrt{2})^2$ $=4\cdot 3-5\cdot 2=2$

Δραστηριότητες σελ. 40-41 (Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό)

1. Δίνεται ο αριθμός $x=\sqrt{7}-\sqrt{2}$.

(α) Να γράψετε τον αριθμό y, ο οποίος είναι συζυγής αριθμός με τον x.

(β) Να δείξετε ότι το γινόμενο xy είναι ακέραιος αριθμός.

Απάντηση

(α) $y=\sqrt{7}+\sqrt{2}$

(β) $xy=(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2=7-2=5\in\mathbb{Z}$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α)	Ο αριθμός $3+\sqrt{2}$ έχει συζυγή τον αριθμό $\sqrt{3}+2$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα κλάσμα με ρητό παρονομαστή, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\frac{2}{7\sqrt{6}}$, είναι και το $\frac{\sqrt{6}}{21}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Οι αριθμοί $(\sqrt{15}-\sqrt{13})$ και $\left(\frac{2}{\sqrt{15}+\sqrt{13}}\right)$ είναι ίσοι.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Οι αριθμοί $(\sqrt{17}+4)$ και $(\sqrt{17}-4)$ είναι αντίστροφοι.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $x\geq 0$, τότε ισχύει ότι: $$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=\sqrt{x}-2$$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΛΑΘΟΣ:**
Ο αριθμός $3+\sqrt{2}$ έχει συζυγή τον αριθμό $3-\sqrt{2}$.

(β) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\frac{2}{7\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{7(\sqrt{6})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{7\cdot 3}=\frac{\sqrt{6}}{21}$$

(γ) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x})^2-2^2}=\frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{x-4}$$
$$=\sqrt{x}-2$$

3. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ **(β)** $\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}$

(γ) $\frac{20}{\sqrt{5}}$ **(δ)** $\frac{9}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}$

(ε) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

Απάντηση

(α) $\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$

(β) $\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(γ) $\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$

(δ) $\frac{9}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{3\cdot 2}}=\frac{9}{\sqrt{6}}=\frac{9\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{9\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{9\sqrt{6}}{6}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

(ε) $\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{5\cdot 6}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

4. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{1+\sqrt{2}}$ **(β)** $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

(γ) $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}}$ **(δ)** $\frac{9}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

(ε) $\frac{1-\alpha}{1-\sqrt{\alpha}},\ \alpha>0, \alpha\neq 1$ **(στ)** $\frac{(x-y)^2}{x+y+2\sqrt{xy}},\ x,y>0, x\neq y$

Απάντηση

(α) $\frac{5}{1+\sqrt{2}}=\frac{5\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{5\left(1-\sqrt{2}\right)}{1^2-2^2}=\frac{5\left(1-\sqrt{2}\right)}{-1}=5\left(\sqrt{2}-1\right)$

(β) $\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$$= \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{6-3} = \frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{3} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$$

(γ) $$\frac{2}{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}} = \frac{2\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}}{\left(\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{6-5}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{5})}{2} = 2\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{5}}(\sqrt{6}-\sqrt{5})$$

(δ) $$\frac{9}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \frac{9(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \frac{9(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{9(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{4\cdot 3-3\cdot 2} = \frac{9(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{12-6} = \frac{9(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{6}$$

$$= \frac{3(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{2}$$

(ε) $$\frac{1-\alpha}{1-\sqrt{\alpha}} = \frac{1-\alpha}{1-\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1+\sqrt{\alpha}} = \frac{(1-\alpha)(1+\sqrt{\alpha})}{(1-\sqrt{\alpha})(1+\sqrt{\alpha})}$$

$$= \frac{(1-\alpha)(1+\sqrt{\alpha})}{1-(\sqrt{\alpha})^2} = \frac{(1-\alpha)(1+\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} = 1+\sqrt{\alpha}$$

(στ) Στην άσκηση 9 της προηγούμενης παραγράφου, δείξαμε ότι:

$$\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}, \qquad \alpha,\beta \geq 0$$

Άρα,

$$\frac{(x-y)^2}{x+y+2\sqrt{xy}} = \frac{(x-y)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^2 = \left[\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2}\right]^2 = \left[\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}\right]^2 = \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$$

$$= a+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}$$

Διαφορετικά:

$$\frac{(x-y)^2}{x+y+2\sqrt{xy}} = \frac{(x-y)^2(x+y-2\sqrt{xy})}{(x+y-2\sqrt{xy})(x+y+2\sqrt{xy})} = \cdots$$

5. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$A=\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{16}{\sqrt{8}}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή $\kappa\sqrt{2}$, όπου το κ είναι ένας φυσικός αριθμός.

Απάντηση

$$A=\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{16}{\sqrt{8}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}}=\frac{6\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{16\sqrt{8}}{\left(\sqrt{8}\right)^2}=\frac{6\sqrt{2}}{2}+\frac{16\sqrt{8}}{8}$$

$$=3\sqrt{2}+2\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}$$

$$=3\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}.$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

(α) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{12-\sqrt{2}}{2}$

(β) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}$

(γ) $\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

(δ) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Απάντηση

(α)
$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{12-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{12-\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{12-\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+12-\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{2}=6$$

(β)
$$\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}=\frac{6}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$=\frac{6}{9-5}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

(γ)
$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{4-2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

(δ) $$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

7. Να δείξετε ότι:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=4$$

Απάντηση

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3+\sqrt{3})^2+(3-\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\frac{3^2+6\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+3^2-6\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{9+3+9+3}{9-3}=\frac{24}{6}=4$$

1.5 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Θεωρία

Υπενθυμίσεις

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί.

(α) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
Παράδειγμα: $x - 1 > 2 \Leftrightarrow x - 1 + 1 > 2 + 1 \Leftrightarrow x > 3$

(β) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$
Παράδειγμα: $x + 1 > 2 \Leftrightarrow x + 1 - 1 > 2 - 1 \Leftrightarrow x > 1$

(γ) Αν $\gamma > 0$,
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$$
Παράδειγμα: $2x > 4 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} > \frac{4}{2} \Leftrightarrow x > 2$

(δ) Αν $\gamma < 0$,
$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$$
Παράδειγμα: $-2x > 4 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{4}{-2} \Leftrightarrow x < -2$

Θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο κάτω **Αξιώματα**, δηλαδή κάποιες μαθηματικές προτάσεις, τις οποίες δεχόμαστε ως αληθείς:

Α. Το γινόμενο δύο (γνήσια) θετικών αριθμών είναι (γνήσια) θετικός αριθμός:
$$x, y > 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0$$

Β. Το γινόμενο δύο (γνήσια) αρνητικά αριθμών είναι (γνήσια) θετικός αριθμός:
$$x, y < 0 \Longrightarrow x \cdot y > 0$$

Γ. Ένας πραγματικός αριθμός x είναι είτε (γνήσια) αρνητικός ($x < 0$), είτε (γνήσια) θετικός ($x > 0$), είτε το μηδέν ($x = 0$).

Πρόταση (Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών)

(α) Ιδιότητα 1 (Μεταβατική ιδιότητα)

Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < y < z$, για κάθε x, y, z πραγματικούς αριθμούς.

(β) Ιδιότητα 2

Αν $x > y$ και $z > w$, τότε $x + z > w + y$, για κάθε x, y, z, w πραγματικούς αριθμούς.

(γ) Ιδιότητα 3

Αν $x > y > 0$ και $z > w > 0$, τότε $x \cdot z > w \cdot y$, για κάθε x, y, z, w πραγματικούς αριθμούς.

(δ) Ιδιότητα 4

$x^2 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(ε) Ιδιότητα 5

Αν x, y ομόσημοι, τότε

$$x \leq y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$$

(στ) Ιδιότητα 6

Αν $x, y > 0$ και ν φυσικός αριθμός, τότε

$$x > y \Leftrightarrow x^\nu > y^\nu$$

(ζ) Ιδιότητα 7

Αν $x, y \geq 0$ και ν φυσικός αριθμός, τότε

$$x > y \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{x} > \sqrt[\nu]{y}$$

(η) Ιδιότητα 8

Αν $x > 1$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί με $\mu < \nu$, τότε

$$\sqrt[\mu]{x} > \sqrt[\nu]{x}$$

(θ) Ιδιότητα 9

Αν $0 < x < 1$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί με $\mu < \nu$, τότε

$$\sqrt[\mu]{x} < \sqrt[\nu]{x}$$

Απόδειξη

(α)

$$\begin{cases} y > x \Rightarrow y - x > 0 \\ z > y \Rightarrow \ z - y > 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Αξίωμα Α.}} (y - x) + (z - y) > 0 \ \Rightarrow \ y - x + z - y > 0$$

$$\Rightarrow -x + z > 0 \ \Rightarrow \ z > x$$

(β)

$$\begin{cases} x > y \Rightarrow x - y > 0 \\ z > w \Rightarrow \ z - w > 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Αξίωμα Α.}} (x - y) + (z - w) > 0 \ \Rightarrow \ x + z - y - w > 0$$

$$\Rightarrow \ x + z > w + y$$

(γ)

$z > w > 0 \Rightarrow z > 0$ και $x > y > 0$.

Συνεπώς (πολλαπλασιασμός με $z > 0$ στην $x > y > 0$): $x \cdot z > w \cdot y$

(δ)

Αν $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση ισχύει (ως ισότητα)

Αν $\alpha > 0$, τότε πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη με $\alpha > 0$ και παίρνω $\alpha^2 > 0$.

Αν $\alpha < 0 \Rightarrow -\alpha > 0$, τότε πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη με $-\alpha > 0$ και παίρνω

$$(-\alpha)\cdot(-\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha^2 > 0.$$

(ε)

x, y ομόσημοι$\Rightarrow xy > 0 \Rightarrow \frac{1}{xy} > 0$. Τότε (πολλαπλασιασμός με θετικό αριθμό):

$$x \le y \iff \frac{1}{xy}\cdot x \le y\cdot\frac{1}{xy} \iff \frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$$

(στ)

Θα δείξω πρώτα ότι $x > y \Rightarrow x^\nu > y^\nu$:

$$\begin{cases} x > y > 0 \\ x > y > 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Ιδιότητα 3}} x^2 > y^2 > 0$$

Επαναλαμβάνω:

$$\begin{cases} x^2 > y^2 > 0 \\ x > y > 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{Ιδιότητα 3}} x^3 > y^3 > 0$$

και συνεχίζοντας έτσι, καταλήγω στο ότι $x^\nu > y^\nu$.

Ακολούθως, θα δείξω ότι $x^\nu > y^\nu \Rightarrow x > y$:

- Αν $0 < x < y$. Τότε, ακολουθώντας τα βήματα που κάναμε πιο πάνω, βρίσκω ότι $x^\nu < y^\nu$, άτοπο.
- Αν $x = y$, τότε επαναλαμβάνοντας την ιδιότητα 3 ν φορές, έχω ότι $x^\nu = y^\nu$, το οποίο επίσης είναι άτοπο.

Συνεπώς, $x > y$.

(ζ) Είναι άμεση εφαρμογή της προηγούμενης ιδιότητας:

$$\sqrt[\nu]{x} > \sqrt[\nu]{y} \iff \left(\sqrt[\nu]{x}\right)^\nu > \left(\sqrt[\nu]{y}\right)^\nu \iff x > y.$$

(η)

$$\begin{cases} \nu > \mu \Rightarrow \nu - \mu > 0 \\ \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha^{\nu-\mu} > 1 \Rightarrow \sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\nu-\mu}} > \sqrt[\nu\mu]{1} = 1$$

Τώρα:

$$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \frac{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}}{\sqrt[\nu\mu]{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[\mu\nu]{\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu-\mu}} > 1$$

και άρα:

$$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\alpha}} > 1$$

από την οποία έχω ότι $\sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha}$.

(θ) Όμοια επιχειρήματα με την προηγούμενη ιδιότητα.

Παράδειγμα 1

Αν $x < 1 < y < 3 < \omega$, να προσδιορίσετε το πρόσημο της παράστασης

$$(x-y)(y-\omega)(x-\omega)(\omega-1).$$

Απάντηση

Διατάσσουμε τους αριθμούς εντός των παρενθέσεων:
$x < 1 < y \Rightarrow x < y \Rightarrow x - y < 0,$
$y < 3 < \omega \Rightarrow y < \omega \Rightarrow y - \omega < 0,$
$x < y < \omega \Rightarrow x < \omega \Rightarrow x - \omega < 0,$
$1 < y < 3 < \omega \Rightarrow 1 < \omega \Rightarrow \omega - 1 > 0.$
Συνεπώς,

$$\underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{(y-\omega)}_{<0}\underbrace{(x-\omega)}_{<0}\underbrace{(\omega-1)}_{>0} < 0$$

Παράδειγμα 2

Αν $2 < x < 3$ και $-3 < y < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι ακόλουθες παραστάσεις:

$(\boldsymbol{\alpha})$ $5x + 2y$ $(\boldsymbol{\beta})$ $-\frac{5x}{3y}$ $(\boldsymbol{\gamma})$ $x^2 - 5y$ $(\boldsymbol{\delta})$ $\frac{1-x}{3y}$ και $(\boldsymbol{\varepsilon})$ $-x \cdot y$

Απάντηση

(α)

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ -3 < y < -2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} \begin{cases} 5 \cdot 2 < 5x < 5 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-3) < 2y < 2 \cdot (-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 < 5x < 15 \\ -6 < 2y < -4 \end{cases}$$

$$\xRightarrow{\text{Ιδιότητα 2}} 10 - 6 < 5x + 2y < 15 - 4 \Rightarrow \mathbf{4 < 5x + 2y < 11}.$$

(β) Από το (α), $10 < 5x < 15$ και

$$\xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} -3 \cdot (-2) < -3y < -3 \cdot (-3) \Rightarrow 6 < -3y < 9$$

$$\xRightarrow{\text{Ιδιότητα 5}} \frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{6}$$

Άρα:

$$\begin{cases} 10 < 5x < 15 \\ \frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{6} \end{cases} \xRightarrow{\text{Ιδιότητα 3}} 10 \cdot \frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} \cdot 5x < 15 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{10}{9} < -\frac{5x}{3y} < \frac{5}{2}}$$

(γ)

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} 2 \cdot 2 < x \cdot x < 3 \cdot 3 \Rightarrow 4 < x^2 < 9$$

και

$$-3 < y < -2 \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} -5 \cdot (-2) < -5y < -5 \cdot (-3) \Rightarrow 10 < -5y < 15$$

Άρα:

$$\begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ 10 < -5y < 15 \end{cases} \xRightarrow{\text{Ιδιότητα 2}} 4 + 10 < x^2 + (-5y) < 9 + 15 \Rightarrow \boldsymbol{14 < x^2 - 5y < 24}$$

(δ)

$$2 < x < 3 \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} -3 < -x < -2 \xRightarrow{\text{Ιδιότητα 2}} 1 - 3 < 1 - x < 1 - 2$$

$$\Rightarrow -2 < 1 - x < -1 \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} 1 < x - 1 < 2$$

Από το προηγούμενο ερώτημα:

$$\frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{6}$$

Άρα:

$$\begin{cases} 1 < x - 1 < 2 \\ \frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{6} \end{cases} \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} \frac{1}{9} < -\frac{1}{3y} \cdot (x - 1) < \frac{2}{6}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{1}{9} < \frac{1 - x}{3y} < \frac{1}{3}}$$

(ε)

$$\begin{cases} 2 < x < 3 \\ 2 < -y < 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} \boldsymbol{4 < -x \cdot y < 9}$$

Παράδειγμα 3

Αν $0 < x < 1 < y < 2$, να υπολογίσετε το πρόσημο της πιο κάτω παράστασης:

$$(x - y)(y - 1)(3 - x)$$

Απάντηση

$x < y \Rightarrow x - y < 0$,
$1 < y \Rightarrow y - 1 > 0$,
$x < 1 < y < 2 < 3 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow 0 < 3 - x$.

Συνεπώς,

$$\underbrace{(x - y)}_{<0}\underbrace{(y - 1)}_{>0}\underbrace{(3 - x)}_{>0} < 0$$

Παράδειγμα 4

Αν $0 < x < 1 < y < 2$, να υπολογίσετε το πρόσημο της πιο κάτω παράστασης:

$$(x^2 - 1)(y - x)(2 - x)$$

Απάντηση

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{Υπενθύμιση (γ)}} 0 < x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0,$$

$$x < 1 < y \Rightarrow x < y \Rightarrow 0 < y - x,$$

$$x < 1 < y < 2 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow 0 < 2 - x$$

Συνεπώς,

$$\underbrace{(x^2 - 1)}_{<0}\underbrace{(y - x)}_{>0}\underbrace{(2 - x)}_{>0} < 0$$

Δραστηριότητες σελ. 50-52 (Διάταξη Πραγματικών Αριθμών)

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν $\alpha > 3$ και $\beta > 2$, τότε $\alpha\beta > 6$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Αν $\kappa > \lambda$ και $\lambda > -2$, τότε $\kappa + \lambda > 1$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν $\alpha > -3$, τότε $\alpha^2 > 9$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 3$, τότε $\alpha > 3\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) Αν $\alpha - \beta > 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, τότε $\alpha^2 - \beta^2 > 0$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(στ) Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ζ) Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(η) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(θ) Αν $x > y$, τότε $\sqrt[\nu]{x} < \sqrt[\nu]{y},\ (x, y \geq 0,\ \nu$ φυσικός). ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ι) Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

<u>Απάντηση</u>

(α) ΣΩΣΤΟ:

Άμεσο από την ιδιότητα 3: $\begin{cases} \alpha > 3 > 0 \\ \beta > 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 3 \cdot 2 = 6$

(β) ΣΩΣΤΟ:

Από την ιδιότητα 2: $\begin{cases} \kappa > 5 \\ \lambda > -2 \end{cases} \Rightarrow\ \kappa + \lambda > 5 - 2 \Rightarrow\ \kappa + \lambda > 3 > 1$

(γ) ΛΑΘΟΣ:

Για παράδειγμα, αν $\alpha = -2 > -3$, τότε $\alpha^2 = (-2)^2 = 4 < 9$

(δ) ΛΑΘΟΣ:

Για παράδειγμα αν $\alpha = -10$ και $\beta = -2$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = 5 > 3$,

αλλά $\alpha = -10 < 3\beta = -6$

(ε) **ΣΩΣΤΟ:**
$\alpha - \beta > 0 \Rightarrow \alpha > \beta$ και αρα από την ιδιότητα 3, αφού $\alpha, \beta > 0$,
έπεται ότι $\alpha \cdot \alpha > \beta \cdot \beta$, δηλαδή $\alpha^2 - \beta^2 > 0$

(στ) **ΛΑΘΟΣ:**
Για παράδειγμα αν $\alpha = -\frac{1}{3}$ και $\beta = -\frac{1}{4}$, τότε $\alpha < \beta < 0$,
αλλά $\alpha^2 = \frac{1}{9} > \frac{1}{16} = \beta^2$

(ζ) **ΛΑΘΟΣ:**
Για παράδειγμα αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, τότε $\underbrace{25}_{\alpha^2} > \underbrace{(-5) \cdot 1}_{\alpha\beta} = -5$,
αλλά $\underbrace{\alpha}_{-5} < \underbrace{\beta}_{1}$.

(η) **ΛΑΘΟΣ:**
Για παράδειγμα αν $\alpha = 2,\ \beta = 1$ και $\gamma = 4,\ \delta = 3$, τότε

$$\begin{cases} \alpha > \beta \\ \\ \gamma > \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha - \gamma = -2 < 1 = 4 - 3 = \gamma - \delta$$

(θ) **ΛΑΘΟΣ:**
Για παράδειγμα αν $\alpha = 25 > 0,\ \beta = 16$ και $\nu = 2$, τότε $\alpha > \beta$ και
$\underbrace{\sqrt{25}}_{\sqrt{\alpha}} = 5 > \underbrace{4}_{\sqrt{\beta}}$.

(ι) **ΣΩΣΤΟ:**
Άμεσο από την ιδιότητα 5.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta > 0$, τότε:

Α. $-\alpha\beta < 0$ **Β.** $\alpha - \beta > 0$ **Γ.** $\alpha\beta < 0$ **Δ.** $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R},\ x \leq 1,\ y \geq 8$, τότε:

Α. $xy \leq 8$ **Β.** $xy \geq -8$ **Γ.** $x + y \geq 7$ **Δ.** $x - y \leq -9$

(γ) Αν $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

Α. $xy < 0$ **Β.** $\frac{1}{x} \geq 4$ **Γ.** $x + y \leq -1$ **Δ.** $x - y \leq 9$

(δ) Αν $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

Α. $x^2 \leq 9$ **Β.** $y^2 \leq 9$ **Γ.** $x - y \leq 6$ **Δ.** $\frac{1}{x} > 0$

Απάντηση

(α) Σωστό το Δ: $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ (Άμεσο από την ιδιότητα 5)

(β) Σωστό το Δ: $x - y \leq -9$. Πράγματι, $y \geq 8 \Rightarrow -y \leq -8$ και άρα έχουμε:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -y \leq -8 \end{cases} \xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} x + (-y) \leq (-1) + (-8), \quad \delta\eta\lambda.\ x - y \leq -9$$

(γ) Σωστό το Α: $x \cdot y < 0$. Πράγματι, $y \leq -5 \Rightarrow -y \geq 5$. Συνεπώς,

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ -y \geq 5 \end{cases} \xRightarrow{\text{ιδιότητα 3}} x \cdot (-y) \geq 4 \cdot 5 = 20, \delta\eta\lambda. -x \cdot y \geq 5 > 0$$

και άρα $x \cdot y < 0$.
Σημείωση: η υπόθεση το $x \neq 0$ όπως δίνεται στην εκφώνηση του σχολικού βιβλίου είναι περιττή αφού υποθέτουμε ότι $x \geq 4$.

(δ) Σωστό το Δ: $\frac{1}{x} > 0$ αφού $x \geq 4 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$.

Σημείωση: η υπόθεση το $x \neq 0$ όπως δίνεται στην εκφώνηση του σχολικού βιβλίου είναι περιττή αφού υποθέτουμε ότι $x \geq 4$.

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο <, =, >, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $24^{\frac{3}{5}} \ldots\ldots 15^{\frac{3}{5}}$ **(β)** $17^{-\frac{3}{5}} \ldots\ldots 15^{-\frac{3}{5}}$ **(γ)** $0{,}7^{\frac{5}{7}} \ldots\ldots 0{,}4^{\frac{5}{7}}$

(δ) $0{,}3^{-\frac{3}{5}} \ldots\ldots 0{,}5^{-\frac{3}{5}}$ **(ε)** $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} \ldots\ldots -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$

Απάντηση

(α) $24^{\frac{3}{5}} > 15^{\frac{3}{5}}$.
Πράγματι,

$$24 > 15 > 0 \xRightarrow{\text{ιδιότητα 7}} 24^{\frac{1}{5}} > 15^{\frac{1}{5}} \xRightarrow{\text{ιδιότητα 6}} \left(24^{\frac{1}{5}}\right)^3 > \left(15^{\frac{1}{5}}\right)^3, \delta\eta\lambda. 24^{\frac{3}{5}} > 15^{\frac{3}{5}}$$

(β) $17^{-\frac{3}{5}} < 15^{-\frac{3}{5}}$.
Πράγματι,

$$17^{-\frac{3}{5}} < 15^{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{5}}$$

η οποία είναι αληθής (προχωράμε όπως ακριβώς στο (α))

(γ) $0{,}7^{\frac{5}{7}} > 0{,}4^{\frac{5}{7}}$.
Πράγματι, έπεται όπως στα προηγούμενα, αφού $0{,}7 > 0{,}4$.

(δ) $0{,}3^{-\frac{3}{5}} > 0{,}5^{-\frac{3}{5}}$.
Πράγματι,

$$0{,}3^{-\frac{3}{5}} > 0{,}5^{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{0{,}3}\right)^{\frac{3}{5}} > \left(\frac{1}{0{,}5}\right)^{\frac{3}{5}}$$

η οποία είναι αληθής (προχωράμε όπως ακριβώς στα προηγούμενα)

(ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} < -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$.
Πράγματι,

$$\frac{2}{7} > \frac{2}{9} > 0 \xrightarrow{\text{ιδιότητα 7}} \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 6}} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{11} > \left(\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$$

δηλαδή:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} > \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}} \text{ και αρα } -\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} < -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}.$$

4. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10},\ \beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$, τότε:

Α. $\alpha < \beta < \gamma$ **Β.** $\alpha < \gamma < \beta$ **Γ.** $\gamma < \alpha < \beta$ **Δ.** $\beta < \gamma < \alpha$ **Ε.** $\beta < \alpha < \gamma$

<u>Απάντηση</u>

$$\xrightarrow{\text{ιδιότητα 8}} \sqrt[6]{10} > \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$$

και

$$9 > 8 \xrightarrow{\text{ιδιότητα 8}} \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} \Rightarrow \sqrt[6]{3^2} > \sqrt[6]{2^3} \Rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

Άρα,

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$$

Δηλαδή σωστό το **Δ.** ($\beta < \gamma < \alpha$).

5. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$.

(α) $A = 10\alpha - 3, \quad B = 10\beta - 3$

(β) $\Gamma = 4 - 3\alpha, \quad B = 4 - 3\beta$

(γ) $E = 2\alpha^2 + 3, \quad Z = 2\beta^2 + 3$

(δ) $H = \frac{5}{\alpha} - 1, \quad \Theta = \frac{5}{\beta} - 1$

(ε) $K = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

Απάντηση

(α) $\alpha < \beta \Rightarrow 10\alpha < 10\beta \xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 10\alpha - 3 < 10\beta - 3$, δηλαδή $A < B$.

(β) $\alpha < \beta \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow -3\alpha < -3\beta \xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 4 - 3\alpha < 4 - 3\beta$, δηλαδή $\Gamma > \Delta$.

(γ) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 < 2\beta^2 \xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 2\alpha^2 + 3 < 2\beta^2 + 3$, δηλαδή $E < Z$.

(δ) $\alpha, \beta\ ομόσημοι, τότε\ \alpha < \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow 5\frac{1}{\alpha} > 5\frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{5}{\alpha} > \frac{5}{\beta}$
$\xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} \frac{5}{\alpha} - 1 > \frac{5}{\beta} - 1$, δηλαδή $H > \Theta$.

(ε)

$$0 < \alpha < \beta \Rightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

δηλαδή $\Lambda < K$.

6. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 < \alpha$.

Απάντηση

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 1 \end{cases} \xRightarrow{\text{ιδιότητα 3}} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha^2 < \alpha.$$

7. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $x < y$, τότε να διατάξετε τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{x}{y}, \quad \frac{y}{x}$$

από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{x} \cdot y \Rightarrow 1 < \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot y \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$$

Έτσι,

$$\frac{x}{y} < 1 < \frac{y}{x}$$

8. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, αποδείξετε ότι:

(α) $3 < x + y < 8$ **(β)** $4 < 2x + y < 11$ **(γ)** $-4 < x - y < 1$

<u>Απάντηση</u>

(α) Είναι

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 2 \end{cases} \Rightarrow x + y > 2 + 1 = 3 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \begin{cases} x < 3 \\ y < 5 \end{cases} \Rightarrow x + y < 3 + 5 = 8$$

και άρα

$$3 < x + y < 8.$$

(β) Είναι $x > 1 \Rightarrow 2x > 2 \cdot 1 = 2$ και αρα $\begin{cases} 2x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + y > 2 + 2 = 4.$

Επίσης,

$x < 3 \Rightarrow 2x < 3 \cdot 2 = 6$ και αρα $\begin{cases} 2x < 6 \\ y < 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + y < 6 + 5 = 11.$

Έτσι,

$$4 < 2x + y < 11.$$

(γ) Είναι $y > 2 \Rightarrow -y < -2$ και αρα $\begin{cases} x < 3 \\ -y < -2 \end{cases} \Rightarrow x + (-y) < 3 - 2 = 1.$

Επίσης,

$y < 5 \Rightarrow -y > -5$ και αρα $\begin{cases} x > 1 \\ -y > -5 \end{cases} \Rightarrow x + (-y) > 1 - 5 = -4.$

Έτσι,

$$-4 < x - y < 1.$$

9. Αν $x > 2$ και $y > 3$, αποδείξετε ότι:

(α) $xy > 6$ **(β)** $(x - 2)(y - 3) > 0$

<u>Απάντηση</u>

(α) Από την ιδιότητα 3: $\begin{cases} x > 2 > 0 \\ y > 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y > 2 \cdot 3 = 6$

(β) $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 2 - 2 = 0$ και $y > 3 \Rightarrow y - 3 > 3 - 3 = 0$ και αρα

$$\underbrace{(x-2)}_{>0}\underbrace{(y-3)}_{>0} > 0$$

10. Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι $(x-3)(y-2) < 0$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $xy + 6 < 2x + 3y$.

Απάντηση

$x > 3 \Rightarrow x - 3 > 3 - 3 = 0$ και $y < 2 \Rightarrow y - 2 < 2 - 2 = 0$ και αρα

$$\underbrace{(x-3)}_{>0}\underbrace{(y-2)}_{<0} < 0$$

Τότε,

$$(x-3)(y-2) < 0 \Rightarrow xy - 2x - 3y + 6 < 0 \Rightarrow xy + 6 < 2x + 3y$$

11. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι πραγματικοί αριθμοί:

$$2x + 3y,\ \ xy,\ \ \frac{x}{y},\ \ -\frac{2x}{3y}$$

Απάντηση

$$1 < x < 2 \Rightarrow 2 \cdot 1 < 2x < 2 \cdot 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4$$

και

$$-2 < y < -1 \Rightarrow -2 \cdot 3 < 3y < -1 \cdot 3 \Rightarrow -6 < 3y < -3$$

και άρα

$$\begin{cases} 2 < 2x < 4 \\ -6 < 3y < -3 \end{cases} \Rightarrow 2 - 6 < 2x + 3y < 4 - 3 \Rightarrow \boldsymbol{-4 < 2x + 3y} < 1$$

Τώρα, $-2 < y < -1 \Rightarrow -(-1) < -y < -(-2) \Rightarrow 1 < -y < 2$.

Συνεπώς,

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 1 < -y < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot 1 < x \cdot (-y) < 2 \cdot 2 \Rightarrow 1 < -x \cdot y < 4 \Rightarrow \boldsymbol{-4 < x \cdot y < -1}$$

Από πριν, έχουμε ότι $1 < -y < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{1}{y} < 1$.

Συνεπώς,

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} < -\frac{1}{y} < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} < x \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) < 2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{x}{y} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{2}$$

Από πρίν, έχουμε ότι $1 < -y < 2 \Rightarrow 3 < -3y < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{3}$.

Επίσης, είδαμε ότι $2 < 2x < 4$. Έτσι,

$$\begin{cases} 2 < 2x < 4 \\ \frac{1}{6} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{6} < 2x\left(-\frac{1}{3y}\right) < 4 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{2x}{3y} < \frac{4}{3}$$

12. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει 32 m μήκος και 20 m πλάτος. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα 10 cm για κάθε διάσταση, τότε να υπολογίσετε:

(α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου

(β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του οικοπέδου.

Απάντηση

(α) Έστω $x = σφάλμα\ μήκους$ και $y = σφάλμα\ πλάτους$. Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι

$$x \leq 0.1m \ \ και \ \ y \leq 0.1m \Rightarrow \ x \leq 0.2m \quad και \ \ 2y \leq 0.2m$$

και άρα οι μετρήσεις των πλευρών του οικοπέδου α και β ικανοποιούν τις

$$31.9 = 32 - 0.1 \leq \alpha \leq 32 + 0.1 = 32.1$$

και

$$19.9 = 20 - 0.1 \leq \beta \leq 20 + 0.1 = 20.1$$

αντίστοιχα. Έτσι,

$$63.8 \leq 2\alpha \leq 64.2 \ \ και \ 39.8 \leq 2\beta \leq 40.2$$

Συνεπώς, η περίμετρος $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ του οικοπέδου θα ικανοποιεί την

$$\underbrace{63.8 + 39.8}_{103.6m} \leq 2\alpha + 2\beta \leq \underbrace{40.2 + 64.2}_{104.4m}$$

(β) Ομοίως, για το εμβαδόν, $E = \alpha\beta$

$$\underbrace{19.9 \times 31.9}_{634.81m} \leq \alpha\beta \leq \underbrace{20.1 \times 32.1}_{645.21m}$$

13. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$\alpha - \gamma < \beta - \delta, \ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

(β) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}, \ \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \qquad \text{με } \gamma \neq 0$$

Απάντηση

(α) Αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = -1, \delta = 0$ τότε $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$,

αλλά

$$\alpha - \gamma = 3 = \beta - \delta.$$

(β) Αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = -3, \delta = -1$ τότε $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, αλλά

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{2}{3} > -3 = \frac{\beta}{\delta}$$

14. Αν $x < y < \omega$, τότε να αποδείξετε ότι $(x-y)(y-\omega)(\omega-x) > 0$.

Απάντηση

$$x < y \Rightarrow x - y < 0, \quad y < \omega \Rightarrow y - \omega < 0 \ \textit{και} \ x < y < \omega \Rightarrow x < \omega \Rightarrow \omega - x > 0$$

Συνεπώς,

$$\underbrace{\underbrace{(x-y)}_{<0}\underbrace{(y-\omega)}_{<0}}_{>0}\underbrace{(\omega-x)}_{>0} > 0$$

15. Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Στη συνέχεια, μα συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

Απάντηση

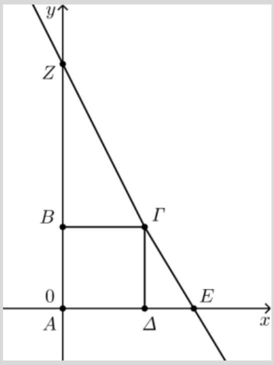
$30 < 64 \Rightarrow \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{30} < 4$ και $27 < 30 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[3]{27}}_{3} < \sqrt[3]{30} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{30}$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Τώρα,

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Rightarrow -4 < -\sqrt[3]{30} < -3 \Rightarrow 6 - 4 < 6 - \sqrt[3]{30} < 6 - 3 \Rightarrow 2 < 6 - \sqrt[3]{30} < 3$$

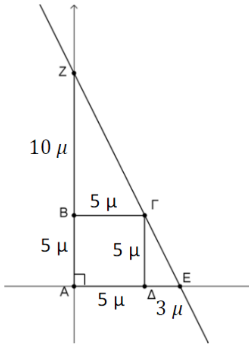
και άρα $6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$.

16. Δίνεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ με πλευρά $5\ cm$. Πάνω στις ημιευθείες $ΑΒ$ και $ΑΔ$ παίρνουμε σημεία $Ε$ και $Ζ$, τέτοια ώστε $ΔΕ = 3\ cm$ και $ΒΖ = 10\ cm$, αντίστοιχα. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία $Ζ, Γ$ και $Ε$ είναι συνευθειακά, υπολογίζοντας και συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών $ΖΓ, ΓΕ$ και $ΖΕ$.



Απάντηση

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα εμπλεκόμενα (ορθογώνια) τρίγωνα του σχήματος, έχουμε ότι $Z\Gamma = \sqrt{125}, \Gamma E = \sqrt{34}$ και $ZE = \sqrt{159}$. Τότε $\Gamma E < Z\Gamma < ZE$ και αρα τα σημεία είναι συνευθειακά.



Δραστηριότητες σελ. 56-59 (Δραστηριότητες Ενότητας)

1. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε την απάντησή σας στη μορφή $\alpha+\beta\sqrt{3}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

(α) $(8+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$ **(β)** $\dfrac{26}{4+\sqrt{3}}$

Απάντηση

(α) $(8+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=16-8\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2$

$=18-6\sqrt{3}-3=13-6\sqrt{3}$

(β) $\dfrac{26}{4+\sqrt{3}}=\dfrac{26}{4+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}=\dfrac{26\left(4-\sqrt{3}\right)}{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}$

$=\dfrac{26\left(4-\sqrt{3}\right)}{4^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{26\left(4-\sqrt{3}\right)}{16-3}$

$=\dfrac{26}{13}\left(4-\sqrt{3}\right)=2\left(4-\sqrt{3}\right)=8-2\sqrt{3}$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$6\sqrt{81}-3\sqrt[3]{27}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{16}$$

Απάντηση

$6\sqrt{81}-3\sqrt[3]{27}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{16}\ =\ 6\sqrt{9^2}-3\sqrt[3]{3^3}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2^4}$

$6\cdot9-3\cdot3+\frac{1}{2}\cdot2\ =\ 54-9+1=46$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}$$

Απάντηση

$\sqrt{200}-2\sqrt{18}-3\sqrt{32}+4\sqrt{50}=\sqrt{100\cdot2}-2\sqrt{9\cdot2}-3\sqrt{16\cdot2}+4\sqrt{2\cdot25}$

$=\sqrt{100}\cdot\sqrt{2}-2\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}$

$=10\sqrt{2}-6\sqrt{2}-12\sqrt{2}+20\sqrt{2}\ =\ 12\sqrt{2}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{18}\right)$ **(β)** $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{96}\right):\sqrt{150}$

(γ) $\sqrt[3]{5+\sqrt{7+\sqrt[4]{16}}}$ **(δ)** $\dfrac{16}{\sqrt{5}}+\dfrac{9}{\sqrt{5}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{18}\right) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{32}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$

$= \sqrt{2\cdot 32}-\sqrt{2\cdot 18} = \sqrt{64}-\sqrt{36}$

$=\sqrt{8^2}-\sqrt{6^2} = 8-6 = 2.$

(β) $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{24}+\sqrt{96}\right):\sqrt{150} = 3\sqrt{6}:\sqrt{150}+\sqrt{24}:\sqrt{150}+\sqrt{96}:\sqrt{150}$

$$= 3\sqrt{6:150}+\sqrt{\frac{4}{25}}+\sqrt{\frac{16}{25}} = 3\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5} = \frac{3}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

(γ) $$\sqrt[3]{5+\sqrt{7+\sqrt[4]{16}}} = \sqrt[3]{5+\sqrt{7+\sqrt[4]{2^4}}} = \sqrt[3]{5+\sqrt{7+2}}$$

$$= \sqrt[3]{5+\sqrt{9}} = \sqrt[3]{5+3} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

(δ) $$\frac{16}{\sqrt{5}}+\frac{9}{\sqrt{5}}=\frac{16+9}{\sqrt{5}}=\frac{25}{\sqrt{5}}=\frac{25\cdot\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{25\cdot\sqrt{5}}{5}=5\sqrt{5}$$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[6]{\alpha^5}\cdot\left(\sqrt[6]{\alpha}\right)^7$ **(β)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\kappa^{36}}}}$

Απάντηση

(α) $$\sqrt[6]{\alpha^5}\cdot\left(\sqrt[6]{\alpha}\right)^7 = \sqrt[6]{\alpha^5}\cdot\sqrt[6]{\alpha^7} = \sqrt[6]{\alpha^5\cdot\alpha^7} = \sqrt[6]{\alpha^{12}} = \sqrt[6]{\alpha^{6\cdot 2}} = \alpha^2$$

(β) $$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{\kappa^{36}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\kappa^9}} = \sqrt[6]{\kappa^9} = \sqrt{\kappa^3} = \sqrt{\kappa^2}\cdot\sqrt{\kappa} = \kappa\sqrt{\kappa} = \kappa^{\frac{3}{2}}$$

6. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $\sqrt[3]{3},\ \sqrt{2}$ **(β)** $5+\sqrt{3},\ 3+\sqrt{5}$ **(γ)** $\sqrt{10+2\sqrt{15}},\ \sqrt{5}+\sqrt{3}$

Απάντηση

(α)
$$\left(\sqrt{2}\right)^6=\sqrt{2^6}=2^3=8$$
και
$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=\sqrt[3]{3^6}=3^2=9$$
Συνεπώς, αφού 9>8, έχουμε ότι:
$$\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}.$$

(β)
$$\begin{cases}5=5^1>\sqrt{5}\\3=3^1>\sqrt{3}\end{cases}\xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}}5-3>\ \sqrt{5}-\sqrt{3}\ \Rightarrow 5+\sqrt{3}>3+\sqrt{5}$$

(γ) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=5+2\underbrace{\sqrt{5}\sqrt{3}}_{\sqrt{15}}+3=8+2\sqrt{15}>0$

$\Rightarrow\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.$

Αλλά, $8+2\sqrt{15}<10+2\sqrt{15}\Rightarrow\sqrt{8+2\sqrt{15}}<\sqrt{10+2\sqrt{15}}$
και συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε:

$$\sqrt{10+2\sqrt{15}}>\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

7. Αν $A=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A-B$ **(β)** A^2-B^2 **(γ)** A^2+B^2

Απάντηση

(α) $A-B=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

(β) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$

$=\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]$

$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{2\cdot3}=4\sqrt{6}$

(γ) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$\Rightarrow\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=A^2+2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+B^2$

$\Rightarrow \ (2\sqrt{3})^2 = A^2 + 2 \cdot \left[(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2\right] + B^2$

$\Rightarrow \ 4 \cdot 3 = A^2 + 2 \cdot (3 - 2) + B^2$

$\Rightarrow \ 12 = A^2 + 2 + B^2$

$\Rightarrow A^2 + B^2 = 12 - 2 = 10$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x} = 9, \ x \geq 0$ **(β)** $\sqrt{x-2} = 5, \ x \geq 2$

(γ) $\sqrt{4 - x^2} = 2, \ x \in [-2,2]$ **(δ)** $\sqrt{x-5} = -2$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\sqrt{x} = 9 \ \Leftrightarrow \ (\sqrt{x})^2 = 9^2 \ \Leftrightarrow \ x = 81$, δεκτή.

(β) $\sqrt{x-2} = 5 \ \Leftrightarrow \ (\sqrt{x-2})^2 = 5^2 \ \Leftrightarrow \ x - 2 = 25 \ \Leftrightarrow x = 27$,

δεκτή.

(γ) $\sqrt{4 - x^2} = 2 \ \Leftrightarrow \ \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 = 2^2 \ \Leftrightarrow \ 4 - x^2 = 4$

$\Leftrightarrow \ x^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$, δεκτή.

(δ) Η $\sqrt{x-5} = -2$ δεν έχει πραγματικές λύσεις (είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$) αφού $\sqrt{x-5} \geq 0$.

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt[3]{5-x} = 3, \ x \leq 5$ **(β)** $\sqrt[4]{x-1} = 1, \ x \geq 1$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\sqrt[3]{5-x} = 3 \Leftrightarrow \ (\sqrt[3]{5-x})^3 = 3^3 \ \Leftrightarrow \ 5 - x = 27$

$\Leftrightarrow \ x = -22$, δεκτή.

(β) $\sqrt[4]{x-1} = 1 \Leftrightarrow \ (\sqrt[4]{x-1})^4 = 1^4 \ \Leftrightarrow \ x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow \ x = 2$, δεκτή.

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 - 81 = 0$ **(β)** $2x^3 + 16 = 0$

(γ) $x^3 - 4x = 0$

<u>Απάντηση</u>

(α) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$

(β) $2x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = -16 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$

(γ) $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x + 10} = 2 - x$ **(β)** $\sqrt{3x} - x + 6 = 0,\ x \geq 0$

(γ) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0,\ x \in [-2,2]$ **(δ)** $\sqrt[4]{x + 3} = \sqrt{x + 1},\ x \geq -1$

<u>Απάντηση</u>

(α) Περιορισμοί:
$x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -10$ και $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
(πρέπει το υπόριζο να είναι ≥ 0, όπως επίσης και το δεξί μέλος)
Άρα, $\boxed{-10 \leq x \leq 2}$.

$\sqrt{x + 10} = 2 - x \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + 10}\right)^2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x + 10 = 4 - 4x + x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ (δεκτή) και $x = 6$ (απορρίπτεται).

(β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = x - 6$

Περιορισμοί:
$x \geq 0$ και $x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$.
(πρέπει το υπόριζο να είναι ≥ 0, όπως επίσης και το δεξί μέλος)

$\sqrt{3x} = x - 6 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x}\right)^2 = (x - 6)^2$

$\Leftrightarrow 3x = x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 12) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (απορρίπτεται) και $x = 12$ (δεκτή).

(γ) Αφού $\sqrt{x^2-4}\geq 0$ και $\sqrt{x-2}\geq 0$, τότε

$$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=0 \text{ ΚΑΙ } \sqrt{x-2}=0$$

Έχουμε:
$\sqrt{x^2-4}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=0\,, \qquad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

και

$\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \ x=2.$

Η τιμή $x=2$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.
2ος τρόπος:
$\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4}=-\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-4}\right)^2=\left(-\sqrt{x-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4=x-2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-1$ (απορρίπτεται) και $x=2\in[-2,2]$ (δεκτή)

(δ) $\sqrt[4]{x+3}=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x+3}\right)^4=\left(\sqrt{x+1}\right)^4$

$\Leftrightarrow \ x+3=(x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x+3=x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-1)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ (απορρίπτεται) και $x=1$ (δεκτή).

12. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $100^{\frac{1}{2}}$ **(β)** $25^{\frac{3}{2}}$ **(γ)** $9^{-\frac{1}{2}}-27^{-\frac{1}{3}}$ **(δ)** $\sqrt{3}\cdot 12^{\frac{1}{2}}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$

(β) $25^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{25}\right)^3=5^3=125$

(γ) $9^{-\frac{1}{2}}-27^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$

(δ) $\sqrt{3}\cdot 12^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$

13. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ **(β)** $(81k^8)^{\frac{1}{4}},\ k \geq 0$

(γ) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$ **(δ)** $(100x^4)^{\frac{1}{2}},\ x \geq 0$

Απάντηση

(α) $$4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

(β) $$(81k^8)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} \cdot (k^8)^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} \cdot k^2 = 3k^2$$

ή

$$(81k^8)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81k^8} = \sqrt[4]{(3k^2)^4} = 3k^2$$

(γ) $$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 3$$

ή

$$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

(δ) $$(100x^4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100x^4} = \sqrt{(10x^2)^2} = 10x^2$$

14. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ **(β)** $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$

(γ) $\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ **(δ)** $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

(ε) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}$

Απάντηση

(α) $$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

(β) $$\frac{3}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3} = 3\left(2+\sqrt{3}\right)$$

(γ) $\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{12(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\frac{12(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{12(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}$

$=\frac{12(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{2}=6(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

(δ) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}=\frac{5}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{4^2}}{4}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2^4}}{4}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2\cdot 2^3}}{4}$

$=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^3}}{4}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot 2}{4}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$

(ε) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}=\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}\cdot\frac{\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt[10]{x^3}}=\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt[10]{x^{10}}}=\frac{\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^3}}{x}$

$=\frac{\sqrt[10]{x^4}\cdot\sqrt[10]{x^3}}{x}=\frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}$

15. Αν $3<x<8$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

(α) $2x$ **(β)** $-3x+10$ **(γ)** x^2+1

(δ) $\frac{1}{x}$ **(ε)** $-\frac{36}{x+1}$ **(στ)** $\frac{1}{x^2-2}$

Απάντηση

(α) $3<x<8\Rightarrow 2\cdot 3<2x<2\cdot 8\Rightarrow 6<x<16$

Το διάστημα είναι το $(6,16)$.

(β) $3<x<8\Rightarrow -3\cdot 8<-3x<-3\cdot 3\Rightarrow -24<-3x<-9$

$\Rightarrow -24+10<-3x+10<-9+10$

$\Rightarrow -14<-3x+10<1$

Το διάστημα είναι το $(-14,1)$.

(γ) $\begin{cases}0<3<x<8\\0<3<x<8\end{cases}\Rightarrow\quad 3\cdot 3<x\cdot x<8\cdot 8\quad\Rightarrow\quad 9<x^2<64$

$\Rightarrow\quad 9+1<x^2+1<64+1\quad\Rightarrow\quad 10<x^2+1<65$

Το διάστημα είναι το $(10, 65)$.

(δ) $0 < 3 < x < 8 \Longrightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$

Το διάστημα είναι το $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$.

(ε) $3 < x < 8 \Longrightarrow 3 + 1 < x + 1 < 8 + 1 \Longrightarrow 4 < x + 1 < 9$

$\Longrightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{36}{9} < \frac{36}{x+1} < \frac{36}{4}$

$\Longrightarrow 4 < \frac{36}{x+1} < 9 \quad \Longrightarrow \quad -9 < -\frac{36}{x+1} < -4$

Το διάστημα είναι το $(-9, -4)$.

(στ) $\begin{cases} 0 < 3 < x < 8 \\ 0 < 3 < x < 8 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 3 \cdot 3 < x \cdot x < 8 \cdot 8 \quad \Longrightarrow \quad 9 < x^2 < 64$

$\Longrightarrow \quad 9 + 2 < x^2 + 2 < 64 + 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 < 7 < x^2 - 2 < 64$

$\Longrightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{x^2 - 2} < \frac{1}{7}$

Το διάστημα είναι το $\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{7}\right)$.

16. Αν μ και ν φυσικοί αριθμοί με $\mu < \nu$, τότε να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $A = -3\mu + 10, \qquad B = -3\nu + 10$

(β) $\Gamma = 2\mu^2 + 1, \qquad \Delta = 2\nu^2 + 1$

(γ) $E = \frac{3}{8 - \mu^3}, \qquad Z = \frac{3}{8 - \nu^3}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\mu < \nu \Longrightarrow -3\mu > -3\nu \Longrightarrow -3\mu + 10 > -3\nu + 10$

$\Longrightarrow A > B$

(β) $1 < \mu < \nu \Longrightarrow \mu^2 < \nu^2 \Longrightarrow 2\mu^2 < 2\nu^2 \Longrightarrow 2\mu^2 + 1 < 2\nu^2 + 1$

$\Longrightarrow \Delta > \Gamma$

(γ) $1 < \mu < \nu \Rightarrow \mu^3 < \nu^3 \Rightarrow -\nu^3 < \mu^3 \Rightarrow 8 - \nu^3 < 8 - \mu^3$

$\Rightarrow \dfrac{3}{8-\mu^3} < \dfrac{3}{8-\nu^3}$

$\Rightarrow E < Z$

17. Αν $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ και $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha_1 > \alpha_2$ **(β)** $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$

(γ) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} = 6$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\alpha_1 - \alpha_2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) - \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 0$

$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$

(β) $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 3^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

(γ) $\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{\underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_2}_{1}} = \alpha_1 + \alpha_2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$

18. Αν $4 \le x \le 6$ και $-8 \le y \le -4$ τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

(α) $x + y$ **(β)** $x - 2y$ **(γ)** xy

(δ) $\dfrac{x}{y}$ **(ε)** $2x - 3y + 5$ **(στ)** $x^2 + 4y^2 - 4xy + 10$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\begin{cases} 4 \le x \le 6 \\ -8 \le y \le -4 \end{cases} \Rightarrow 4 - 8 \le x + y \le 6 - 4 \Rightarrow -4 \le x + y \le 2$

Το διάστημα είναι το $[-4,2]$.

(β) $-8 \le y \le -4 \Rightarrow 4 \cdot 2 \le -2y \le 8 \cdot 2 \Rightarrow 8 \le -2y \le 16$

Άρα,
$\begin{cases} 4 \le x \le 6 \\ 8 \le -2y \le 16 \end{cases} \Rightarrow 8 + 4 \le x - 2y \le 16 + 6$

$\Rightarrow 12 \le x - 2y \le 22$

Το διάστημα είναι το $[12,\ 22]$.

(γ) $-8 \leq y \leq -4 \Rightarrow 4 \leq -y \leq 8$

Άρα,

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ 4 \leq -y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 4 \cdot 4 \leq -xy \leq 6 \cdot 8 \quad \Rightarrow 16 \leq -xy \leq 48$$

$$\Rightarrow -48 \leq xy \leq -16$$

Το διάστημα είναι το $[-48,\ -16]$.

(δ) $-8 \leq y \leq -4 \Rightarrow 4 \leq -y \leq 8 \Rightarrow \dfrac{1}{8} \leq -\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{4}$

Άρα,

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ \dfrac{1}{8} \leq -\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{8} \leq -x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{6}{4} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$$

Το διάστημα είναι το $\left[-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right]$.

(ε) Άρα,

$$\begin{cases} 8 \leq 2x \leq 12 \\ 12 \leq -3y \leq 24 \end{cases} \Rightarrow 8 + 12 \leq 2x - 3y \leq 12 + 24$$

$$\Rightarrow 20 \leq 2x - 3y \leq 36 \quad \Rightarrow 25 \leq 2x - 3y + 5 \leq 41$$

Το διάστημα είναι το $[25,\ 41]$.

(στ) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 10 = x^2 - 2 \cdot 2xy + (2y)^2 + 10 = (x - 2y)^2 + 10$

Από το ερώτημα (β) έχουμε:

$$\begin{cases} 12 \leq x - 2y \leq 22 \\ 12 \leq x - 2y \leq 22 \end{cases} \Rightarrow 12 \cdot 12 \leq (x - 2y)^2 \leq 22 \cdot 22$$

$$\Rightarrow 144 \leq (x - 2y)^2 \leq 484 \quad \Rightarrow 154 \leq (x - 2y)^2 + 10 \leq 494$$

Το διάστημα είναι το $[154,\ 494]$.

19. Αν $4 < x < 6$ και $-3 < y < -1$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $-1 < 2x + 3y < 9$

(β) $6 < x - 2y < 12$

(γ) $1 < y - xy < 17$

(δ) $40 < x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 < 148$

(ε) $-18 < \frac{3x}{y} < -4$

<u>Απάντηση</u>

(α) $4 < x < 6 \Rightarrow 8 < 2x < 12$

$-3 < y < -1 \Rightarrow -9 < 3y < -3$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$-1 < 2x + 3y < 9$$

(β) $4 < x < 6$

$-3 < y < -1 \Rightarrow 2 < -2y < 6$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$6 < x - 2y < 12$$

(γ) $\begin{cases} 4 < x < 6 \\ 1 < -y < 3 \end{cases} \Rightarrow 4 < -xy < 18$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$\begin{cases} 4 < -xy < 18 \\ -3 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow 1 < y - xy < 17$

(δ) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = x^2 - 2 \cdot 2xy + (2y)^2 + 4 = (x - 2y)^2 + 4$

Από το ερώτημα (β) έχουμε:

$\begin{cases} 6 < x - 2y < 12 \\ 6 < x - 2y < 12 \end{cases} \Rightarrow 6 \cdot 6 < (x - 2y)^2 < 12 \cdot 12$

$\Rightarrow 36 < (x - 2y)^2 < 144 \Rightarrow 40 < (x - 2y)^2 + 4 < 148$

(ε) $1 < -y < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1$

$4 < x < 6 \Rightarrow 12 < 3x < 18$

$\begin{cases} \frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1 \\ 12 < 3x < 18 \end{cases} \Rightarrow 4 < -\frac{3x}{y} < 18 \Rightarrow -18 < \frac{3x}{y} < -4$

20. Δίνονται οι πραγματικοί θετικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $3\kappa - 8,\ \ 3\lambda - 8$

(β) $4 - \frac{1}{2}\kappa,\ \ 4 - \frac{1}{2}\lambda$

(γ) $5\kappa^2 + 7,\ \ 5\lambda^2 + 7$

(δ) $\frac{3}{8 - \kappa^3},\ \ \ \frac{3}{8 - \lambda^3}$

Να συγκρίνετε όλους τους πιο πάνω αριθμούς σε όλες τις περιπτώσεις, όταν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ είναι αρνητικοί.

<u>Απάντηση</u>

Υποθέτω ότι $0 < \kappa < \lambda$

(α) $\kappa < \lambda \Rightarrow 3\kappa < 3\lambda \Rightarrow \boxed{3\kappa + 8 < 3\lambda + 8}$

(β) $\kappa < \lambda \Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda < -\frac{1}{2}\kappa \Rightarrow \boxed{4 - \frac{1}{2}\lambda < 4 - \frac{1}{2}\kappa}$

(γ) $1 < \kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^2 < \lambda^2 \Rightarrow 5\kappa^2 < 5\lambda^2 \Rightarrow \boxed{5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7}$

(δ) $1 < \kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^3 < \lambda^3 \Rightarrow -\lambda^3 < -\kappa^3 \Rightarrow 8 - \lambda^3 < 8 - \kappa^3$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{8 - \kappa^3} < \frac{1}{8 - \lambda^3}}$

Υποθέτω ότι $\kappa < \lambda$<0. Τότε, όπως πριν,

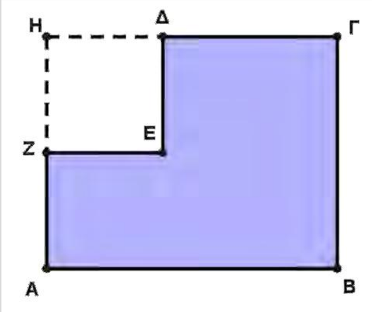
$3\kappa + 8 < 3\lambda + 8$,

$4 - \frac{1}{2}\lambda < 4 - \frac{1}{2}\kappa$,

$5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7$,

$\frac{1}{8 - \kappa^3} < \frac{1}{8 - \lambda^3}$

21. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με διαστάσεις $AB = x$ και $ΒΓ = 2y$, από το οποίο έχουμε αφαιρέσει το τετράγωνο $ΔΕΖΗ$ με πλευρά y.



(α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του σκιασμένου εμβαδού $ΑΒΓΔΕΖ$ δίνεται από τη σχέση $Π = 2x + 4\,y$.

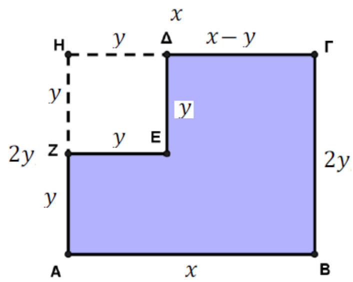
(β) Αν ισχύει ότι $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Απάντηση

(α) $Π_{ΑΒΓΔΕΖ} = (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΓΔ) + (ΔΕ) + (ΕΖ) + (ΖΑ)$

$= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$

(β) $\begin{cases} 5 < x < 8 \\ 1 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 < 2x < 16 \\ 4 < 4y < 8 \end{cases} \Rightarrow 14 < \underbrace{2x + 4y}_{Π_{ΑΒΓΔΕΖ}} < 24$



22. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A = \left(\sqrt{2}\right)^6,\ B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\ Γ = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

(α) Να δείξετε ότι $Α + Β + Γ = 23$.

(β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{6}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

(α) $A + B + Γ = \left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{6}\right)^6$

$= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 3^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 3 = 8 + 9 + 6 = 23$

(β) $9 > 6 \xRightarrow{\text{ιδιότητα 2}} \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}.$

23. Δίνονται οι αριθμοί $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$.

(α) Να δείξετε ότι $A - B = 4$.

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, \qquad 1, \qquad \sqrt[3]{2}.$$

Απάντηση

(α) $A - B = \left(\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^{\frac{6}{2}} - 2^{\frac{6}{3}} = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

(β) $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$ από την ιδιότητα 9. Επίσης, $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2}$.
Άρα,

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

25. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός α είναι θετικός ρητός.

Απάντηση

$$\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 - 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \alpha - 2 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha - 2) + 1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$$

26. Να διατάξετε τους αριθμούς α, β, γ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, αν ισχύει ότι:

$$2016\alpha = 2017\beta = 2018\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Απάντηση

$2016\alpha = 2017\beta \Rightarrow 2016\alpha = 2016\beta + \beta \Rightarrow 2016\alpha - 2016\beta = \beta$

$\Rightarrow 2016(\alpha - \beta) = \beta > 0 \Rightarrow \alpha - \beta > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha > \beta}$

Ομοίως,
$2017\beta = 2018\gamma \Rightarrow 2017\beta = 2017\gamma + \gamma \Rightarrow 2017\beta - 2017\gamma = \gamma$

$\Rightarrow 2017(\beta - \gamma) = \gamma > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\beta > \gamma}$.

Συνεπώς, από τα πιο πάν

$$\alpha > \beta > \gamma.$$

27. Αν $\alpha > \beta$, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $3\alpha - 4\gamma$ και $3\beta - 4\gamma$.

Απάντηση

$$\alpha > \beta \Rightarrow 3\alpha > 3\beta \Rightarrow 3\alpha - 4\gamma > 3\beta - 4\gamma$$

28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6+\sqrt{11}}$, $\sqrt{6-\sqrt{11}}$.
Αν $\kappa=\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}$, τότε:

(α) να αποδείξετε ότι $\kappa^2=2$

(β) να υπολογίσετε τα $\left(\kappa+\sqrt{2}\right)^{106}$, $\left(\kappa-\sqrt{2}\right)^{106}$.

Απάντηση

$\sqrt{11}>-\sqrt{11}\Rightarrow 6+\sqrt{11}>6-\sqrt{11}$

$6=\sqrt{36}>\sqrt{11}$ και αρα $6-\sqrt{11}>0$.

Έτσι, $6+\sqrt{11}>6-\sqrt{11}\Rightarrow\sqrt{6+\sqrt{11}}>\sqrt{6-\sqrt{11}}$

(α)

$$\kappa^2=\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2-2\sqrt{6+\sqrt{11}}\sqrt{6-\sqrt{11}}+\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}\right)^2$$

$$=6+\sqrt{11}-2\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)}+\left(6-\sqrt{11}\right)$$

$$=6+\sqrt{11}-2\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)\left(6-\sqrt{11}\right)}+6-\sqrt{11}$$

$$=12-2\sqrt{6^2-\sqrt{11}^2}=12-2\sqrt{6^2-11}=12-2\sqrt{36-11}$$

$$=12-2\underbrace{\sqrt{25}}_{5}=12-10=2$$

(β) Από τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε ότι
$\kappa=\sqrt{6+\sqrt{11}}-\sqrt{6-\sqrt{11}}>0$ και
$\kappa^2=2\Rightarrow\kappa^2-2=0\Rightarrow\kappa=\pm\sqrt{2}$ και αφού $\kappa>0$,
$\kappa=\sqrt{2}\Rightarrow\ \kappa-\sqrt{2}=0\Rightarrow\ \left(\kappa-\sqrt{2}\right)^{106}=0$
Επίσης,

$$\left(\kappa+\sqrt{2}\right)^{106}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^{106}=\left(2\sqrt{2}\right)^{106}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{106}=2^{3\cdot 53}=2^{159}$$

και

$$\left(\kappa-\sqrt{2}\right)^{106}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^{106}=0$$

Δραστηριότητες σελ. 61-62 (Δραστηριότητες Εμπλουτισμού)

1. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$A=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}},\quad B=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}}$$

Απάντηση

$$A=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}=\frac{1}{1-\frac{2}{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}}}$$

$$=-\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=-\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}=1-\sqrt{2}$$

$$B=\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}}}=\frac{1}{1-A}=\frac{1}{1-\left(1-\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Να δείξετε ότι ο αριθμός $5+\sqrt{3}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $28+10\sqrt{3}$.

Απάντηση

Θα δείξουμε ότι $\left(5+\sqrt{3}\right)^2=.28+10\sqrt{3}$
Έχουμε:
$\left(5+\sqrt{3}\right)^3=5^2-2\cdot 5\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=25+10\sqrt{3}+3=28+10\sqrt{3}$

3. Να δείξετε ότι ο αριθμός $2-\sqrt{2}$ είναι η κυβική ρίζα του αριθμού $20-14\sqrt{2}$.

Απάντηση
Θα δείξουμε ότι $\left(2-\sqrt{2}\right)^3=20-14\sqrt{2}$.
Έχουμε:

$\left(2-\sqrt{2}\right)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2\sqrt{2} + 3\cdot 2\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^3$

$= 8 - 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$

4. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός, δηλαδή δεν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί α και β ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}$.

Απάντηση

Υποθέτουμε προς άτοπον, ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός, δηλαδή ότι υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί α και β με $\beta \neq 0$ και πρώτοι μεταξύ τους, ώστε $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}$.
Έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2 \;\Rightarrow\; \alpha^2 = 2\beta^2$$

και άρα ο αριθμός 2 διαιρεί τον αριθμό α^2 και άρα και τον αριθμό α. Τότε,

$\alpha = 2\mu$ για κάποιον ακέραιο αριθμό μ.
Συνεπώς, αντικαθιστώντας στην πιο πάνω,

$$(2\mu)^2 = 2\beta^2 \;\Rightarrow\; 4\mu^2 = 2\beta^2 \;\Rightarrow\; 2\mu^2 = \beta^2$$

και άρα ο αριθμός 2 διαιρεί τον αριθμό β^2 και άρα και τον αριθμό β. Τότε,
$\beta = 2\beta$ για κάποιον ακέραιο αριθμό β.
Βρήκαμε λοιπόν ότι $\alpha = 2\mu$ και $\beta = 2\beta$, δηλαδή οι αριθμοί α και β έχουν κοινό παράγοντα, άτοπο, αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Συνεπώς, ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:

(α) $x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{6}} = 0$ **(β)** $x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0$

(γ) $x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}} = 0$

Απάντηση

(α) Οι παραστάσεις $x^{\frac{5}{6}}$ και $x^{\frac{1}{6}}$ έχουν νόημα για $x \geq 0$.
Έχουμε

$$x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{1}{6}} = 0 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^5 - x^{\frac{1}{6}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}}\left(\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{4}{6}} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 1 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 1^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 1$$

(β) Οι παραστάσεις $x^{\frac{4}{5}}$ και $x^{\frac{2}{5}}$ έχουν νόημα για $x \geq 0.$
Έχουμε

$$x^{\frac{4}{5}} - 9x^{\frac{2}{5}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{5}}\left(x^{\frac{2}{5}} - 9\right)$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{2}{5}} = 0 \text{ ή } x^{\frac{2}{5}} = 9 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = (3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 = 243$$

(γ) Οι παραστάσεις $x^{\frac{2}{3}}$ και $x^{\frac{1}{6}}$ έχουν νόημα για $x \geq 0.$
Έχουμε

$$x^{\frac{2}{3}} - 4x^{\frac{1}{6}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{3}{6}} - 4\right)$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} = 0 \text{ ή } \underbrace{x^{\frac{3}{6}}}_{x^{\frac{1}{2}}} = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4^2 = 16$$

6. Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{1+1}} = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$$

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$$

<u>Απάντηση</u>

Έστω ν φυσικός αριθμός. Τότε

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}} \cdot \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}} = \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\nu-\nu-1} = \sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}$$

Τότε

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{99+1}}$$

$$= \sqrt{1+1} - \sqrt{1} + \sqrt{2+1} - \sqrt{2} + \sqrt{3+1} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{99+1} - \sqrt{99}$$

$$= \sqrt{\mathbf{2}} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{\mathbf{2}} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{100} - \sqrt{99}$$

$$= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9$$

7. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$, τότε να απόδείξετε ότι:

$$\frac{a\sqrt{a} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{a} - \sqrt{\beta}} = a + \beta + \sqrt{a\beta}$$

<u>Απάντηση</u>

$$\frac{a\sqrt{a}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{a}-\sqrt{\beta}}=\frac{a\sqrt{a}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{a}-\sqrt{\beta}}\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{a}-\sqrt{\beta}}=\frac{\left(a\sqrt{a}-\beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{\beta}\right)}$$

$$=\frac{\left(a\sqrt{a}-\beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{\beta}\right)^2}$$

$$=\frac{a\left(\sqrt{a}\right)^2+a\sqrt{a}\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\beta}\sqrt{a}-\beta\left(\sqrt{\beta}\right)^2}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^2+a\sqrt{a\beta}-\beta\sqrt{\beta\alpha}-\beta^2}{\alpha-\beta}$$

$$=\frac{\alpha^2-\beta^2+(a-\beta)\sqrt{a\beta}}{\alpha-\beta}=\frac{(a-\beta)(a+\beta)+(a-\beta)\sqrt{a\beta}}{\alpha-\beta}=\frac{(a-\beta)\left(a+\beta+\sqrt{a\beta}\right)}{\alpha-\beta}$$

$$=a+\beta+\sqrt{a\beta}$$

8. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παραστάσεις, να υπολογίσετε τις τιμές των x, y, z, όταν:

$$\sqrt{2x+4y+5z}+\sqrt{y-3}+\sqrt{z-2}=0$$

<u>Απάντηση</u>

Έχουμε άθροισμα =0 τριών παραστάσεων οι οποίες είναι έκαστη ≥ 0. Τότε αναγκαστικά, κάθε μια από αυτές θα είναι =0:

$$\sqrt{2x+4y+5z}=0,\ \sqrt{y-3}=0,\ \sqrt{z-2}=0$$

Αλλά,

$$\left\{\begin{aligned}\sqrt{2x+4y+5z}=0 &\Leftrightarrow 2x+4y+5z=0\\ \sqrt{y-3}=0 &\Leftrightarrow y-3=0\Leftrightarrow y=3\\ \sqrt{z-2}=0 &\Leftrightarrow z-2=0\Leftrightarrow z=2\end{aligned}\right.\Leftrightarrow 2\cdot x+4\cdot 3+5\cdot 2=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x=-11}$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$$

<u>Απάντηση</u>

$$\frac{1}{\nu\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\nu}\right)^2\sqrt{\nu+1}+\left(\sqrt{\nu+1}\right)^2\sqrt{\nu}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot\left(\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}\right)}=\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot\left(\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}\right)}\cdot\frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot\left(\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu+1}\right)\cdot\left(\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot\left[\left(\sqrt{\nu}\right)^2-\left(\sqrt{\nu+1}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot[\nu-(\nu+1)]}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot[\nu-(\nu+1)]} = \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot(\nu-\nu-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}\cdot(-1)} = -\frac{\sqrt{\nu}-\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}} = \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\nu+1}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}} - \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$$

10. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$ και $\beta = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

(α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha\beta$ και $(\alpha^3-\beta^3)$ είναι φυσικοί.

(β) Αν $x = \alpha - \beta$, να δείξετε ότι ο πραγματικός αριθμός x επαληθεύει την εξίσωση $x^3 + 3x - 4 = 0$.

(γ) Να δείξετε ότι $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

<u>Απάντηση</u>

(α) $\alpha\beta = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}$

$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{5}\right)^2-2^2} = \sqrt[3]{5-4} = \sqrt[3]{1} = 1 \in \mathbb{N}$

και

$\alpha^3-\beta^3 = \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3 = \sqrt{5}+2-\left(\sqrt{5}-2\right)$

$= \sqrt{5}+2-\sqrt{5}+2 = 4 \in \mathbb{N}$

(β) $x^3+3x-4 = (\alpha-\beta)^3 + 3(\alpha-\beta) - 4$

$= \alpha^3 \underbrace{-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2}_{=-3\alpha\beta(\alpha-\beta)} - \beta^3 + 3(\alpha-\beta) - 4$

$= \alpha^3 - 3\alpha\beta(\alpha-\beta) - \beta^3 + 3(\alpha-\beta) - 4$

$= \underbrace{\alpha^3-\beta^3}_{=4} - 3\underbrace{\alpha\beta}_{=1}(\alpha-\beta) + 3(\alpha-\beta) - 4$

$= 4 - 3(\alpha-\beta) + 3(\alpha-\beta) - 4 = 0$

(γ) Εκτελώντας τη διαίρεση του x^3+3x-4 με το $x-1$ παίρνουμε:

$x^3+3x-4=(x-1)(x^2+x+4)$
και άρα το $x=1$ είναι ρίζα του πολυωνύμου x^3+3x-4, δηλαδή
$\alpha-\beta=1$, δηλαδή

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$$

11. Αν x, y, z είναι τρεις πραγματικοί αριθμοί, τέτοιοι ώστε $x+y+z=0$, τότε:

(α) να αποδείξετε ότι $x^3+y^3+z^3=3xyz$

(β) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό $x=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$, χρησιμοποιώντας το ερώτημα (α).

<u>Απάντηση</u>

(α) $x+y+z=0 \Leftrightarrow x+y=-z \Leftrightarrow (x+y)^3=(-z)^3$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=-z^3$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3x^2y-3xy^2$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)$

και αφού $x+y+z=0 \Rightarrow x+y=-z$, αντικαθιστώντας στην πιο πάνω:

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=-3xy(-z)$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

(β) Θέτω

$$y=\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}},\quad z=\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$$

Από το ερώτημα (α),
$x^3+y^3+z^3=3xyz$

$\Rightarrow x^3+\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^3=3x\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow x^3+45+29\sqrt{2}+45-29\sqrt{2}=3x\sqrt[3]{\left(45+29\sqrt{2}\right)\left(45-29\sqrt{2}\right)}$

$\Rightarrow x^3+90=3x\sqrt[3]{(45)^2-\left(29\sqrt{2}\right)^2}$

$\Rightarrow x^3+90=3x\sqrt[3]{2025-1682}$

$\Rightarrow x^3+90=3x\sqrt[3]{343}$

$\Rightarrow x^3+90=3x7 \quad \Rightarrow \quad x^3-21x+90=0$

$$\Longrightarrow\ (x+6)(x^2-6x+15)=0 \Longrightarrow x=6$$

δηλαδή

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$$

12. Αν α πραγματικός θετικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}=10$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$

(β) $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$

Απάντηση

(α)

$$\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}=10 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^3=10^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}+3\sqrt[3]{\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^3=1000$$

$$\Leftrightarrow \alpha+3\sqrt[3]{\alpha}+\frac{3}{\sqrt[3]{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}=1000$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}+3\left(\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)=1000$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}=1000-3\left(\sqrt[3]{\alpha}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}=1000-3\cdot 10=970$$

(β) Χρησιμοποιούμε το ερώτημα (α):

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^3=970^3 \Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha^2\frac{1}{\alpha}+3\alpha\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=912673000$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+3\alpha+3\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}=912673000$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=912673000-3\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}=912673000-3\cdot 970=912673000-2910=912670090$$

ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ

Το σύμβολο · σημαίνει πολλαπλασιασμός.
Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.

Άσκηση 1

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις (νοείται κάνοντας χρήση ιδιοτήτων των ριζών):

(α) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}$

(β) $\sqrt{25\alpha^{12}},\ \alpha > 0$

(γ) $\sqrt[6]{\alpha^5} \cdot \left(\sqrt[6]{\alpha}\right)^7,\ \alpha > 0$

(δ) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[10]{32}$

(Μονάδες: 1 / 1 / 1.5 / 1.5)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Α. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων, **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:**

(α) $\sqrt{\left(\sqrt{19} - \sqrt{3}\right)} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{19} + \sqrt{3}\right)}$

(β) $\left(\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{512}\right) \cdot \sqrt[5]{2}$

(γ) $\left(\sqrt{27} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{32} - \sqrt{72}\right) : \sqrt{2}$

(Μονάδες: 1.5 / 1.5 / 2)

Β. Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα, σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{22}{3\sqrt{5}-1}$$

(Μονάδες: 2)

ΑΣΚΗΣΗ 3

(α) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $0 < \alpha \leq 7$, τότε:

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες: 1.5)

(β) Να δείξετε ότι:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \sqrt{x}$$

$(x > 0)$.

(Μονάδες: 2)

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+17}-x+3=0$

(Μονάδες: 2.5)

(β) $(3x+1)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{32}, \quad x \geq -\frac{1}{3}$

(Μονάδες: 2.5)

ΑΣΚΗΣΗ 5

Αν $4<x<5$ και $-5<y<-4$, να προσδιορίσετε το μικρότερο δυνατό διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω πραγματικοί αριθμοί:

(α) $x+2y$

(Μονάδες: 1.5)

(γ) $x \cdot y$

(Μονάδες: 2)

(δ) $\frac{y}{x}$

(Μονάδες: 2)