Β΄ ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

Σχολική χρονιά 2025-2026

Εκπαιδευτικός: Ιωάννης Ιωακείμ

Οργάνωση Μαθήματος

Θέση: Μόνιμος επί δοκιμασία

Ημερομηνία: 05/02/2026

Τάξη: Β΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Τμήμα: ΘΗΨ2

Τίτλος: Λογάριθμος θετικού αριθμού και λογαριθμική συνάρτηση

Σκοπός: Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:

- Ορίζουν την έννοια του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού $\alpha > 0$ με βάση οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$, αναφέρουν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των λογαρίθμων και τις εφαρμόζουν στην επίλυση προβλημάτων.

1. **Δείκτες Επιτυχίας:**

   - Α7.15 (Ορίζουν την έννοια του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού)

2. **Δείκτες Επάρκειας:**

Προαπαιτούμενες Γνώσεις	Μαθηματικές Πρακτικές
• Ιδιότητες δυνάμεων. • Συνάρτηση. • Αντίστροφη συνάρτηση.	**ΜΠ.1** Κατανόηση μέσω προβλήματος **ΜΠ.2** Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη **ΜΠ.3** Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων **ΜΠ.4** Μοντελοποίηση **ΜΠ.5** Στρατηγική χρήση κατάλληλων εργαλείων **ΜΠ.6** Ακρίβεια **ΜΠ.7** Δομή των μαθηματικών **ΜΠ.8** Κανονικότητα σε επαναλαμβανόμενο συλλογισμό
Νέες Έννοιες • Λογάριθμος, λογαριθμική συνάρτηση.	

Μεθοδολογία και οργάνωση τάξης:
Ατομική εργασία.

Μέσα και υλικά:

Σχολικό εγχειρίδιο, πίνακας, διαδραστικός πίνακας μαρκαδόροι.

3. **Πορεία**:

Α/Α	**Περιγραφή**	**Μαθηματικές Πρακτικές**
Α.	Οι μαθητές πιο πριν, έχουν κάνει προβλήματα με εφαρμογές της εκθετικής συνάρτησης. Θα δούμε, ως αφόρμηση, ένα τέτοιο πρόβλημα, για να τους εισάγουμε στην έννοια του λογαρίθμου (‘αντίστροφη΄διαδικασία): **Διερεύνηση-αφόρμηση (σελ. 170)** Σύμφωνα με μετρήσεις, ο πληθυσμός της Γης το 1987 ήταν περίπου 5 δισεκατομμύρια ($5{\cdot}10^9$) και είχε υπολογιστεί ότι θα αυξανόταν με ετήσιο ρυθμό 1,7%. Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αυτός είχε παραμείνει σταθερός, να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα: **(α)** Πόσα δισεκατομμύρια αναμενόταν να είναι ο πληθυσμός του πλανήτη το 2016; **(β)** Πότε αναμενόταν να διπλασιαστεί ο πληθυσμός της γης; **Απάντηση** Θεωρούμε εκθετική αύξηση με σταθερό ετήσιο ρυθμό 1,7% -> +1,7%. Δίνεται: $P_{1987} = 5 \cdot 10^9, \qquad P(t) = P_{1987}\,(1{,}017)^t$ όπου t= χρόνια μετά το 1987. **(α) Πληθυσμός το 2016** Από το 1987 στο 2016: $t = 2016 - 1987 = 29$ χρόνια. Άρα: $P_{2016} = 5 \cdot 10^9 \cdot (1{,}017)^{29}$ Σε δισεκατομμύρια: $P_{2016} = 5 \cdot (1{,}017)^{29} \approx 5 \cdot 1{,}63045 \approx 8{,}15$ **Άρα το 2016 αναμενόταν περίπου $\boxed{8{,}15}$ δισεκατομμύρια άνθρωποι.** **(β)** Πότε θα διπλασιαζόταν ο πληθυσμός; Διπλασιασμός σημαίνει: $5 \cdot 10^9 \cdot (1{,}017)^t = 2 \cdot 5 \cdot 10^9 \;\Rightarrow\; (1{,}017)^t = 2$ Δοκιμή: Λέμε στους μαθητές να θέσουν $t = 40$ και $t = 41$. Αυστηρή απάντηση: Παίρνουμε λογάριθμους: $t\ln(1{,}017) = \ln 2 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}017)} \approx \dfrac{0{,}6931}{0{,}01686} \approx 41{,}12$ Δηλαδή περίπου 41,1 χρόνια μετά το 1987: $\mathbf{1987 + 41{,}12 \approx 2028}$ **Άρα ο διπλασιασμός αναμενόταν γύρω στο $\boxed{2028}$** **(περίπου αρχές του 2028).**	**ΜΠ.6** **ΜΠ.7**

Β.

Ακολούθως, υπενθυμίζω τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης:

Ορισμός

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0, \ \alpha \neq 1$$

ονομάζεται ***εκθετική συνάρτηση με βάση*** a.

Είναι 1-1 και επί του $(0, +\infty)$, άρα **αντιστρέφεται**.

- Αν $\alpha < 0$, τότε η δύναμη α^x **δεν ορίζεται γενικά** για πραγματικούς εκθέτες x (π.χ. $(-2)^{\sqrt{3}}$ δεν έχει πραγματική τιμή).

Άρα, για να ορίζεται το α^x **για όλα τα** $x \in \mathbb{R}$ και να παίρνει **πραγματικές τιμές**, είναι αναγκαίο να ισχύει α>0.
(Ο επιπλέον περιορισμός $a \neq 1$ *μπαίνει ώστε η συνάρτηση να μην είναι σταθερή).*
$a = e$, *τότε:*

$$f(x) = e^x$$

<u>Ιστορικά στοιχεία</u>
Ο λογάριθμος **δεν προέκυψε ως αφηρημένη έννοια**, αλλά ως **εργαλείο ανάγκης**.
Η πρακτική ανάγκη (16ος–17ος αι.)
Στα τέλη του 16ου αιώνα, αστρονόμοι, ναυτικοί και μηχανικοί έπρεπε να κάνουν **τεράστιους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις** με το χέρι. Αυτό ήταν:

- χρονοβόρο
- γεμάτο λάθη

Η ιδέα που ωρίμαζε ήταν απλή αλλά ιδιοφυής:
Αν μπορούμε να μετατρέψουμε τους πολλαπλασιασμούς σε προσθέσεις, όλα θα γίνουν ευκολότερα.
Ο John Napier
Γύρω στο 1614, ο Napier εισάγει τους πρώτους λογαρίθμους. Η βασική του σύλληψη ήταν:

- να αντιστοιχίσει **γεωμετρική πρόοδο ↔ αριθμητική πρόοδο**
- δηλαδή:
  γινόμενο ↔ άθροισμα

Αυτός είναι ο **πυρήνας** της λογαριθμικής ιδέας:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

Ο Briggs βελτιώνει το σύστημα και εισάγει τους **δεκαδικούς λογαρίθμους** (βάση 10), που έγιναν το βασικό εργαλείο για:

- πίνακες λογαρίθμων
- κανόνες διαφάνειας (slide rules)
  για περισσότερα από 300 χρόνια.

Ο Henry Briggs

Η θεωρητική ωρίμανση (Leonhard Euler)

Τον 18ο αιώνα, ο Euler δίνει στον λογάριθμο καθαρή μαθηματική ταυτότητα, δηλαδή τον όρισε αυστηρά:

- εισάγει τον φυσικό λογάριθμο $\ln x$
- τον συνδέει με την εκθετική συνάρτηση:

$\ln\ x$ είναι ο αντίστροφος του e^x

Από εδώ και πέρα, ο λογάριθμος μπαίνει στον λογισμό, περιγράφει φυσικά φαινόμενα (αύξηση, αποσύνθεση, ένταση, πληθυσμούς)

Ο λογάριθμος γεννήθηκε **για να απλοποιήσει τους υπολογισμούς**, και κατέληξε να γίνει **θεμελιώδης έννοια** που μετρά ρυθμούς, κλίμακες και μεταβολές στη φύση και στα μαθηματικά.

Γ.

Προχωράμε στον αυστηρό ορισμό του λογάριθμου:

λογάριθμος = λόγος + αριθμός

λόγος → σχέση, αναλογία, μεταβολή

αριθμός → μετρήσιμη ποσότητα

αριθμητική έκφραση μιας σχέσης μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης (ο αριθμός που λέει πόσες φορές πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια βάση για να προκύψει ένας άλλος αριθμός).

Ορισμός

*Αν $\theta > 0$ και $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$, ονομάζουμε **λογάριθμο του θ με βάση** α, συμβολικά $\log_\alpha \theta$, τον εκθέτη στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να πάρουμε τον αριθμό θ.*

Συμβολικά, έχουμε:

$$\boxed{\boldsymbol{\log_\alpha \theta = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^x = \theta}}$$

Για παράδειγμα, έχουμε ότι:

- $\log_2 16 = 4$, γιατί $2^4 = 16$.

Να ζητηθεί από τους μαθητές να το εκφράσουν λεκτικά

- $\log_5 125 = 3$, γιατί $5^3 = 125$.
- $\log_{10} 0{,}01 = -2$, γιατί $10^{-2} = 0{,}01$.
- $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$, γιατί $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 81$.

Ιδιότητες

(α) $\log_\alpha 1 = 0,\ \alpha > 0,\ \alpha \neq 1$

(β) $\log_\alpha \alpha = 1,\ a > 0,\ \alpha \neq 1$

Απόδειξη

Αν $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$, τότε:

(α) $\log_\alpha 1 = 0$, γιατί $\alpha^0 = 1$.

(β) $\log_\alpha \alpha = 1$, γιατί $\alpha^1 = \alpha$ (τυπογραφικό λάθος στο βιβλίο).

	Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό **10** λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί λογάριθμοι**. Ο δεκαδικός λογάριθμος του αριθμού θ συμβολίζεται απλά $\log \theta$ αντί $\log_{10} \theta$. Έτσι, έχουμε: $\log \theta = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = \theta, \theta > 0$ Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό e λέγονται **φυσικοί** ή **Νεπέριοι λογάριθμοι**. Ο λογάριθμος του θ με βάση το e συμβολίζεται με $\ln \theta$ και ισχύει: $\ln \theta = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \theta, \theta > 0$	
Δ.	**Διαμορφωτική Αξιολόγηση** **Να υπολογίσετε τους πιο κάτω λογαρίθμους:** (α) $\log_4 64$ (β) $\log_3 \sqrt{3}$ (γ) $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$ (δ) $\ln e^{-1}$ (ε) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ (στ) $\log 0{,}01$ **<u>Απάντηση</u>** **(α)** $\log_4 64$ $64 = 4^3 \Rightarrow \log_4 64 = 3$ **(β)** $\log_3 \sqrt{3}$ $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ **(γ)** $\log_2 \left(\frac{1}{8}\right)$ $\frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3$ **(δ)** $\ln e^{-1}$ $\ln e^{-1} = -1$ **(ε)** $\log_{\frac{1}{3}} 27$ $27 = 3^3$ και $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ Άρα: $\log_{3^{-1}} 3^3 = \frac{3}{-1} = -3$ **(στ)** $\log 0{,}01$ $0{,}01 = 10^{-2} \Rightarrow \log 0{,}01 = -2$	

	Για σπίτι: σελ. 173, Δρ. 1: **Να υπολογίσετε τους πιο κάτω λογαρίθμους:** (α) $\log_3 81$ (β) $\log_2 \sqrt{2}$ (γ) $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)$ (δ) $\ln e^2$ (ε) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ (στ) $\log 0{,}1$	