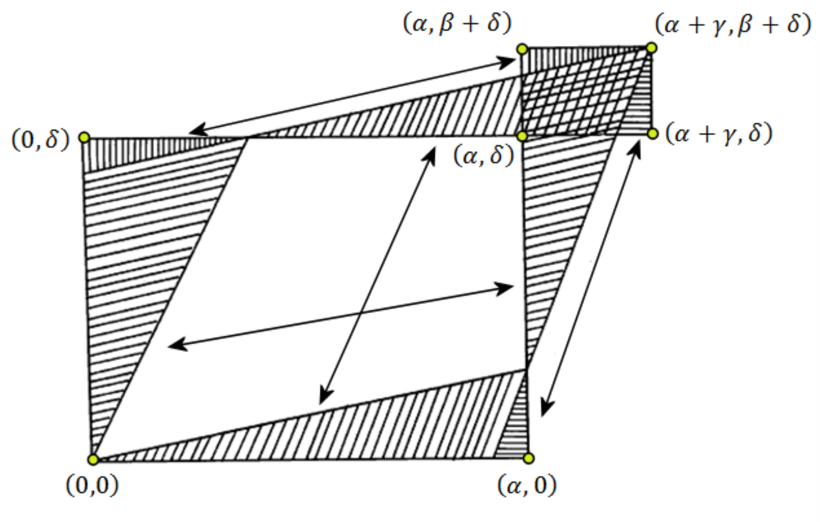
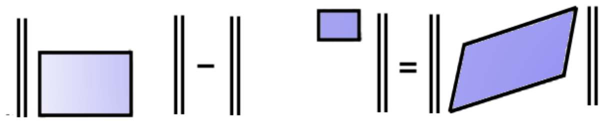
5 Ορίζουσες - Ευθεία

Γεωμετρική Ερμηνεία της 2x2 ορίζουσας



$\begin{vmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma =$ 

5.1 Ορίζουσες

5.1.1 Πίνακας και ορίζουσα 2 × 2 πίνακα

Ορισμός (Πίνακας)

Πίνακας λέγεται μια ορθογώνια ταξινόμηση αριθμών, συμβόλων ή εκφράσεων, σε γραμμές και στήλες. Το μέγεθος του πίνακα καθορίζεται από τον αριθμό των γραμμών και των στηλών του. Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέγεται "$m \times n$ πίνακας" (διαβάζουμε m επί n πίνακας).

Για παράδειγμα, ο πιο κάτω πίνακας είναι πίνακας 2 × 3 (διαβάζουμε "2 επί 3 πίνακας") γιατί ακριβώς έχει δύο γραμμές και 3 στήλες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Παραδείγματα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

2 × 2 πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

3 × 3 πίνακας

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

3 × 2 πίνακας

Αν το πλήθος των γραμμών ενός πίνακα είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του, τότε αυτός λέγεται **τετραγωνικός πίνακας**.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Μορφή 2 × 2 πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$$

Μορφή 3 × 3 πίνακα

Στα επόμενα, θα μελετήσουμε 2 × 2 και 3 × 3 πίνακες

Ορίζουσα ενός 2 × 2 πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ **ΟΡΙΖΕΤΑΙ** ως ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ και **συμβολίζεται** με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ή det(A) ή $|A|$.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$$

Η ορίζουσα είναι ένα πολύ ενδιαφέρον αντικείμενο, αφενός μεν γιατί παρουσιάζει ιδιαίτερες συμμετρίες και αφετέρου γιατί μας είναι χρήσιμο σε πολλούς τομείς των Μαθηματικών, όπως στην επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Γεωμετρική ερμηνεία της ορίζουσας 2 × 2 πίνακα δίνεται στην δραστηριότητα 8 (Ενότητας).

Παραδείγματα

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)-3\cdot5=-2-15=-17.$$

2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x^2 & 2 \end{pmatrix}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x & y \\ x^2 & 2 \end{vmatrix} = x\cdot 2 - y\cdot x^2 = 2x - yx^2 = x(2-yx)\ .$$

3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot(x-2) - 2\cdot 1$$

$$= x^2 - 4x + 2 - 2 = x(x-4).$$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)\cdot(x-2) - 2\cdot 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1, 4}.$

▷ Δραστηριότητα εμπλουτισμού

1. Αν A ένας 2×2 πίνακας, τότε το αποτέλεσμα της ορίζουσας του πίνακα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσω μια γραμμή ή στήλη του με ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι λ φορές η ορίζουσα του πίνακα A.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Αν $B = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, τότε

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \lambda\alpha \cdot \delta - \gamma \cdot \lambda\beta = \lambda(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma) = \lambda \det(A).$$

2. Αν A ένας 2×2 πίνακας, τότε το αποτέλεσμα της ορίζουσας του πίνακα που προκύπτει αν εναλλάξω τις γραμμές με τις στήλες του, είναι ίσο με το αποτέλεσμα της ορίζουσας του πίνακα A.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma.$$

Αν $B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, τότε

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma.$$

Άρα: $\det(A) = \det(B)$.

3. Αν A ένας 2×2 πίνακας με δύο ίδιες γραμμές ή δύο ίδιες στήλες, τότε $\det(A) = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{pmatrix}$. Τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \beta = 0.$$

Επίσης,

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \beta = 0.$$

4. Αν εναλλάξω το δύο γραμμές ή δύο στήλες σε ένα 2×2 πίνακα A, τότε το αποτέλεσμα της ορίζουσας του πίνακα που προκύπτει είναι ίσο με $-\det(A)$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ο 2×2 πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma.$$

Αν $B = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$, τότε

$$\det(B) = \begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{vmatrix} = \beta \cdot \gamma - \delta \cdot \alpha = -(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma) = -\det(A).$$

Αν $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$, τότε

$$\det(\Gamma) = \begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \gamma \cdot \beta - \alpha \cdot \delta = -(\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma) = -\det(A).$$

Φύλλο εργασίας

1. Να υπολογιστούν οι πιο κάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

2. Να λυθούν οι πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} x & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

(β) $\begin{vmatrix} x & -x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$

(γ) $\begin{vmatrix} x^2 & -5 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -6$

(δ) $\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

(ε) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Δραστηριότητες σελ. 10 (Ορίζουσα 2x2)

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ **(γ)** $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

(δ) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2 \end{vmatrix}$ **(ε)** $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$ **(στ)** $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix}$

Απάντηση

(α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0$

(β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{6} \cdot 2 = \sqrt{6} - 2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$

(γ) $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

(δ) $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot (\lambda + 2) - \lambda \cdot \lambda = \lambda^2 - 1 - \lambda^2 = -1$

(ε) $\begin{vmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}8 \end{vmatrix} = (0{,}8) \cdot (0{,}8) - (-0{,}6) \cdot (0{,}6) = (0{,}8)^2 + (0{,}6)^2$
$= 0{,}64 + 0{,}36 = 1$

(στ) $\begin{vmatrix} \alpha + \beta & 4\alpha \\ \beta & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) - (4\alpha) \cdot \beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Υπάρχει τουλάχιστον ένας τετραγωνικός 2x2 πίνακας με ορίζουσα ίση με μηδέν. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν $A=\begin{pmatrix}\kappa+\lambda & \kappa\\ \kappa & \kappa-\lambda\end{pmatrix}$, τότε $|A|=2\kappa^2-\lambda^2$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\delta & -\gamma\\ -\beta & -\alpha\end{vmatrix}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΣΩΣΤΟ**

Για παράδειγμα, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Τότε

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 2=0.$$

(β) **ΣΩΣΤΟ**

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 6-3\cdot(-2)=6+6=12$$

και

$$\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=1\cdot 6-(-2)\cdot 3=6+6=12$$

(γ) **ΛΑΘΟΣ**

$$A=\begin{pmatrix}\kappa+\lambda & \kappa\\ \kappa & \kappa-\lambda\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}\kappa+\lambda & \kappa\\ \kappa & \kappa+\lambda\end{vmatrix}=(\kappa+\lambda)\cdot(\kappa-\lambda)-\kappa\cdot\kappa$$

$$=\kappa^2-\lambda^2-\kappa^2=-\lambda^2.$$

Αν π.χ. $\kappa=1$ και $\lambda=0$, τότε $|A|=0$ ενώ $2\kappa^2-\lambda^2=2$ και άρα

$$|A|\neq 2\kappa^2-\lambda^2$$

(δ) **ΣΩΣΤΟ**

$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$ και $\begin{vmatrix}-\delta & -\gamma\\ -\beta & -\alpha\end{vmatrix}=(-\delta)\cdot(-\alpha)-(-\gamma)\cdot(-\beta)$

$$=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma$$

και άρα

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\delta & -\gamma\\ -\beta & -\alpha\end{vmatrix}$$

3. Αν $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=10$, να υπολογίσετε τις πιο κάτω ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}$ **(γ)** $\begin{vmatrix}\alpha & 8\beta\\ \gamma & 8\delta\end{vmatrix}$

Τι παρατηρείτε;

Απάντηση

(α) $\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma=|A|=10$

(β) $\begin{vmatrix}\gamma & \delta\\ \alpha & \beta\end{vmatrix}=\beta\cdot\gamma-\delta\cdot\alpha=-(\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma)=-|A|=-10$

(γ) $\begin{vmatrix}\alpha & 8\beta\\ \gamma & 8\delta\end{vmatrix}=\alpha\cdot(8\delta)-\gamma\cdot(8\beta)=8(\alpha\cdot\delta-\beta\cdot\gamma)=8|A|=80$

Από το (α) παρατηρούμε ότι, αν εναλλάξουμε τις γραμμές με τις στήλες ενός πίνακα 2×2, η ορίζουσά του παραμένει ίδια.
Από το (β) προκύπτει ότι, αν εναλλάξουμε δύο στήλες ενός πίνακα 2×2, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.
Τέλος, από το (γ) βλέπουμε ότι, αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα στοιχεία μιας στήλης με έναν αριθμό, τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό.

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>Απάντηση</u>

Έχουμε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 2\cdot 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 8)\cdot(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = -1}, \ \ \mathbf{8}$$

5.1.2 Ορίζουσα 3 × 3 πίνακα

Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ ένας 3 × 3 πίνακας. Ως **ορίζουσα** του πίνακα A θα λέμε τον αριθμό

$$\alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta)$$

και τον οποίο συμβολίζουμε με

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} \quad \text{ή} \quad det(A) \quad \text{ή} \quad |A|.$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω έκφραση αντιστοιχεί σε ένα πρότυπο.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$$

Δηλαδή,

$$|A| = \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) = +\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}.$$

Όμως, το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται και ως εξής:

$$\begin{aligned} |A| &= \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) \\ &= \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \delta(\beta\iota - \gamma\theta) + \eta(\beta\zeta - \varepsilon\gamma) \\ &= +\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \delta\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \theta & \iota \end{vmatrix} + \eta\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι με μια αναδιάταξη των όρων, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο ως προς όποια στήλη ή γραμμή αναπτύξουμε την ορίζουσα, λαμβάνοντας υπόψιν τον εξής κανόνα προσήμων:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Έτσι, για έναν 3 × 3 πίνακα, η ορίζουσά του προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το στοιχείο α με τη 2 × 2 ορίζουσα η οποία λαμβάνεται αν ξεχάσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης, μείον το στοιχείο β επί τη 2 × 2 ορίζουσα η οποία λαμβάνεται αν ξεχάσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και δεύτερης στήλης συν το στοιχείο γ επί τη 2 × 2 ορίζουσα η οποία λαμβάνεται αν ξεχάσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής και τρίτης στήλης. Αυτό λέγεται το ανάπτυγμα της ορίζουσας ως προς την πρώτη γραμμή. Το ίδιο ανάπτυγμα λαμβάνεται αν αναπτύξουμε ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη τηρώντας τον πιο πάνω κανόνα προσήμων.

Εφαρμογή

Να δείξετε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα στον οποίο όλα τα στοιχεία του (εκτός ίσως από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου) του είναι =0, ισούται με το γινόμενο το στοιχείων της διαγωνίου του.

Απάντηση

Έστω ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{pmatrix}.$$

Αναπτύσσω ως προς την 1η γραμμή:

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & \beta & 0\\ 0 & 0 & \gamma\end{vmatrix}=+\alpha\begin{vmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & \beta\\ 0 & \gamma\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\beta & 0\\ 0 & \gamma\end{vmatrix}$$

$$=\alpha(\beta\gamma-0\cdot 0)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma.$$

Παραδείγματα

1. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=0$$

Απάντηση

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=0 \overset{2\eta\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta}{\Longleftrightarrow} -0\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}-x\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -(1\cdot 0-2\cdot 1)-x(1\cdot 3-2\cdot 1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2-x=0 \iff \boldsymbol{x=2}.$$

η οποία είναι **αδύνατη** εξίσωση.

2. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\begin{vmatrix}x-1 & -2 & 2\\ 0 & -3-x & 4\\ 0 & -2 & 3-x\end{vmatrix}=0.$$

Απάντηση

Είναι (αναπτύσσοντας ως προς την 1η στήλη, αφού παρουσιάζονται 2 μηδενικά στοιχεία σε αυτήν)

$$\begin{vmatrix}x-1 & -2 & 2\\ 0 & -3-x & 4\\ 0 & -2 & 3-x\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (x-1)\begin{vmatrix}-3-x & 4\\ -2 & 3-x\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(-3-x)(3-x)+8]=0 \iff (x-1)(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+1)=0 \iff (x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x=-1,\ 1}.$$

Ο κανόνας του Sarrus

Ένας εύκολος τρόπος υπολογισμού της ορίζουσας ενός *3 × 3* πίνακα είναι ο **κανόνας του Sarrus**.

Βήμα 1: Γράφουμε τις πρώτες δύο στήλες του πίνακα στα δεξιά της τρίτης στήλης:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}\begin{matrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{matrix}$$

Βήμα 2: Αθροίζουμε το γινόμενο των στοιχείων στις διαγώνιους από πάνω μέχρι κάτω:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{matrix} \Rightarrow \alpha\varepsilon\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta$$

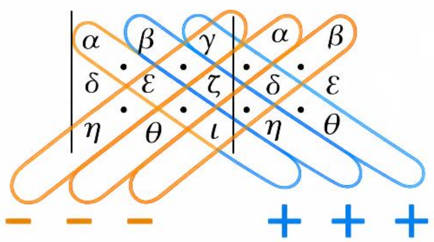
$$+ \quad + \quad +$$

Βήμα 3: Σχηματίζουμε τα γινόμενα των στοιχείων στις διαγωνίους από κάτω μέχρι πάνω:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{matrix} \Rightarrow \eta\varepsilon\gamma + \theta\zeta\alpha + \iota\delta\gamma$$

Βήμα 4: Το αποτέλεσμα της ορίζουσας προκύπτει αν αφαιρέσουμε το αποτέλεσμα του Βήματος 2 από αυτό του Βήματος 3:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \eta\varepsilon\gamma - \theta\zeta\alpha - \iota\delta\gamma$$



Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{matrix}$$

$= 2\cdot4\cdot7 + 3\cdot6\cdot3 + 5\cdot(-1)\cdot(-2) - 3\cdot4\cdot5 - (-2)\cdot6\cdot2 - 7\cdot(-1)\cdot3$
$= 120 - 105 = 15.$

Φύλλο εργασίας

1. Να υπολογιστούν οι πιο κάτω ορίζουσες:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

2. Να λυθούν οι πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(β) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

(γ) $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

(δ) $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = 0$

(ε) $\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & -5 \\ 0 & 1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

3. Να αποδείξετε την πιο κάτω ισότητα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\delta & \beta-\varepsilon & \gamma-\zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}.$$

4. Να δείξετε ότι:

(α) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-y)(z-y)(x-z)(x+y+z)$

(β) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

Δραστηριότητες σελ. 15 (Ορίζουσα 3x3)

1. **(α)** Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός 3×3πίνακας, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσάς της:

i. αναπτύσσοντάς την κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης
ii. αναπτύσσοντάς την κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης.

(β) Αν $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός 3×3πίνακας, να υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσάς του, αφού πρώτα επιλέξετε «κατάλληλη» γραμμή ή στήλη για να την αναπτύξετε.

Απάντηση

(α) i. Αναπτύσσω ως προς τα στοιχεία της 1ης στήλης:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = +2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 2[0 \cdot (-2) - 0 \cdot 4] - [7 \cdot (-2) - 0 \cdot (-1)] + 3[7 \cdot 4 - 0 \cdot (-1)]$$

$$= -7 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 \cdot 4 = 14 + 84 = 98$$

ii. Αναπτύσσω ως προς τα στοιχεία της 2ης στήλης:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -7[1 \cdot (-2) - 4 \cdot 3] = -7 \cdot (-14) = 98$$

(β) Παρατηρούμε ότι η 2η γραμμή έχει 2 μηδενικά στοιχεία και άρα επιλέγουμε αυτήν ως ΄κατάλληλη':

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2 \cdot 5 - 3 \cdot 1) = 4(10 - 3) = 28$$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $|A| = 14$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσα του είναι $|A| = 0$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΣΩΣΤΟ**

Αναπτύσσω ως προς την 3η στήλη γιατί έχει τα περισσότερα μηδενικά:

$$|A| = 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +7(3\cdot 2 - 4\cdot 1) = 7\cdot(6-4) = 14$$

(β) **ΛΑΘΟΣ**

Αναπτύσσω ως προς την 3η στήλη γιατί έχει τα περισσότερα μηδενικά:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = +5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot(1\cdot 5 - 0) = 25 \neq 0$$

(γ) **ΣΩΣΤΟ**

Αναπτύσσω ως προς την 1η στήλη γιατί έχει τα περισσότερα μηδενικά:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} = +\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ 0 & \iota \end{vmatrix} = \alpha(\varepsilon\cdot\iota - \zeta\cdot 0) = \alpha\cdot\varepsilon\cdot\iota$$

(δ) **ΣΩΣΤΟ**

Αναπτύσσω π.χ ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (2\cdot 7 - 6\cdot 3) - 2(1\cdot 7 - 5\cdot 3) + 3(1\cdot 6 - 2\cdot 5)$$

$$= -4 + 16 - 12 = 0$$

και αυτό αντανακλά το γεγονός ότι 2 στήλες του πίνακα (η 2η και 3η) είναι ίσες.

3. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω οριζουσών:

(α) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ **(δ)** $\begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

Απάντηση

(α) Αναπτύσσω ως προς την 3η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +11 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 7 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 11\big(7 \cdot 5 - 1 \cdot (-1)\big) = 11 \cdot 36 = 396$$

(β) Αναπτύσσω ως προς τη 2η στήλη:

$$\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -19 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -19 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

(γ) Αναπτύσσω ως προς την 3η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \cdot 2 - 11 \cdot 2) - 5(3 \cdot 2 - 11 \cdot 2) = -18 + 80 = 62$$

(δ) Αναπτύσσω ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2^{100} & 3^{200} \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\big((-2) \cdot (-5) - 0 \cdot (-4)\big) = 30$$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

Απάντηση

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0 \overset{1\eta\ \sigma\tau\acute{\eta}\lambda\eta}{\Longleftrightarrow} x\begin{vmatrix} x & 3 \\ 3 & x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 9) - 2(2x - 9) + 2(6 - 3x)$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 9) - 2(2x - 9) + 2(6 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x - 4x + 18 + 12 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 19x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 - 15x) - 2x^2 - 4x + 30$

$\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 15) - 2(x^2 + 2x - 15) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 15)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 3)(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = -5, 2, 3}$

5.2 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Υπενθυμίσεις:

1. Έστω (ε) ευθεία που περνά από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2). Αν $x_1 \neq x_2$, τότε η κλίση λ της ευθείας δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Στην περίπτωση που $x_1 = x_2$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων και άρα η εξίσωσή της είναι της μορφής $x = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, δεν ορίζεται κλίση της ευθείας ή λέμε ότι η ευθεία έχει άπειρη κλίση.

2. Αν θ η **θετική κυρτή[1] γωνία** που σχηματίζει μία ευθεία (ε) με τον άξονα των τετμημένων με αρχική πλευρά τον άξονα αυτό, τότε η κλίση της ευθείας είναι

$$\lambda = \varepsilon\varphi\theta$$

3. $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$

Απόδειξη

Έστω $\theta_1 = \measuredangle(\varepsilon_1, xx')$, $\theta_2 = \measuredangle(\varepsilon_2, xx')$

Αν $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$, τότε, δηλ. $\varepsilon\varphi\, \theta_1 = \varepsilon\varphi\, \theta_2$ και άρα $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$.

Αντίστροφα, αν $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$, τότε $\varepsilon\varphi\, \theta_1 = \varepsilon\varphi\, \theta_2$. Αλλά, $0^o < \theta_1, \theta_2 < 180^o$ και άρα $\theta_1 = \theta_2$, συνεπώς $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$.

4. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\varepsilon_1} = -1$

Απόδειξη

Αν $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$, τότε $\theta_1 = 90^o + \theta_2{}'$ (βλέπε σχήμα). Άρα,

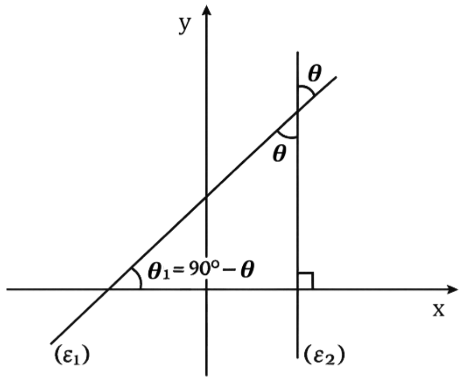
$$\text{εφ}(\theta_1) = \text{εφ}(90^o + \theta_2{}') = -\sigma\varphi(\theta_2{}') = -\frac{1}{\text{εφ}(\theta_2{}')}$$

και συνεπώς, $\text{εφ}(\theta_1) \cdot \text{εφ}(\theta_2{}') = -1$, δηλαδή

$$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1.$$

Αντίστροφα, αν $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$, τότε $\text{εφ}(\theta_1) = \text{εφ}(90^o + \theta_2{}')$ και αφού $0^o < \theta_1, \theta_2{}' < 180^o$, έπεται ότι $\theta_1 = 90^o + \theta_2{}'$, δηλαδή $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$.

[1] Κάθε γωνία μικρότερη από την ευθεία καλείται **κυρτή** ενώ στην αντίθετη περίπτωση (δηλαδή μεγαλύτερη από την ευθεία γωνία) **μη κυρτή**. Δηλαδή, θ κυρτή $\Leftrightarrow 0^o \leq \theta < 180^o$.



Πρόταση

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία A και B, με συντεταγμένες $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχει εξίσωση

$$\begin{cases} \dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, & \text{αν } x_1 \neq x_2 \\ x = x_1, & \text{αν } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, και είναι διαφορετικό από τα A και B.

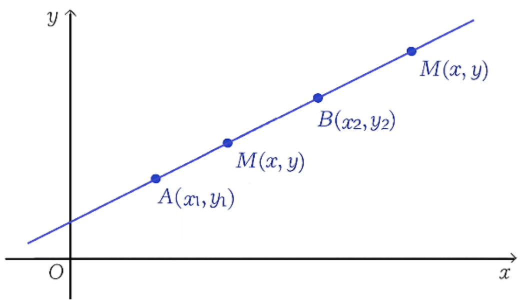
Αν $x_1 \neq x_2$, οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες μεταξύ τους.

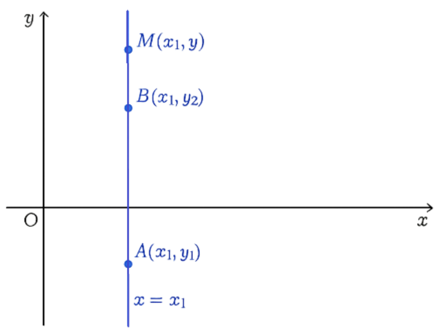
Επομένως:

$$\lambda_{AM}=\lambda_{AB} \iff \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \iff y-y_1=\lambda(x-x_1)$$

Αν $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε η κλίση της AB δεν ορίζεται. Επομένως, δεν ορίζεται η κλίση της ΑΜ, δηλαδή:

$$x - x_1 = 0 \iff x = x_1$$



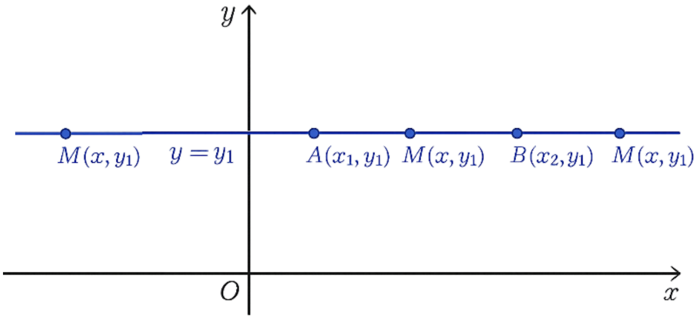


📌 **Σημείωση**

1. Η εξίσωση $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $\alpha\nu\ x_1 \neq x_2$ γράφεται ισοδύναμα ως
$$y-y_1=\lambda(x-x_1),$$
όπου λ είναι η κλίση της ευθείας AB.

2. Αν $y_1 = y_2$, $x_1 \neq x_2$ και $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της ευθείας, τότε οι κλίσεις των AM και AB ορίζονται και είναι ίσες με μηδέν. Επομένως:

$$\lambda_{AM} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \iff y = y_1$$



<u>Θα ορίσουμε τώρα τη γωνία μεταξύ ευθειών</u>

Μεταξύ δύο τεμνουσών ευθειών σχηματίζονται:

- δύο οξείες ίσες και
- δύο αμβλείες ίσες

Οι δύο ευθείες σχηματίζουν δύο ίσες οξείες και δύο ίσες αμβλείες κυρτές γωνίες, των οποίων τα μέτρα έχουν άθροισμα $180°$.

Ορισμός (Γωνία δύο ευθειών)

Η **γωνία** δύο ευθειών (ε_1) και (ε_2) ορίζεται ως εξής:

- αν οι ευθείες τέμνονται, τότε ως γωνία τους ονομάζεται **μία από τις κυρτές γωνίες** που σχηματίζονται στο σημείο τομής τους,
- αν οι ευθείες είναι παράλληλες, τότε η γωνία τους **ορίζεται** ίση με $0°$ ή λέμε ότι **δεν υπάρχει μεταξύ τους γωνία**.

📌 **Επισημάνσεις**

1. **Συνήθως**, ως γωνία των δύο ευθειών λαμβάνεται η μικρότερη κυρτή γωνία, εκτός αν καθορίζεται διαφορετικά.

2. Ο πιο πάνω ορισμός, περιλαμβάνει την περίπτωση που τέμνονται κάθετα, όταν δηλαδή η μεταξύ τους γωνία είναι $90°$.

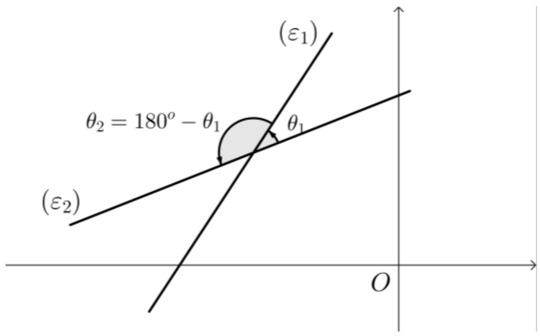
Ορισμός (Γωνία δύο ευθειών)

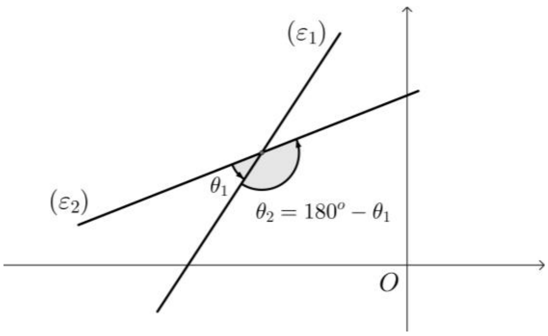
Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται, τότε:

Θετικά προσανατολισμένη γωνία από την ευθεία (ε_1) προς την ευθεία (ε_2) ονομάζεται η γωνία με **αρχική πλευρά** την (ε_1) και **τελική πλευρά** την (ε_2), η οποία διαγράφεται με **αντιωρολογιακή φορά.**

Αρνητικά προσανατολισμένη γωνία από την (ε_1) προς την (ε_2) ονομάζεται η γωνία με αρχική πλευρά την (ε_1) και τελική πλευρά την (ε_2), η οποία διαγράφεται με **ωρολογιακή φορά**.

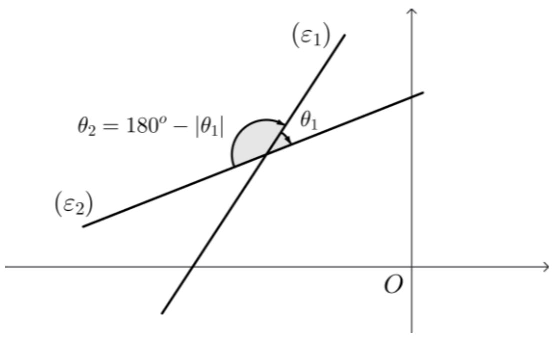
ωρολογιακή φορά (-) αντιωρολογιακή φορά (+)

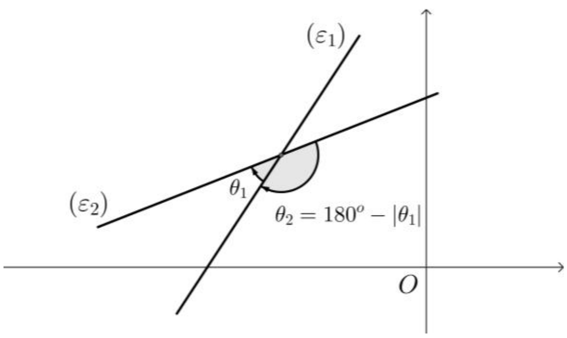




θ_1= η (**θετικά προσανατολισμένη**) γωνία με αρχική πλευρά την (ε_2) και τελική πλευρά την (ε_1)

$\theta_2 = 180^o - \theta_1$= η (**θετικά προσανατολισμένη**) γωνία με αρχική πλευρά την (ε_1) και τελική πλευρά την (ε_2)





θ_1= η (αρνητικά προσανατολισμένη) γωνία με αρχική πλευρά την (ε_2) και τελική πλευρά την (ε_1)

$\theta_2 = 180^o - |\theta_1|$= η (αρνητικά προσανατολισμένη) γωνία με αρχική πλευρά την (ε_2) και τελική πλευρά την (ε_1)

Πρόταση (Τύπος υπολογισμού γωνίας δύο ευθειών)

Αν δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) **τέμνονται** και δεν είναι παράλληλες με τον άξονα των τεταγμένων, και έχουν κλίσεις $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2} \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα, τότε η προσανατολισμένη γωνία θ από την (ε_1) προς την (ε_2) ικανοποιεί:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}}$$

📌 **Επισημάνσεις**

1. Στην περίπτωση που $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2} > 0$ και $\theta_1 = \measuredangle(\varepsilon_1, xx')$, $\theta_2 = \measuredangle(\varepsilon_2, xx)$, τοτε, η γωνία μεταξύ των δύο ευθειών είναι $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Αν τώρα $\theta_2 > \theta_1$, τότε η γωνία θ είναι η οξεία γωνία και ο τύπος ενώ αν $\theta_2 < \theta_1$ είναι η αμβλεία. Έτσι, από τη στιγμή που λαμβάνουμε το απόλυτο στον πιο πάνω τύπο, θα πάρουμε την οξεία γωνία. Αυτό έρχεται σε συμφωνία με το ότι
$$\varepsilon\varphi(\theta_2 - \theta_1) = -\varepsilon\varphi(\theta_1 - \theta_2)$$

2. Αν το πηλίκο $\frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}}$ είναι > 0, τότε η γωνία είναι η οξεία ενώ αν είναι < 0, τότε η γωνία είναι η αμβλεία, δηλ. η παραπληρωματική της. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις με τη σχέση των δύο κλίσεων είναι εντελώς ανάλογες.

   Περισσότερα θα πούμε στο παράδειγμα πιο κάτω.

3. Αν $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$, τότε οι δύο ευθείες είναι παράλληλες (ή συμπίπτουν) και άρα η μεταξύ τους γωνία είναι =0. Αυτό φαίνεται και από τον πιο πάνω τύπο, αφού $\varepsilon\varphi\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^o$.

4. Αν $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$, τότε οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους και **ο πιο πάνω τύπος δεν έχει νόημα**.

5. Αν μία από τις δύο ευθείες είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πιο πάνω τύπο. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε τη γωνία μεταξύ των δύο ευθειών, παρατηρούμε το εξής: έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι η (ε_2) είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων. Τότε
$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(90^o - \theta_1) = \sigma\varphi\theta_1 = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta_1}$$
   και άρα:
$$\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon_1}}}.$$

Παράδειγμα

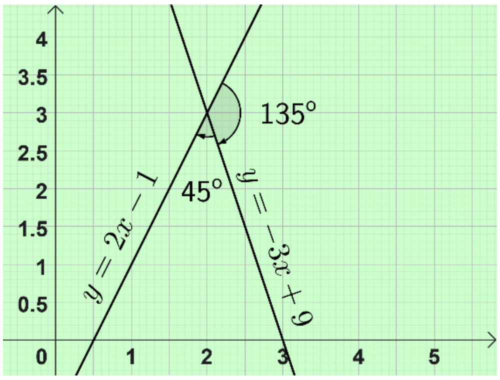
Να προσδιορίσετε την **οξεία** γωνία μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): y = 2x - 1$ και $(\varepsilon_2): y = -3x + 9$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\lambda_{\varepsilon_1} = 2$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = -3$.

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = \frac{-5}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$$

και άρα $\theta = 45^\circ$ και αυτή είναι η οξεία γωνία των δύο ευθειών. **Δηλαδή, υπολογίσαμε την γωνία με αρχική πλευρά την $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ και τελική την $\boldsymbol{\varepsilon_2}$.** Η αμβλεία γωνία μεταξύ τους είναι η $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



Δηλαδή, από την (ε_2) στην (ε_1) έχουμε θετικό προσανατολισμό.

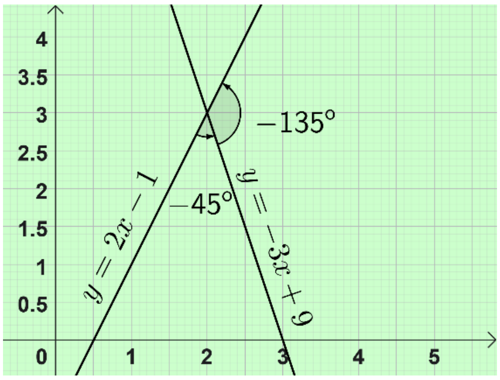
Αν όμως γράφαμε:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_{\varepsilon_1} - \lambda_{\varepsilon_2}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{2-(-3)}{1+(-3)\cdot 2} = \frac{2+3}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1$$

και άρα, shift+tan(-1)=$-45^\circ = \theta$, αυτή είναι η οξεία γωνία των δύο ευθειών, αρνητικά προσανατολισμένη. Όμως, $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ και αυτή είναι η αμβλεία γωνία των δύο ευθειών.

- Με άλλα λόγια, η οξεία γωνία είναι η $|\theta|$ και η αμβλεία προκύπτει ως $180^\circ - |\theta|$.

Δηλαδή, υπολογίσαμε την γωνία με αρχική πλευρά την $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ και τελική την $\boldsymbol{\varepsilon_1}$, ή αλλιώς, από την (ε_1) στην (ε_2) έχουμε αρνητικό προσανατολισμό.



Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(0{,}8)$, $B(5{,}3)$ και $\Gamma(4{,}8)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-8}{5-0}=-1,\qquad \lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{8-3}{4-5}=-5$$

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{8-8}{4-0}=0$$

Άρα,

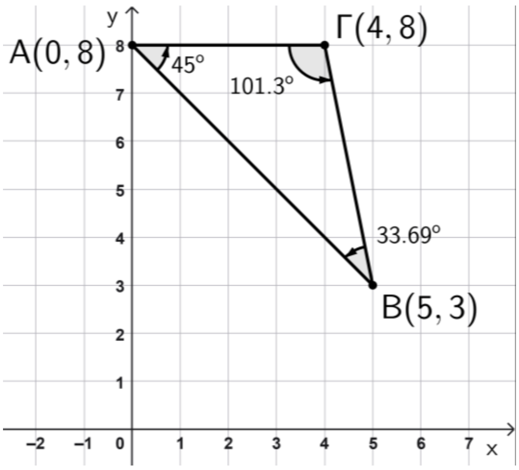
$$\varepsilon\varphi\hat{A}=\frac{\lambda_{A\Gamma}-\lambda_{AB}}{1+\lambda_{A\Gamma}\lambda_{AB}}=\frac{0-(-1)}{1+0\cdot(-1)}=1\Rightarrow\boxed{\hat{\boldsymbol{A}}=\mathbf{45^o}}$$

και

$$\varepsilon\varphi\hat{B}=\frac{\lambda_{B\Gamma}-\lambda_{AB}}{1+\lambda_{B\Gamma}\lambda_{AB}}=\frac{-5-(-1)}{1+(-5)\cdot(-1)}=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow \hat{B}=-33.69^o$ (αρνητικά προσανατολισμένη) ή $\boxed{\hat{\boldsymbol{B}}=\mathbf{33.69^o}}$ (θετικά προσανατολισμένη)

Τέλος, αφού $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o\Rightarrow\hat{\Gamma}=101.31^o$



Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ έτσι ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1)\colon(\lambda-2)x+3y=3$ και $(\varepsilon_2)\colon(\lambda+2)x+2y=-1$ να είναι παράλληλες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε:

$$\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{A_1}{B_1}=-\frac{\lambda-2}{3},\qquad \lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{\lambda+2}{2}.$$

Έτσι,

$$(\varepsilon_1)\parallel(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\lambda_{\varepsilon_1}=\lambda_{\varepsilon_2}\Leftrightarrow\frac{\lambda-2}{3}=\frac{\lambda+2}{2}\Leftrightarrow 2(\lambda-2)=3(\lambda+2)\Leftrightarrow\boxed{\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{-10}}$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου λ έτσι ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x + (\lambda - 1)y = -3$ και $(\varepsilon_2): (3\lambda + 1)x - 2\lambda y = 1$ να είναι κάθετες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε:

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \qquad \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A_2}{B_2} = \frac{3\lambda + 1}{2\lambda}.$$

Έτσι,

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{3\lambda+1}{2\lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda + 1) = 2\lambda(\lambda - 1)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda = -3,\ \ 0}}.$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τη θετικά προσανατολισμένη οξεία γωνία $\widehat{\omega}$ των ευθειών $(\varepsilon_1): 7x + 3y = 13$ και $(\varepsilon_2): 2x + 5y = 4$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{7}{3} \neq -\frac{2}{5} = \frac{A_2}{B_2} = \lambda_{\varepsilon_2}$$

και άρα οι ευθείες τέμνονται (όχι κάθετα). Έτσι,

$$\varepsilon\varphi\widehat{\omega} = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{-\frac{2}{5} - \left(-\frac{7}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)} = \frac{-\frac{2}{5} + \frac{7}{3}}{1 + \frac{14}{15}} = \frac{\frac{15}{5}}{\frac{29}{15}} = \frac{15}{29}$$

και άρα $\widehat{\omega} = 27.34^o$.

Επισημάνσεις Θεωρίας

Σημείωση – Συμμετρία ως προς τον άξονα των τετμημένων (x′x)

- Κάθε σημείο (x, y) της ευθείας ‘μετατρέπεται’ σε $(x, -y)$.
- Η κλίση αλλάζει πρόσημο.
- Ο σταθερός όρος αλλάζει πρόσημο.

Σημείωση – Συμμετρία ως προς τον άξονα των τεταγμένων (y′y)

- Κάθε σημείο (x, y) ‘μετατρέπεται’ σε $(-x, y)$.
- Ο συντελεστής του x αλλάζει πρόσημο.
- Ο σταθερός όρος παραμένει ίδιος.

Σύνοψη

- Συμμετρία ως προς x → αλλάζει πρόσημο το y
- Συμμετρία ως προς y → αλλάζει πρόσημο το x

Σημείωση – Γωνία μεταξύ δύο ευθειών

Τι μας δίνει ο τύπος $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{1+\lambda_1\lambda_2}$ χωρίς απόλυτη τιμή;

Ο τύπος

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}$$

δίνει μια τιμή που **αντιστοιχεί σε μια προσανατολισμένη γωνία** (με πρόσημο).

- Αν βγει θετικό, τότε η γωνία που “διαβάζει” το $\tan^{-1}$ στην υπολογιστική είναι συνήθως **οξεία**.
- Αν βγει αρνητικό, τότε το $\tan^{-1}$ θα δώσει αρνητική γωνία, που στην πράξη σημαίνει ότι η οξεία γωνία είναι η απόλυτη τιμή, αλλά υπάρχει και η συμπληρωματική αμβλεία.

Όμως, σε τρίγωνο δεν μας ενδιαφέρει προσανατολισμός, μας ενδιαφέρει η εσωτερική γωνία.

Κανόνας-κλειδί: Εσωτερική γωνία τριγώνου = η οξεία ή η αμβλεία;

Η γωνία μεταξύ δύο ευθειών έχει πάντα δύο επιλογές:

- η οξεία: θ
- η αμβλεία: $180° - \theta$

Ο τύπος με απόλυτη τιμή:

$$\varepsilon\varphi\theta = \left|\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}\right|$$

δίνει πάντα την οξεία γωνία $\boldsymbol{\theta}$.

Άρα για να ξέρεις αν η γωνία του τριγώνου είναι οξεία ή αμβλεία, πρέπει **να αποφασίσεις** αν η εσωτερική γωνία είναι:

- θ (οξεία)
- ή $180° - \theta$ (αμβλεία)

➢ Πώς αποφασίζεις σωστά; Μέσω θεωρίας που δε διδάσκεται στο λύκειο (εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων).

Σημείωση – ***διδακτικής ακρίβειας:***

Σε επίπεδο σχολικής τάξης:

Αν από τον τύπο βρούμε την οξεία γωνία $\boldsymbol{\theta}$, τότε:

- Αν οι γωνίες αθροίζουν σωστά σε 180° και δεν δημιουργούν "παραλογισμούς", τότε η εσωτερική είναι η θ.
- Αν υποψιαζόμαστε ότι μια κορυφή πρέπει να είναι αμβλεία, τότε η εσωτερική είναι $180° - \theta$.

Αλλά αυτή η μέθοδος είναι πιο "ελεγκτική" (επαλήθευση).

Φύλλο εργασίας

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία:

(α) έχει κλίση $\lambda = 2$ και περνά από την αρχή των αξόνων

(β) έχει κλίση $\lambda = -3$ και περνά από το σημείο $\mathrm{A}(3,-2)$

(γ) περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(0,4)$ και $\mathrm{B}(-1,2)$

(δ) είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon_1): x + 2y = 6$ και περνά από το σημείο $\mathrm{A}(6,-10)$

(ε) είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_1): y = 2x - 1$ και περνά από το σημείο $\mathrm{A}(3,5)$

(στ) περνά από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): x - y = 2$ και $(\varepsilon_2): 3x + 2y + 1 = 0$.

2. Να βρείτε εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία περνά από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 2x - y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2): x + y + 2 = 0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon_3): 3x - y - 1 = 0$.

Δραστηριότητες σελ. 25-26 (Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας)

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

(α) διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,0)$

(β) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-2,3)$ και $\Delta(-2,6)$

(γ) διέρχεται από τα σημεία $E(-4,3)$ και $Z(5,3)$.

<u>Απάντηση</u>

(α) Έστω $(\varepsilon)\colon y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.
Αφού $B(1,0)\in(\varepsilon)\Rightarrow 0=\alpha+\beta\Rightarrow\alpha=-\beta$ και $A(-1,3)\in(\varepsilon)\Rightarrow 3=-\alpha+\beta$.
Αντικαθιστώντας την πρώτη στη δεύτερη, έχουμε

$$3=-(-\beta)+\beta\Rightarrow\beta=\frac{3}{2}$$

και αρα $\alpha=-\frac{3}{2}$.
Συνεπώς,

$$(\varepsilon)\colon y=\frac{3}{2}(1-x)\ \text{ ή }\ \boxed{\mathbf{3x+2y=3}}$$

Διαφορετικά:

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Leftrightarrow\frac{y-3}{x+1}=\frac{0-3}{1+1}\Leftrightarrow\frac{y-3}{x+1}=\frac{-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(y-3)=-3(x+1)\Leftrightarrow\boxed{\mathbf{3x+2y=3}}$$

(β) $B(-2,3),\Delta(-2,6)$
Παρατηρώ ότι $x_B=x_\Delta=-2$ και αρα η εξίσωση της ευθείας είναι η $\boxed{\mathbf{x=-2}}$.

(γ) $E(-4,3),Z(5,3)$
Παρατηρώ ότι $y_E=y_Z=3$ και αρα η εξίσωση της ευθείας είναι η $\boxed{\mathbf{y=3}}$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,2)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον άξονα των τετμημένων.

<u>Απάντηση</u>

Έστω $(\varepsilon)\colon y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.
$\lambda=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ και άρα, $(\varepsilon)\colon y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\beta$ και αφού το $A(-2,2)$ ανήκει στην ευθεία, αντικαθιστώ:

$$2=-2\frac{\sqrt{3}}{3}+\beta\Rightarrow\beta=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

και συνεπώς:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow 3y-\sqrt{3}x-6-2\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\boxed{\mathbf{\sqrt{3}x-3y+6+2\sqrt{3}=0}}.$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2{,}5)$ και:

(α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$

(β) σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα των τετμημένων

(γ) είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 5x - 2$.

Απάντηση

(α) Έστω $(\varepsilon){:}\, y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$\lambda = -3$,τότε $(\varepsilon){:}\, y = -3x + \beta$ και αφού το $A(-2{,}5)$ ανήκει στην ευθεία: $5 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -1$. Έτσι, $(\varepsilon){:}\, y = -3x - 1 \Leftrightarrow (\varepsilon){:}\, y + 3x + 1 = 0$.

Διαφορετικά:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 5 = -3\big(x - (-2)\big)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = -3x - 6 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{3x + y + 1 = 0}}.$$

(β) Έστω $(\varepsilon){:}\, y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$\widehat{\omega} = 135^o =$ η **αμβλεία** γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των τεταγμένων και άρα η **οξεία** γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των τετμημένων είναι η $180^o - 135^o = 45^o$.
Έτσι, $\lambda = -\varepsilon\varphi 45^o = -1$ και αρα $(\varepsilon){:}\, y = -x + \beta$.
Αφού το $A(-2{,}5)$ ανήκει στην ευθεία, αντικαθιστώ:

$$5 = -(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Συνεπώς:
$(\varepsilon){:}\, y = -x + 3 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\varepsilon){:}\, x + y - 3 = 0}}$.

Διαφορετικά:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 5 = -\big(x - (-2)\big)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = -x - 2 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\varepsilon){:}\, x + y - 3 = 0}}.$$

(γ) Έστω $(\varepsilon){:}\, y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$(\varepsilon_1){:}\, y = 5x - 2$.
Αφού $(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{\varepsilon_1} = 5$ και άρα $(\varepsilon){:}\, y = 5x + \beta$ και αφού το $A(-2{,}5)$ ανήκει στην ευθεία: $5 = -10 + \beta \Rightarrow \beta = 15$.
Έτσι,
$(\varepsilon){:}\, y = 5x + 15 \Leftrightarrow (\varepsilon){:}\, y - 5x - 15 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\varepsilon){:}\, 5x - y + 15 = 0}}$.

Διαφορετικά:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 5 = 5\big(x - (-2)\big)$$

$$\Leftrightarrow y - 5 = 5x + 10 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{5x - y + 15 = 0}}.$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

(α) διέρχεται από το σημείο $A(-1,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x+3y=1$

(β) διέρχεται από το σημείο $B(1,0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x-5y=10$.

<u>Απάντηση</u>

(α) Έστω $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$(\varepsilon_1): 2x+3y=1 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{2}{3}$ και

$$(\varepsilon)\perp(\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_1}=-1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{3}{2}$$

και άρα $(\varepsilon): y=\frac{3}{2}x+\beta$ και αφού το $A(-1,3)$ ανήκει στην ευθεία:

$$3=-\frac{3}{2}+\beta \Rightarrow \beta=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}.$$

Συνεπώς,

$$(\varepsilon): y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon): 2y-3x=9 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{3x-2y+9=0}}.$$

Διαφορετικά:

$$y-y_A=\lambda(x-x_A) \Leftrightarrow y-3=\frac{3}{2}\big(x-(-1)\big)$$

$$\Leftrightarrow 2(y-3)=3(x+1) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{3x-2y+9=0}}.$$

(β) Έστω $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$(\varepsilon_1): 3x-5y=10 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y=\frac{3}{5}x-2 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=\frac{3}{5}$ και

$$(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}=\frac{3}{5}$$

και άρα $(\varepsilon): y=\frac{3}{5}x+\beta$ και αφού το $B(1,0)$ ανήκει στην ευθεία:

$$0=\frac{3}{5}+\beta \Rightarrow \beta=-\frac{3}{5}.$$

Συνεπώς,

$$(\varepsilon): y=\frac{3}{5}x-\frac{3}{5} \Leftrightarrow (\varepsilon): 5y-3x=-3 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{3x-5y-3=0}}.$$

Διαφορετικά:

$$y-y_B=\lambda(x-x_B) \Leftrightarrow y-0=\frac{3}{5}(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{3x-5y-3=0}}.$$

5. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB, όταν $A(0,9)$ και $B(2,-3)$.

<u>Απάντηση</u>

$(M): y=\lambda x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία. Είναι

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1 \quad \kappa\alpha\iota \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{9-3}{2}=3$$

και

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3-9}{2-0} = -6$$

Αφού $(M)\perp(AB) \Rightarrow \lambda_M \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{1}{6}$ και άρα $(M): y = \frac{1}{6}x + \beta$.

Αλλά το M ανήκει στη (M) και αντικαθιστώντας το στην εξίσωση έχουμε:

$$3 = \frac{1}{6} + \beta \Rightarrow \beta = \frac{17}{6}.$$

Έτσι,

$$(\boldsymbol{M}): \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{6}} \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{M}): \boldsymbol{x} - \mathbf{6}\boldsymbol{y} + \mathbf{17} = \mathbf{0}}$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,7)$ και $\Gamma(2,3)$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB, $A\Gamma$ και $B\Gamma$.

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η καθεμία από τις πιο πάνω ευθείες με τον άξονα των τετμημένων.

<u>Απάντηση</u>

(α) Έχουμε $x_\Gamma = x_B = 2$ και αρα το ευθύγραμμο τμήμα $(B\Gamma)$ είναι παράλληλο με τον άξονα των τεταγμένων με εξίσωση $(B\Gamma): y = 2$. Επίσης, $y_\Gamma = y_A = 3$ και αρα το ευθύγραμμο τμήμα (ΓA) είναι παράλληλο με τον άξονα των τετμημένων με εξίσωση $(\Gamma A): x = 3$. Τέλος,

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{2-1} = 4$$

Άρα, αν $(AB): y = \lambda x + \beta \Rightarrow (AB): y = 4x + \beta$ και αφού το σημείο $A(1,3)$ ανήκει στο (AB), έπεται ότι:

$$3 = 4 + \beta \Rightarrow \beta = -1$$

και άρα $(AB): y = 4x - 1$ ή $(AB): 4x - y - 1 = 0$ ή $\boxed{(\boldsymbol{AB}): \boldsymbol{y} = \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{1}}$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ΓA) με τον άξονα των τετμημένων είναι $\mathbf{0^o}$, η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $(B\Gamma)$ με τον άξονα των τεταγμένων είναι $\mathbf{90^o}$.
Για τη γωνία $\widehat{\omega}$ που σχηματίζει η ευθεία (AB) με τον άξονα των τετμημένων έχουμε:

$$\lambda_{AB} = 4 \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{75.96^o}.$$

[Shift+tan4 στην υπολογιστική].
Συνεπώς:

$$\boxed{\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0^o},\ \mathbf{75.96^o},\ \mathbf{90^o}}.$$

7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = 4x - 1$ και $(\varepsilon_2): 8y + 2x - 1 = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

<u>Απάντηση</u>

$(\varepsilon_1): y = 4x - 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 4$ και $(\varepsilon_2): 8y + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{4}$. Άρα

$$\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Rightarrow (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$$

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(5,0)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x + 3y - 2 = 0$.

Απάντηση

Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$(\varepsilon_1): 4x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{4}{3}$ και

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow (\varepsilon): y = \frac{3}{4}x + \beta \,.$$

Το σημείο $A(5,0)$ ανήκει στην ευθεία, άρα

$$0 = \frac{15}{4} + \beta \ \Rightarrow \beta = -\frac{15}{4}$$

και άρα:

$$(\varepsilon): y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \Leftrightarrow (\varepsilon): 4y - 3x + 15 = 0 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{3x - 4y - 15 = 0}}.$$

9. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\kappa + 1)x - \kappa y - 4 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2\kappa x + (\kappa + 4)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

Απάντηση

Έστω $\kappa \neq -4,\ 0$. Τότε,

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = \frac{\kappa + 1}{\kappa}, \ \ \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A}{B} = -\frac{2\kappa}{\kappa + 4}$$

$$(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\kappa + 1}{\kappa} \cdot \left(-\frac{2\kappa}{\kappa + 4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa(\kappa + 1) = \kappa(\kappa + 4)$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa^2 + 2\kappa = \kappa^2 + 4\kappa \Leftrightarrow \kappa^2 - 2\kappa = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa(\kappa - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0} \ \text{(απορρίπτεται)}, \qquad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{2} \ \ \text{(δεκτή)}}$$

Αν $\kappa = 0$, τότε $(\varepsilon_1): x = 4$ και $(\varepsilon_2): y = -\frac{1}{4}$ και οι ευθείες είναι κάθετες αφού η πρώτη είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων και η δεύτερη με τον άξονα των τετμημένων.

Αν $\kappa = -4$, τότε $(\varepsilon_1): -3x + 4y = 4$ και $(\varepsilon_2): x = \frac{1}{8}$. Τότε οι ευθείες δεν είναι κάθετες, αφού η δεύτερη είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων ενώ η πρώτη έχει θετική κλίση.

Άρα:

$$\boxed{(\boldsymbol{\varepsilon_1}) \perp (\boldsymbol{\varepsilon_2}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{0, 2}}$$

10. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $\alpha x - 3y = 10$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 1$.

Απάντηση

Οι ευθείες $(\varepsilon_1): \alpha x - 3y = 10$ και $(\varepsilon_2): y = 2x - 1$ είναι κάθετες

$$\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3}\cdot 2 = -1 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha = -\frac{3}{2}}}.$$

11. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ με κορυφές τα σημεία $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(4,5)$ και $\Gamma(6,-1)$.

Απάντηση

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-2}{4+1} = \frac{3}{5}, \qquad \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-1-5}{6-4} = -\frac{6}{2} = -3$$

και

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{-1-2}{6+1} = -\frac{3}{7}$$

Άρα,

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \frac{\lambda_{A\Gamma} - \lambda_{AB}}{1 + \lambda_{A\Gamma}\lambda_{AB}} = \frac{-\frac{3}{7} - \frac{3}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{7}\right)\cdot\frac{3}{5}} = \frac{-\frac{36}{35}}{1 - \frac{9}{35}} = \frac{-\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} = -\frac{36}{26} \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 54,16^o}$$

ή $\hat{A} = 180^o - 54,16^o = 125,84^o$

και

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{AB}}{1 + \lambda_{B\Gamma}\lambda_{AB}} = \frac{-3 - \frac{3}{5}}{1 + (-3)\cdot\frac{3}{5}} = \frac{-\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 77.47^o}$$

ή $\hat{B} = 180^o - 77.47^o = 102,55^o$

Διαλέγουμε: $\boxed{\boldsymbol{\hat{A} = 54,16^o}}$ και $\boxed{\hat{B} = \boldsymbol{77.47^o}}$ για να προκύψει τρίγωνο.

Τέλος, αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\hat{\Gamma} = 48.37^o}}$.

12. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:

(α) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = -2x + 1$

(β) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1$ και $(\varepsilon_2): y = 3$

(γ) $(\varepsilon_1): y = 3x +$ και $(\varepsilon_2): x = -2$

(δ) $(\varepsilon_1): y = -3x + 1$ και $(\varepsilon_2): 2x - y = 6$

Απάντηση

(α) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 3$ και $(\varepsilon_2): y = -2x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = -2$.
Άρα

$$\varepsilon\varphi\widehat{\theta} = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{-2-3}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\widehat{\theta} = 45^o}$$

(β) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 3$ και $(\varepsilon_2): y = 3 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = 0$.
Άρα

$$\varepsilon\varphi\widehat{\theta} = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{0-3}{1-0} = -3 \Rightarrow \boldsymbol{\widehat{\theta} = 71,57^o}$$

Σημ.: Η υπολογιστική δίνει shift+tan(-3)= $\boldsymbol{-71,57^o}$, αλλά παίρνουμε την θετικά προσανατολισμένη γωνία, δηλαδή την $\boldsymbol{\widehat{\theta} = 71,57^o}$

(γ) $(\varepsilon_1): y = 3x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 3$ και $(\varepsilon_2): x = 2 \Rightarrow (\varepsilon_2) \parallel yy'\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha$.
Άρα

$$\varepsilon\varphi\widehat{\theta} = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon_1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{\theta} = \boldsymbol{18,43^o}$$

(δ) $(\varepsilon_1): y = -3x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -3$
$(\varepsilon_2): 2x - y = 6 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y = 2x - 6 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = 2$.
Άρα

$$\varepsilon\varphi\widehat{\omega} = \frac{\lambda_{\varepsilon_2} - \lambda_{\varepsilon_1}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{2+3}{1-6} = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\widehat{\theta} = 45^o}$$

Σημ.: Η υπολογιστική δίνει shift+tan(-1)= $\boldsymbol{-45^o}$, αλλά παίρνουμε την θετικά προσανατολισμένη γωνία, δηλαδή την $\boldsymbol{\widehat{\theta} = 45^o}$

13. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -2x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 4$.

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται κάθετα.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1).

<u>Απάντηση</u>

(α) $(\varepsilon_1): y = -2x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 4$. Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = -2$ και $\lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$ και άρα $\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$. Συνεπώς, $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$.

(β) Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$$(\varepsilon) \perp (\varepsilon_1) \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda = -1 \Rightarrow -2\lambda = -1 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda = \frac{1}{2}}$$

και άρα:

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x + \beta.$$

Το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στην ευθεία, άρα $2 = \frac{1}{2} + \beta \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}$ και συνεπώς,

$$(\varepsilon): y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\varepsilon): 2y = x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{(\varepsilon): 2y - x - 3 = 0}}.$$

Διαφορετικά:

$$y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2y - 4 = x - 1 \Leftrightarrow 2y - 4 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{x - 2y + 3 = 0}}$$

14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, η κορυφή Α έχει συντεταγμένες $(1,4)$ και δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$.

(α) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

<u>Απάντηση</u>

Κατ' αρχάς, εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το σημείο $A(1,4)$ δεν επαληθεύει καμία από τις εξισώσεις των δοθέντων υψών, άρα τα ύψη αυτά άγονται από τις δύο άλλες κορυφές του τριγώνου.

(α) $A(1,4)$, $(\upsilon_1): y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$, $(\upsilon_2): y = -x + 2$.
Είναι $\lambda_{\upsilon_1} = \frac{1}{2}$ και $\lambda_{\upsilon_2} = -1$.

Αφού $(\upsilon_1) \perp (A\Gamma) \Rightarrow \lambda_{\upsilon_1} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = -2$ και άρα

$$(A\Gamma): y = -2x + \beta.$$

Αλλά το σημείο $A(1,4)$ ανήκει στο $(A\Gamma)$ και αντιαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση του $(A\Gamma)$ βρίσκουμε ότι $\beta = 6$. Συνεπώς,

$$(A\Gamma): y = -2x + 6 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{A\Gamma}): \boldsymbol{2x + y - 6 = 0}}$$

Αφού $(\upsilon_2) \perp (AB) \Rightarrow \lambda_{\upsilon_2} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = 1$ και άρα

$$(AB): y = x + \beta.$$

Αλλά το σημείο $A(1,4)$ ανήκει στο (AB) και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση του (AB) βρίσκουμε ότι $\beta = 3$.
Συνεπώς,

$$(AB): y = x + 3 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{AB}): \boldsymbol{x - y + 3 = 0}}.$$

(β) Για να βρούμε το σημείο B λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών (AB) και (υ_1):

$$\begin{cases} (AB): x - y = -3 \\ (\upsilon_1): y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ 2y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 3 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

Εξισώνω τις δύο εξισώσεις:

$$y - 3 = 2y - 3 \Leftrightarrow y = 0$$

Αντικαθιστώ την τιμή $y = 0$ στην $x = y - 3$ και παίρνω $x = 0$.

Άρα: $\boxed{\boldsymbol{B(-3,0)}}$.

Για να βρούμε το σημείο Γ λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών $(A\Gamma)$ και (υ_2):

$$\begin{cases} (A\Gamma): y = -2x + 6 \\ (\upsilon_2): y = -x + 2 \end{cases}$$

Εξισώνω τις δύο εξισώσεις:

$$-2x + 6 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 4$$

Αντικαθιστώ την τιμή $x = 4$ στην $y = -2x + 6$ και παίρνω $y = -2$.

Άρα: $\boxed{\boldsymbol{\Gamma(4, -2)}}$.

Σημείωση:
Για να βρούμε την εξίσωση της $(B\Gamma)$, έχουμε

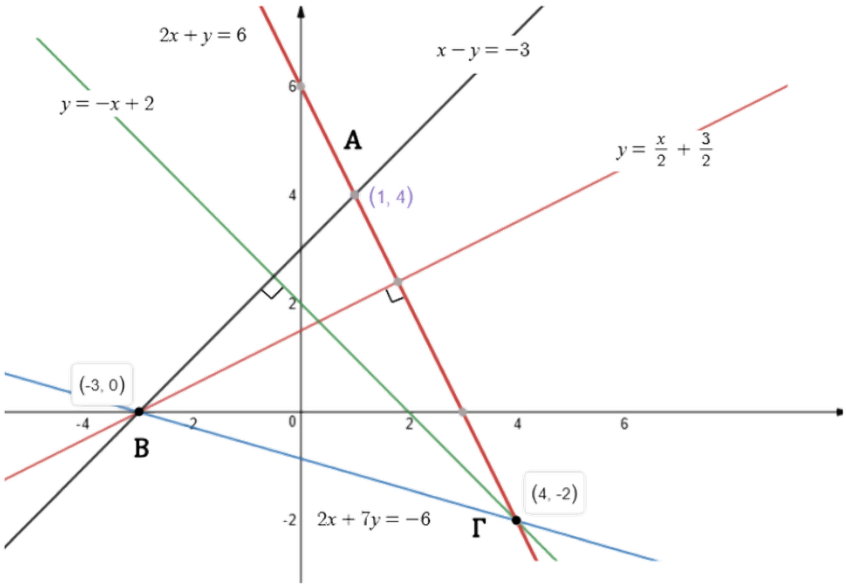
$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-2 - 0}{4 + 3} = -\frac{2}{7}$$

και άρα

$$(B\Gamma): y = -\frac{2}{7}x + \beta.$$

Αλλά το σημείο $B(-3,0)$ ανήκει στο $(B\Gamma)$ και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση του $(B\Gamma)$ βρίσκουμε ότι $\beta = -\frac{6}{7}$.
Συνεπώς,

$$(B\Gamma): y = -\frac{2}{7}x - \frac{6}{7} \Leftrightarrow (B\Gamma): 2x + 7y = -6.$$



15. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου H του τριγώνου ΑΒΓ, όταν $A(0,3)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(2,-2)$.

Απάντηση

Υπενθύμιση: Ορθόκεντρο λέγεται το σημείο τομής των υψών του τριγώνου.

$A(0,3)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(2,-2)$.
Έχουμε

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{1-0}=-3,\qquad \lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{-2-0}{2-1}=-2$$

$$(A\Delta)\perp(B\Gamma)\Rightarrow \lambda_{A\Delta}\lambda_{B\Gamma}=-1\Rightarrow \lambda_{A\Delta}=\frac{1}{2}$$

και άρα $(A\Delta): y=\frac{1}{2}x+\beta$.
Αλλά το σημείο $A(0,3)$ ανήκει στο ύψος $(A\Delta)$ και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι $\beta=3$.
Συνεπώς,

$$(A\Delta): y=\frac{1}{2}x+3$$

$$(\Gamma Z)\perp(AB)\Rightarrow \lambda_{\Gamma Z}\lambda_{AB}=-1\Rightarrow \lambda_{\Gamma Z}=\frac{1}{3}$$

και άρα $(\Gamma Z): y=\frac{1}{3}x+\beta$. Αλλά το σημείο $\Gamma(2,-2)$ ανήκει στο ύψος (ΓZ) και αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε ότι $\beta=-\frac{8}{3}$.
Συνεπώς,

$$(A\Delta): y=\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δυο ευθειών που βρήκαμε, λαμβάνουμε ότι αυτές τέμνονται στο σημείο με συντεταγμένες $\boxed{\boldsymbol{H(-34,14)}}$ στο οποίο βρίσκεται και το βαρύκεντρο του τριγώνου.

16. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1): y=2x-1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι:

(α) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων

(β) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Απάντηση

(α) **Συμμετρική ως προς τον άξονα των τετμημένων (x′x)**
Η συμμετρία ως προς τον άξονα x αλλάζει το y σε $-y$.
Άρα:

$$-y=2x-1\ \Rightarrow\ y=-2x+1$$

Άρα, η εξίσωση της συμμετρικής ευθείας είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{y=-2x+1}}$$

(β) **Συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων (y′y)**
Η συμμετρία ως προς τον άξονα y αλλάζει το x σε $-x$.
Άρα:

$$y=2(-x)-1=-2x-1$$

Άρα, η εξίσωση της συμμετρικής ευθείας είναι:

$$\boxed{\boldsymbol{y = -2x - 1}}$$

17. Δίνεται το σημείο $A(1,4)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 2x + 4y = 3$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του συμμετρικού σημείου του A ως προς την ευθεία (ε).

Απάντηση

Κατ' αρχάς το σημείο $A(1,4)$ δεν ανήκει στην ευθεία (ε), αφού οι συντεταγμένες του δεν ικανοποιούν την εξίσωση.
Το $A(1,4)$ και το συμμετρικό του A' ισαπέχουν από την ευθεία (ε). Βρίσκουμε λοιπόν την εξίσωση του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος AA' στην (ε):
Έχουμε

$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Είναι

$$(AA') \perp (\varepsilon) \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AA'} = -1 \Rightarrow \lambda_{AA'} = 2.$$

Έτσι,

$$(AA'): y - y_{A'} = \lambda_{AA'}(x - x_{A'}) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 1) \Rightarrow (AA'): 2x - y = -2$$

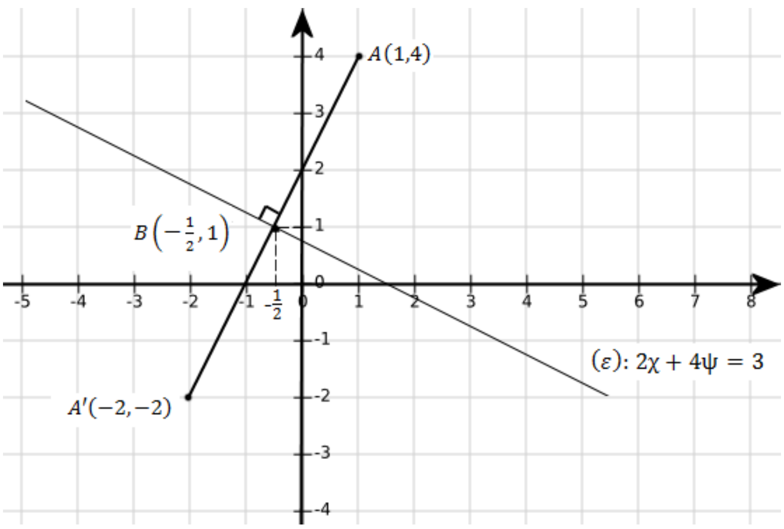
Έστω B το σημείο τομής των (ε) και (AA'). Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού βρίσκονται λύνοντας το σύστημα των δύο ευθειών:

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ -2x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow y = 1$$

$2x + 4y = 3 \overset{y=1}{\Longrightarrow} x = -\frac{1}{2}$. Άρα, $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Όμως, το $B\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι το μέσο του AA' και άρα

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = -2 \text{ και } y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = -2$$

Συνεπώς, $\boxed{\boldsymbol{A'(-2,-2)}}$.



5.3 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

Πρόταση

Η εξίσωση της μορφής $Ax + By + \Gamma = 0$ με τα A και B όχι ταυτόχρονα μηδέν, παριστάνει ευθεία, η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης (κλίση) $\lambda = -\frac{A}{B}$ αν $B \neq 0$ και άπειρη κλίση αν $B = 0$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε ως δεδομένο ότι η εξίσωση ευθείας με κλίση λ είναι η $y = \lambda x + \beta$.

• Αν $B \neq 0$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται (διαίρεση με το B):

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}, \quad B \neq 0,$$

η οποία παριστάνει ευθεία με κλίση

$$\lambda = -\frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

• Αν $B = 0$, τότε $A \neq 0$ και η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ γράφεται

$$x = -\frac{\Gamma}{A}, \quad A \neq 0,$$

η οποία μάλιστα παριστάνει ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων. ■

📌 **Σημείωση**

1. Αν $A \neq 0$ και $B \neq 0$, τότε η ευθεία δεν είναι παράλληλη με κανέναν από τους δύο άξονες συντεταγμένων, ενώ αν $A = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων, γιατί η εξίσωσή της είναι

$$y = -\frac{\Gamma}{B}$$

και έχει κλίση $\lambda = 0$.

Αν $A = B = 0$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ γίνεται $\Gamma = 0$.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

• $\Gamma \neq 0$. Η εξίσωση γίνεται: $\Gamma = 0$ η οποία είναι μια ψευδής πρόταση. Άρα, η εξίσωση δεν έχει καμία λύση και δεν παριστάνει καμία γεωμετρική μορφή στο επίπεδο:

«Η εξίσωση είναι αδύνατη και δεν παριστάνει καμία γραφική παράσταση.»

• $\Gamma = 0$. Η εξίσωση γίνεται: $0 = 0$ η οποία είναι αληθής για όλα τα σημεία (x, y) του επιπέδου. Δηλαδή, το σύνολο λύσεων είναι όλο το επίπεδο:

«Η εξίσωση είναι ταυτοτική και παριστάνει όλο το επίπεδο.»

Πρόταση

Αν οι ευθείες με εξισώσεις

$(\varepsilon_1): A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0,\ \ (\varepsilon_2): A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0,\ \ (\varepsilon_3): A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$

έχουν **κοινό σημείο** (συντρέχουν), τότε ισχύει:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη

Έστω ότι οι τρεις ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3)$ συντρέχουν, δηλαδή περνούν από κοινό σημείο, έστω το $P(x_0, y_0)$. Τότε, το σημείο αυτό επαληθεύει τις εξισώσεις τους:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1 = 0$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2 = 0$$

$$A_3x_0 + B_3y_0 + \Gamma_3 = 0.$$

Φτιάχνω δύο εξισώσεις που δεν έχουν τον όρο Γ:

Πολλαπλασιάζω την 1η εξίσωση με A_2 και τη 2η με A_1 και τις αφαιρώ:

$$A_2(A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1) - A_1(A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow A_2A_1x_0 + A_2B_1y_0 + A_2\Gamma_1 - A_1A_2x_0 - A_1B_2y_0 - B_2y_0\Gamma_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A_2B_1y_0 + A_2\Gamma_1 - A_1B_2y_0 - B_2y_0\Gamma_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A_2B_1 - A_1B_2)\, y_0 + (A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{(A_2B_1 - A_1B_2)\, y_0 = -(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2)}. \qquad \textbf{(1)}$$

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζω την 1η εξίσωση με A_3 και την 3η με A_1 και και τις αφαιρώ:

$$A_3(A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1) - A_1(A_3x_0 + B_3y_0 + \Gamma_3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (A_3B_1 - A_1B_3)\, y_0 + (A_3\Gamma_1 - A_1\Gamma_3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{(A_3B_1 - A_1B_3)\, y_0 = -(A_3\Gamma_1 - A_1\Gamma_3)}. \qquad \textbf{(2)}$$

Απαλείφω το y_0: από τις (1), (2) το ίδιο y_0 ικανοποιεί και τις δύο. Πολλαπλασιάζω:

- την (1) με $(A_3B_1 - A_1B_3)$
- την (2) με $(A_2B_1 - A_1B_2)$

και αφαιρώ, ώστε να φύγει το y_0:

$$(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2)(A_3B_1 - A_1B_3) - (A_3\Gamma_1 - A_1\Gamma_3)(A_2B_1 - A_1B_2) = 0.$$

Αναπτύσσω και ομαδοποιώ:

$$A_1(B_2\Gamma_3 - B_3\Gamma_2) \ - \ B_1(A_2\Gamma_3 - A_3\Gamma_2) \ + \ \Gamma_1(A_2B_3 - A_3B_2) = 0$$

(ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή)

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare$$

Σημείωση – Ισχύει το αντίστροφο του πιο πάνω;

Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως σιωπηλά αφήνει να εννοηθεί το σχολικό βιβλίο στα παραδείγματά του. Ένα απλό αντι-παράδειγμα είναι το εξής:
Έστω οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): x+y+1=0$$
$$(\varepsilon_2): 2x+2y+2=0$$
$$(\varepsilon_3): x+y+2=0$$

Ο πίνακας (των συντελεστών του συστήματος των 3 αυτών εξισώσεων) είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{1η γραμμή}}{=} +1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(2\cdot 2-1\cdot 2)-(2\cdot 2-1\cdot 2)+(2\cdot 1-1\cdot 2)$$

$$=(4-2)-(4-2)+(2-2)=0$$

Όμως, οι ευθείες αυτές δεν συντρέχουν, αφού $(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ (έχουν ίσες κλίσεις), αλλά η (ε_3) τέμνει τις δύο αυτές ευθείες. Αυτό δεν είναι τυχαίο, όπως θα δούμε.

Αντιμετωπίζουμε το σύστημα των 3 ευθειών ως ένα 2x3 (3 εξισώσεων με 2 αγνώστους) μη ομογενές σύστημα:

$$A_1x_0+B_1y_0=\Gamma_1$$

$$A_2x_0+B_2y_0=\Gamma_2$$

$$A_3x_0+B_3y_0=\Gamma_3.$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο 3x2 πίνακας

$$N=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας ο

$$M=\left(\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{array}\right)$$

Αν $\det(M)=0$, τότε $\operatorname{rank}(M)\le 2$ και ισχύει μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $\operatorname{rank}(N)=1$ (οι πρώτες δύο στήλες γραμμικά εξαρτημένες)
   $\Leftrightarrow$ όλες οι ευθείες έχουν την ίδια διεύθυνση (παράλληλες ή μερικώς/ολικώς συμπίπτουσες).
   Ειδικότερα:
   - αν $\operatorname{rank}(M)=2>\operatorname{rank}(N)=1 \Rightarrow$ το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση) $\Rightarrow$ παράλληλες διακριτές (ή δύο συμπίπτουν και η τρίτη παράλληλη),
   - αν $\operatorname{rank}(M)=\operatorname{rank}(N)=1 \Rightarrow$ άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ όλες οι ευθείες συμπίπτουν.

2. $\text{rank}\,(M) = \text{rank}\,(N) = 2$
   ⟺ η τρίτη στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων
   ⟺ το σύστημα έχει μοναδική λύση
   ⟺ οι ευθείες συντρέχουν.
3. $\text{rank}\,(M) = 3$
   ⟺ οι γραμμές του M είναι γραμμικά ανεξάρτητες
   ⟺ το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση)
   ⟺ κάθε ζεύγος ευθειών τέμνεται, αλλά τα τρία σημεία τομής είναι διαφορετικά
   ⟺ οι ευθείες βρίσκονται σε γενική θέση.

Παράδειγμα για κάθε περίπτωση

1. $\text{rank}(M) = 2,\ \text{rank}(N) = 1$-**Παράλληλες (ασύμβατο σύστημα - καμία λύση)**

$$(\varepsilon_1): x + y = 1$$
$$(\varepsilon_2): 2x + 2y = 3$$
$$(\varepsilon_3): 3x + 3y = -1$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας ο

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(η δεύτερη γραμμή δίνει άτοπο->0=1)

- Το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση)

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Οι ευθείες έχουν ίδια διεύθυνση
- Καμία δεν συμπίπτει με άλλη
- Καμία κοινή λύση

2. $\text{rank}(M) = \text{rank}(N) = 1$-**Όλες οι ευθείες συμπίπτουν (άπειρες λύσεις)**

$$(\varepsilon_1): x + y = 1$$
$$(\varepsilon_2): 2x + 2y = 2$$
$$(\varepsilon_3): -x - y = -1$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας ο

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις (όλα τα σημεία της ίδιας ευθείας)

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Οι ευθείες είναι πολλαπλάσια της ίδιας εξίσωσης

3. $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N) = 2$-**Συντρέχουσες ευθείες (μοναδική λύση)**

$$(\varepsilon_1): x + y = -1$$
$$(\varepsilon_2): x - y = 0$$
$$(\varepsilon_3): 2x + 0y = -1$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας ο

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Οι ευθείες περνούν από ένα σημείο, το $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

4. $\mathrm{rank}(M) = 3$- **Οι ευθείες τέμνονται ανά δύο (ασύμβατο σύστημα - καμία λύση)**

$$(\varepsilon_1): x + y = -1$$
$$(\varepsilon_2): x - y = 0$$
$$(\varepsilon_3): y = -2$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο

$$N=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

και ο επαυξημένος πίνακας ο

$$M=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{array}\right)$$

ο οποίος είναι γραμμοισοδύναμος με τον

$$M'=\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

(η τρίτη γραμμή δίνει άτοπο->0=1)

- Το σύστημα είναι ασύμβατο (δεν έχει λύση)

Γεωμετρική ερμηνεία:

- Οι ευθείες τέμνονται ανά δύο

Σημείωση – *διδακτικής ακρίβειας:*

Από τα πιο πάνω, το αντίστροφο της Πρότασης δεν ισχύει. Αν όμως, υποθέσουμε **επιπλέον** ότι $\mathrm{rank}(M)=\mathrm{rank}(N)=2$, τότε ισχύει, δηλαδή οι ευθείες συντρέχουν. Ουσιαστικά, αρκεί η επιπλέον υπόθεση (εκτός από το αποτέλεσμα της 3x3 ορίζουσας να είναι =0), δύο τουλάχιστον από τις ευθείες να τέμνονται. Ισοδύναμα, όπως αποδεικνύεται στη Γραμμική άλγεβρα, μια τουλάχιστον από τις 2x2 υποορίζουσες

$$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_3 & B_3\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix}$$

είναι μη μηδενική.

Στην πράξη, οι μαθητές, αρκεί να βρουν ότι η 3x3 ορίζουσα =0 και 2 ευθείες που να μην είναι παράλληλες.

Το σχολικό βιβλίο υποθέτει σιωπηρά ότι ισχύει το αντίστροφο, χωρίς τον πιο πάνω έλεγχο. Αυτό μπορεί να είναι παιδαγωγικά σωστό, αλλά δημιουργεί λανθασμένες εντυπώσεις και χάνεται η Γεωμετρία πίσω από το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1): x+y+2=0$, $(\varepsilon_2): x-y+4=0$ και $(\varepsilon_3): 2x-3y+9=0$ συντρέχουν.

Απόδειξη

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 4\\ 2 & -3 & 9\end{pmatrix}$$

Τότε:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} \underset{1\eta \text{ γραμμή}}{=} +1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1 \cdot 9 - (-3) \cdot 4) - (1 \cdot 9 - 4 \cdot 2) - 2\big(1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1)\big)$$

$$= (-9 + 12) - (9 - 8) + 2(-3 + 2) = 3 - 1 - 2 = 0$$

και παρατηρούμε ότι $\lambda_{\varepsilon_1} = -1 \neq 1 = \lambda_{\varepsilon_2} \Rightarrow$ οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) δεν είναι παράλληλες.

Άρα, οι 3 αυτές ευθείες συντρέχουν.

Παρατήρηση

Η εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + \Gamma = 0$$

παριστάνει ευθεία στο επίπεδο αν και μόνο αν δεν ισχύει ταυτόχρονα $A = 0$ και $B = 0$.
Πιο αναλυτικά:

- Αν $A \neq 0$και $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

  $$y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B},$$

  (αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με το $B \neq 0$)

- Αν $A \neq 0$ και $B = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

  $$x = -\frac{\Gamma}{A},$$

  (αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με το $A \neq 0$) η οποία είναι κατακόρυφη ευθεία.

- Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

  $$y = -\frac{\Gamma}{B},$$

  (αφού μπορούμε να διαιρέσουμε με το $B \neq 0$) η οποία είναι οριζόντια ευθεία.

- Αν $A = 0$ και $B = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται: $\Gamma = 0$.
  - Αν $\Gamma = 0$, παριστάνει όλο το επίπεδο.
  - Αν $\Gamma \neq 0$, δεν παριστάνει καμία γεωμετρική γραμμή.

Συνεπώς, η εξίσωση $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0}$ παριστάνει ευθεία αν και μόνο αν

$$\boldsymbol{A^2 + B^2 \neq 0},$$

δηλαδή αν και μόνο αν αν δεν ισχύει ταυτόχρονα $\boldsymbol{A = 0}$ και $\boldsymbol{B = 0}$.

Παρατήρηση

Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ με $A^2+B^2\neq 0$, περνά από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow \Gamma=0$.

Εφαρμογή

Η εξίσωση της ευθείας που έχει τετμημένη επί την αρχή των αξόνων ίση με $\alpha\neq 0$ και έχει τεταγμένη επί την αρχή των αξόνων ίση με $\beta\neq 0$ είναι

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

Απόδειξη

Έστω (ε): $Ax+By+\Gamma$=0 η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας. Τότε,

$$(0,\beta)\in(\varepsilon)\Rightarrow B=-\frac{\Gamma}{\beta},\Rightarrow(\varepsilon): Ax-\frac{\Gamma}{B}y+\Gamma=0$$

Επίσης,

$$(\alpha,0)\in(\varepsilon)\Rightarrow A=-\frac{\Gamma}{\alpha}\Rightarrow(\varepsilon): -\frac{\Gamma}{\alpha}x-\frac{\Gamma}{\beta}y+\Gamma=0$$

Έτσι, η ευθεία παίρνει τη μορφή

$$(\varepsilon): \frac{\Gamma}{\alpha}x+\frac{\Gamma}{\beta}y=\Gamma$$

Αφού $\alpha,\beta\neq 0$, έχουμε ότι η ευθεία δεν περνά από την αρχή των αξόνων. Έτσι, $\Gamma\neq 0$ και τότε διαιρώντας και τα 2 μέλη της πιο πάνω εξίσωσης με Γ, παίρνουμε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$$

ή (ισοδύναμα) $\beta x+\alpha y-\alpha\beta=0.$ Δηλ. $A=\beta, B=\alpha$ και $\Gamma=-\alpha\beta$. □

Παράδειγμα

Έστω η εξίσωση $2x-3y+1=0$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία με κλίση $\lambda=-\frac{2}{3}$ η οποία περνά από τα σημεία $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ και $\left(-\frac{1}{2},0\right)$. Επίσης,

$$2x-3y+1=0\Leftrightarrow\frac{x}{3}-\frac{y}{2}-6=0\Leftrightarrow\frac{x}{1/3}+\frac{y}{-1/2}=1$$

Δραστηριότητες σελ. 31-32 (Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας)

1. Να υπολογίσετε την κλίση των πιο κάτω ευθειών:

(α) $x-3y+2=0$

(β) $y=8-x$

(γ) $y=4$

(δ) $x=-1$

<u>Απάντηση</u>

(α) $(\varepsilon): x-3y+2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$

(β) $(\varepsilon): y=8-x \Leftrightarrow x+y-8=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{1}=-1$

(γ) $y=4 \Rightarrow \lambda=0,$

(δ) $x=-1 \Rightarrow$ η κλίση δεν ορίζεται, αφού η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων.

2. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y=-x+2$ και $(\varepsilon_2): 5x-3y+7=0$.

(α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις τους.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας (ε_1) με τους άξονες των συντεταγμένων.

<u>Απάντηση</u>

(α) $(\varepsilon_1): y=-x+2 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y+x-2=0$ και $(\varepsilon_2): 5x-3y+7=0$.
Άρα,
$\lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{1}{1}=-1$ και $\lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{5}{-3}=\frac{5}{3}$.

(β) $\begin{cases}(\varepsilon_1): y=-x+2\\ x=0\end{cases} \Rightarrow y=2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \begin{cases}(\varepsilon_1): y=-x+2\\ y=0\end{cases} \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow$ *σημεία τομής με τους άξονες:* $(0,2)$ $\kappa\alpha\iota$ $(2,0)$

3. Η ευθεία με εξίσωση $2x-\alpha y+8=0$, $\alpha\neq 0$, έχει κλίση $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την τιμή του α.

<u>Απάντηση</u>

$2x-\alpha y+8=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{-\alpha}=\frac{2}{\alpha}$ και αρα $\lambda=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha}=\frac{5}{2}}$.

4. Να δείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις (ε_1): 5x − 7y = −1, (ε_2): x + 2y − 10 = 0 και (ε_3): x + y = 7 διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απάντηση

(Υπενθύμιση: Αν η ορίζουσα είναι 0 **και** τουλάχιστον ένα ζεύγος ευθειών τέμνεται, τότε η τρίτη διέρχεται από το σημείο τομής των δύο πρώτων ⇒ συντρέχουν).

$(\varepsilon_1): 5x - 7y + 1 = 0$ $(\varepsilon_2): x + 2y - 10 = 0$ $(\varepsilon_3): x + y + 7 = 0$. Είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & -10 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix}$$

(π.χ. ως προς την πρώτη στήλη)

$$= 5\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5\cdot(-4) - 48 + 68 = 0$$

Αυτό όμως δεν εγγυάται ότι οι ευθείες συντρέχουν. Δείχνουμε επιπλέον ότι δύο από αυτές δεν είναι παράλληλες, π.χ. οι (ε_2): x + 2y − 10 = 0 και (ε_3): x + y = 7, αφού $\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{1}{2} \neq -1 = \lambda_{\varepsilon_3}$ και άρα δεν είναι παράλληλες, άρα τέμνονται.

Άρα, οι ευθείες συντρέχουν (διέρχονται από το ίδιο σημείο).

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών (ε_1): y = 2x − 7 και (ε_2): y = 4x – 13 και είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε_3): y = −3x + 1.

Απάντηση

Εύρεση σημείου τομής P των ευθειών (ε_1): $\boldsymbol{y = 2x - 7}$ και (ε_2): $\boldsymbol{y = 4x - 13}$:

Εξισώνω:

$$2x - 7 = 4x - 13 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3,\ y = 2\cdot 3 - 7 = -1.$$

Άρα $P(3,-1)$.

(ε_3): $y = -3x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_3} = -3$.

Έτσι,

$$y - y_P = \lambda_\varepsilon(x - x_P) \Leftrightarrow y + 1 = -3(x-3) \Leftrightarrow y + 1 = -3x + 9$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{3x + y - 8 = 0}}$$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από την τομή των ευθειών x + 2y − 5 = 0 και x − y + 5 = 0 και είναι κάθετη στην ευθεία 2x + 4y + 7 = 0.

Απάντηση

$$(\varepsilon_3): 2x + 4y + 7 = 0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_3} = -\frac{1}{2}.$$

Εύρεση σημείου τομής των ευθειών $\boldsymbol{(\varepsilon_1): x + 2y - 5 = 0}$ και $\boldsymbol{(\varepsilon_2): x - y = 5}$:

$$\begin{cases} x+2y-5=0 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-5=0 \\ x=5+y \end{cases} \Leftrightarrow 5+y+2y-5=0 \Leftrightarrow y=0$$

και

$$\begin{cases} x-y=5 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5.$$

Άρα το σημείο τομής είναι το $A(5,0)$.

Εύρεση της κλίσης της ευθείας (ε):

$$(\varepsilon)\perp(\varepsilon_3) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_3}=-1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\lambda_\varepsilon=-1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_\varepsilon=2}.$$

Έτσι,

$$y-y_A=\lambda_\varepsilon(x-x_A) \Leftrightarrow y-0=2(x-5) \Leftrightarrow y=2x-10$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{2x-y+10=0}}$$

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται το σημείο τομής των ευθειών 2x + y − 2 = 0, x − 5y − 23 = 0 και από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου Α(5, −6) και Β(−1, −4).

<u>Απάντηση</u>

Σημείο τομής των ευθειών $(\boldsymbol{\varepsilon_1}): \mathbf{2x+y-2=0}$ και $(\boldsymbol{\varepsilon_2}): \mathbf{x-5y-23=0}$:

$$\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-5y-23=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x=5y+23 \end{cases} \Leftrightarrow 2(5y+23)+y-2=0$$

$$\Leftrightarrow 11y=-44 \Leftrightarrow y=-4$$

και

$$\begin{cases} x=5y+23 \\ y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Άρα το σημείο τομής είναι το $\Gamma(3,-4)$.

Αν $A(5,-6)$ και Β$(-1,-4)$, τότε οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος (AB) δίνονται από τις

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{5-1}{2}=2, \qquad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-6-4}{2}=-5$$

$\Rightarrow M(2,-5)$.

Εύρεση κλίσης της ευθείας (η οποία περνά από τα σημεία $\boldsymbol{\Gamma}$ και $\boldsymbol{M}$)

$$\lambda_\varepsilon=\frac{y_M-y_\Gamma}{x_M-x_\Gamma}=\frac{-5-(-4)}{2-3}=\frac{-5+4}{-1}=1$$

Έτσι,

$$y-y_M=\lambda_\varepsilon(x-x_M) \Leftrightarrow y+5=x-2 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \mathbf{x-y-7=0}}$$

8. Οι πλευρές ενός τριγώνου ανήκουν στις ευθείες (ε_1): $x - y + 1 = 0$, (ε_2): $x - 2y + 4 = 0$ και (ε_3): $9x - 3y + 1 = 0$.
Να δείξετε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο Η(−1, 4).

<u>Απάντηση</u>

Το ορθόκεντρο είναι το κοινό σημείο 2 υψών.
Θα δείξω ότι:

- Η ευθεία από την κορυφή A (τομή (ε_2),(ε_3)) και κάθετη στην πλευρά (ε_1) διέρχεται από το H.
- Η ευθεία από την κορυφή B(τομή (ε_1), (ε_3)) και κάθετη στην πλευρά (ε_2) διέρχεται από το H.

Εύρεση κορυφών του τριγώνου
A: Τομή των (ε_2),(ε_3)
(ε_2): $x = 2y - 4$.
Αντικαθιστώ στην εξίσωση της (ε_3):

$$9(2y-4) - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 18y - 36 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 15y - 35 = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}.$$

Άρα: $x = 2 \cdot \frac{7}{3} - 4 = \frac{14}{3} - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}$.
Συνεπώς, $A\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

B: Τομή των (ε_1),(ε_3)
(ε_1): $x = y - 1$.
Αντικαθιστώ στην εξίσωση της (ε_3):

$$9(y-1) - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 9y - 9 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 6y - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.$$

Άρα: $x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$.
Συνεπώς, $B\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Γ: Τομή των (ε_1),(ε_2)
(ε_1): $x = y - 1$. Αντικαθιστώ στην εξίσωση της (ε_2):

$$(y-1) - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -y + 3 = 0 \Rightarrow y = 3.$$

Άρα: $x = 2$.
Συνεπώς, $\Gamma(2,3)$.

Εύρεση κλίσεων των πλευρών (των ευθειών)
(ε_1): $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = 1$.
(ε_2): $x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{1}{2}$.

Εύρεση εξίσωσης ύψους από το Α (κάθετο στην (ε_1))
Κάθετο σε κλίση 1 $\Rightarrow \lambda = -1$.
Το ύψος περνά από το $A(\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$:
$y - \frac{7}{3} = -1\left(x - \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \boldsymbol{y = -x + 3}$.

Εύρεση εξίσωσης ύψους από το Β (κάθετο στην (ε_2))
Κάθετο σε κλίση $\frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = -2$.
Το ύψος περνά από το $B(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$:
$y - \frac{4}{3} = -2\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \boldsymbol{y = -2x + 2}$.

Λύνω σύστημα με τις εξισώσεις των δύο υψών:

$$\boldsymbol{y=-x+3,\ \ y=-2x+2\ \Leftrightarrow -x+3=-2x+2 \Leftrightarrow x=-1}$$

και

$$\boldsymbol{y=-(-1)+3=4}$$

Άρα το ορθόκεντρο είναι το σημείο $\boxed{\boldsymbol{H(-1,4)}}$.

9. Δίνεται η εξίσωση $(\varepsilon)\colon (\mu^2-1)x+(\mu+1)y+2\mu=0$.

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ.

(β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon)\parallel$ x΄x.

(γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε $(\varepsilon)\parallel$ y΄y.

(δ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) την τιμή του μ, ώστε η ευθεία (ε) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

<u>Απάντηση</u>

$(\varepsilon)\colon (\mu^2-1)x+(\mu+1)y+2\mu=0$

(α) Η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία για εκείνες τις τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι συντελεστές του x και του y στην εξίσωση της ευθείας δεν είναι **ταυτόχρονα** ίσοι με 0:

$$\mu^2-1=0 \Leftrightarrow (\mu-1)(\mu+1)=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu=-1},\qquad \boldsymbol{1}$$

και

$$\mu+1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu=-1}$$

Η κοινή λύση των πιο πάνω είναι η $\boldsymbol{\mu=-1}$ και για την τιμή αυτή, η εξίσωση γίνεται $2\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow 2=0$, η οποία είναι μια ψευδής πρόταση. Άρα, στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση δεν έχει καμία λύση και δεν παριστάνει καμία γεωμετρική μορφή στο επίπεδο.

Συνεπώς, για $\boldsymbol{\mu\neq-1}$, η εξίσωση (ε) παριστάνει ευθεία.

(β) $(\varepsilon)\parallel$ x΄x $\Leftrightarrow$ η (ε) είναι της μορφής $y=\alpha$, δηλαδή $\Leftrightarrow$ ο συντελεστής του x είναι =0 και ο συντελεστής του $y\neq0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\mu=-1},\quad \boldsymbol{1} \\ \\ \boldsymbol{\mu\neq-1} \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu=1}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Για $\boldsymbol{\mu=1}$, η εξίσωση της ευθείας γίνεται:

$$(\varepsilon)\colon 2y+2=0 \Leftrightarrow (\varepsilon)\colon y=-1$$

(γ) $(\varepsilon)\parallel$ y΄y $\Leftrightarrow$ η (ε) είναι της μορφής $x=\alpha$, δηλαδή $\Leftrightarrow$ ο συντελεστής του y είναι =0 και ο συντελεστής του $x\neq0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\mu \neq -1}, & \mathbf{1} \\ \\ & \boldsymbol{\mu = -1} \end{cases}$$

Οι πιο πάνω δεν συναληθεύουν. Άρα, δεν υπάρχει τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία $(\varepsilon)\parallel$ y΄y.

(δ) Η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων ⇔ το σημείο $(x, y) = (0,0)$ ικανοποιεί την εξίσωσή της

$\Leftrightarrow (\mu^2 - 1)0 + (\mu + 1)0 + 2\mu = 0 \Leftrightarrow 2\mu = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu = 0}$.

Παρατήρηση:

Αν $\mu \neq \pm 1$, τότε:

$$(\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{(\mu - 1)(\mu + 1)}{(\mu + 1)}x + \frac{(\mu + 1)}{\mu + 1}y + \frac{2\mu}{\mu + 1} = 0 \Leftrightarrow (\mu - 1)x + y + \frac{2\mu}{\mu + 1} = 0$$

η οποία είναι εξίσωση ευθείας με κλίση $\lambda = 1 - \mu$.

10. Δίνονται τα σημεία $A(-1,1), B(4,-1)$ και $\Gamma(6,4)$.

(α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $AB\Gamma$ είναι ορθή.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Απάντηση

(α) $$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 1}{4 + 1} = -\frac{2}{5}, \qquad \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{4 + 1}{6 - 4} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow (AB) \perp (B\Gamma)$.

Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^o$)

(β) Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το περίκεντρο.
Το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 0$$

Το μέσο N του $B\Gamma$ έχει συντεταγμένες:

$$x_N = \frac{x_\Gamma + x_B}{2} = 5 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; y_N = \frac{y_\Gamma + y_B}{2} = \frac{3}{2}$$

Το μέσο Ξ του $A\Gamma$ έχει συντεταγμένες:

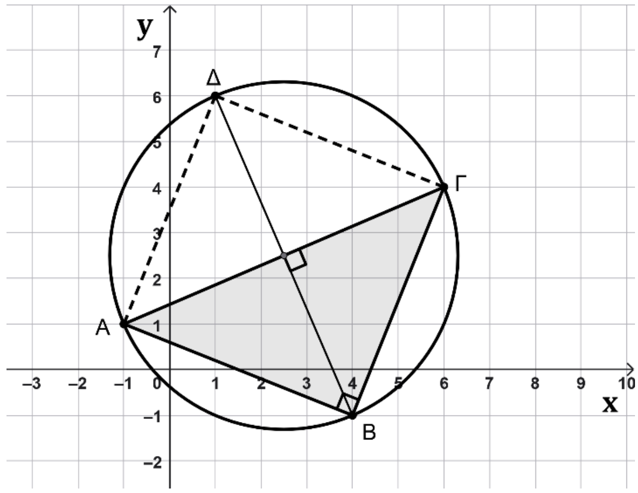
$$x_\Xi = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} = \frac{5}{2} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; y_\Xi = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} = \frac{5}{2}$$

Από γνωστή πρόταση στο ορθογώνιο τρίγωνο, το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το μέσο της υποτείνουσας, δηλαδή $\Xi\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
Διαφορετικά, με χρήση συντεταγμένων (μέσο της υποτείνουσας $A\Gamma$):

$$\varXi\left(\frac{-1+6}{2},\frac{1+4}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right).$$

(γ) Στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$:

$$Δ=Α+Γ-Β \Rightarrow Δ=(-1,1)+(6,4)-(4,-1)=(1,6).$$



11. Οι εξισώσεις $2x-y+3=0$ και $x-2y+3=0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών $ΑΒ$ και $ΒΓ$ ενός παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$, αντίστοιχα. Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $Ε(2,4)$:

(α) να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

(β) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ είναι ρόμβος.

Απάντηση

(α) Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών $(ΑΒ)$ και $(ΒΓ)$ βρίσκουμε (το σημείο τομής τους) $\boldsymbol{Β(-1,1)}$.

Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Συνεπώς

$$x_E=\frac{x_Δ+x_B}{2}\Rightarrow 2=\frac{x_A-1}{2}\Rightarrow x_A=5$$

$$y_E=\frac{y_Δ+y_B}{2}\Rightarrow 4=\frac{y_Δ+1}{2}\Rightarrow y_Δ=7$$

και άρα $\boldsymbol{Δ(5,7)}$.

Θα βρούμε την εξίσωση της $(ΔΓ)$.
Έστω $(ΔΓ): y=αx+β$. Τότε,

$$(ΑΒ)\parallel(ΓΔ)\Rightarrow λ_{ΓΔ}=λ_{ΑΒ}\Rightarrow λ_{ΓΔ}=2$$

και άρα $(ΔΓ): y=2x+β$.
Αλλά, $\boldsymbol{Δ(5,7)}\in(ΔΓ)$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωσή της, έχουμε ότι $β=-3$. Συνεπώς,

$$(ΔΓ): y=2x-3.$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών $(ΒΓ)$ και $(ΔΓ)$ βρίσκω το σημείο τομής τους, το $\boldsymbol{Γ}(\mathbf{3},\mathbf{3})$.

Τέλος, για το σημείο A,

$$x_E = \frac{x_A + x_Γ}{2} \Rightarrow 2 = \frac{x_A + 3}{2} \Rightarrow x_A = 1$$

$$y_E = \frac{y_A + y_Γ}{2} \Rightarrow 4 = \frac{y_A + 3}{2} \Rightarrow y_A = 5$$

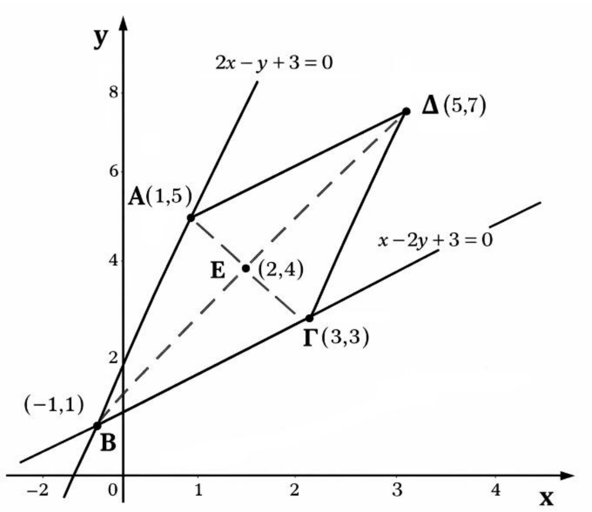
και άρα $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{5})$.

(β) Έχουμε:

$$λ_{ΒΔ} = \frac{y_Δ - y_B}{x_Δ - x_B} = \frac{7-1}{5+1} = 1 \quad \text{και} \quad λ_{ΑΓ} = \frac{y_Γ - y_A}{x_Γ - x_A} = \frac{3-5}{3-1} = -1$$

$$\Rightarrow λ_{ΒΔ} \cdot λ_{ΑΓ} = -1 \Rightarrow (ΒΔ) \perp ΑΓ$$

⇒**οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα**.
⇒το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.



12. Οι ευθείες με εξισώσεις $(ε_1): 3x - 4y + 1 = 0$ και $(ε_2): 2x - y - 1 = 0$ αποτελούν δύο πλευρές ενός παραλληλογράμμου. Αν το σημείο (6,6) είναι μία από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του.

<u>Απάντηση</u>

$(ε_1): 3x - 4y + 1 = 0 \qquad (ε_2): 2x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (ε_2): y = 2x - 1$

Εύρεση σημείου τομής των $(\boldsymbol{ε_1})$ και $(\boldsymbol{ε_2})$:
Αντικαθιστώ $(ε_2): y = 2x - 1$ στην $(ε_1)$:

$$3x - 4(2x-1) + 1 = 0 \Rightarrow -5x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1,\ y = 1.$$

Άρα $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{1})$ (κορυφή).

Δίνεται κορυφή $(6,6)$ η οποία **δεν ανήκει** στις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ (δεν επαληθεύει καμία από τις δυο αυτές εξισώσεις)⇒ είναι η **απέναντι** κορυφή $\boldsymbol{\Gamma(6,6)}$.

Είναι

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_A-y_\Gamma}{x_A-x_\Gamma}=\frac{1-6}{1-6}=1$$

και άρα η ευθεία με εξίσωση $\boxed{(\boldsymbol{\delta_1}): \boldsymbol{y=x}}$ είναι η μια από τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου (η $(A\Gamma)$):

$$(\boldsymbol{A\Gamma}): \boldsymbol{y=x}$$

Εύρεση της διαγωνίου $(\boldsymbol{B\Delta})$ (με παρόμοιο τρόπο):
Βρίσκω τις άλλες δύο κορυφές:

- Παράλληλη της (ε_1) από το Γ: $3x-4y+6=0$.
- Παράλληλη της (ε_2) από το Γ: $2x-y-6=0$.

Τομή (ε_1) με $2x-y-6=0$: $\boldsymbol{B(5,4)}$.
Τομή (ε_2) με $3x-4y+6=0$: $\boldsymbol{\Delta(2,3)}$.

$$\lambda_{B\Delta}=\frac{y_\Delta-y_B}{x_\Delta-x_B}=\frac{3-4}{2-5}=\frac{1}{3}.$$

Βρίσκω εύκολα ότι η εξίσωση της $(B\Delta)$ είναι η:

$$(B\Delta): y=\frac{7}{3}x-\frac{7}{3} \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{B\Delta}): \boldsymbol{x-3y+7=0}}.$$

13. Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει κορυφή $\Gamma(-6,3)$ και η εξίσωση μίας διαγωνίου του είναι $y=7x-5$. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής του A.

<u>Απάντηση</u>

Εύκολα βλέπω ότι το σημείο $\Gamma(-6,3)$ δεν ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): y=7x-5$.
Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το A.

Εύρεση της εξίσωση της διαγωνίου $\boldsymbol{A\Gamma}$:

$$(A\Gamma)\perp(\Gamma\Delta) \Rightarrow \lambda_{A\Gamma}\cdot\underbrace{\lambda_{\Gamma\Delta}}_{7}=-1 \Rightarrow \lambda_{A\Gamma}=-\frac{1}{7}.$$

Έτσι, $(A\Gamma): y=-\frac{x}{7}+\beta$.

Το σημείο $\Gamma(-6,3)$ ανήκει στην ευθεία αυτή και αντικαθιστώντας βρίσκωε ότι $\beta=\frac{15}{7} \Rightarrow (A\Gamma): y=-\frac{x}{7}+\frac{15}{7}$.
Αντικαθιστώντας το σημείο A στην εξίσωση αυτή: $\boldsymbol{7y_A+x_A=15}$.

Εύκολα βρίσκω το σημείο τομής των $(A\Gamma)$ και (ε) (δηλ. των διαγωνίων): είναι το $(1,2)$. Αυτό είναι και το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $(A\Gamma)$. Έτσι,

$$1=\frac{x_A+x_\Gamma}{2} \Rightarrow 2=-6+x_A \Rightarrow x_A=8 \quad \kappa\alpha\iota \quad 2=\frac{y_A+y_\Gamma}{2} \Rightarrow 4=3+y_A \Rightarrow y_A=1$$

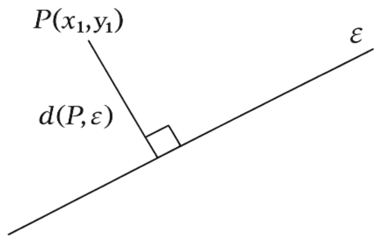
δηλαδή $\boxed{\boldsymbol{A(8,1)}}$.

5.4 Απόσταση σημείου από ευθεία-Εμβαδόν τριγώνου

Πρόταση (Απόσταση σημείου από ευθεία)

Η απόσταση $d(P,\varepsilon)$ σημείου $P(x_1,y_1)$ από ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$, $B\neq 0$, δίνεται από τον τύπο:

$$d(P,\varepsilon)=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$



Απόδειξη

Από το σημείο $P(x_1,y_1)$ φέρουμε κάθετη στην ευθεία (ε): $Ax+By+\Gamma=0$ στο σημείο K και κάθετη στον άξονα των τετμημένων, η οποία τέμνει την ευθεία στο σημείο E.

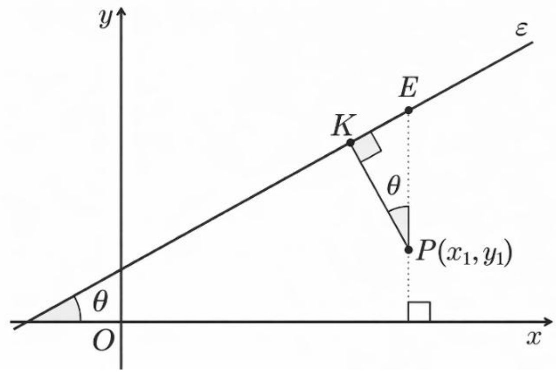
Από το ορθογώνιο τρίγωνο PKE έχουμε:

$$(PK)=d(P,\varepsilon)=(PE)\cdot \sigma\upsilon\nu\ \theta$$

Για το $\sigma\upsilon\nu\,\theta$ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\,\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A^2}{B^2}}}=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



Το σημείο E είναι το κοινό σημείο των ευθειών $x=x_1$ και $Ax+By+\Gamma=0$, δηλαδή:

$$E\left(x_1,\ \frac{-Ax_1-\Gamma}{B}\right)$$

Για το μήκος (PE) ισχύει:

$$(PE)=|y_E-y_P|=\left|\frac{-Ax_1-\Gamma}{B}-y_1\right|=\frac{|-Ax_1-\Gamma-By_1|}{|B|}=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}$$

Τελικά:

$$d(P,\varepsilon)=(PE)\cdot\sigma\upsilon\nu\,\theta=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{|B|}\cdot\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_1+By_1+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}\quad\blacksquare$$

Παρατηρήσεις

1. Η περίπτωση που η γωνία θ είναι αμβλεία γίνεται ανάλογα.

2. Στην περίπτωση που $(\varepsilon)\parallel xx'$, δηλ. (ε) της μορφής $y=\alpha$, τότε η απόσταση οποιουδήποτε σημείου $P(x_1,y_1)$ του επιπέδου από την ευθεία αυτή είναι $d(P,\varepsilon)=|y_1-\alpha|$.

3. Στην περίπτωση που $(\varepsilon)\parallel yy'$, δηλ. (ε) της μορφής $x=\alpha$, τότε η απόσταση οποιουδήποτε σημείου $P(x_1,y_1)$ του επιπέδου από την ευθεία αυτή είναι $d(P,\varepsilon)=|x_1-\alpha|$.

4. Το απόλυτο στον πιο πάνω τύπο δικαιολογείται από το γεγονός ότι η απόσταση πρέπει να είναι θετική (ή =0).

Παραδείγματα

1. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(3,1)$ από την ευθεία $(\varepsilon): 4x-3y+1=0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε

$$d(A,\varepsilon)=\frac{|4\cdot 3+(-3)\cdot 1+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|10|}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$$

2. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(1,1)$ από την ευθεία $(\varepsilon): x=3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(\varepsilon): x=3 \Leftrightarrow (\varepsilon): x-3=0$$

Έχουμε

$$d(A,\varepsilon)=\frac{|1\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+0^2}}=\frac{|-2|}{1}=2$$

Διαφορετικά, από την παρατήρηση 3.:

$$d(A,\varepsilon)=|1-3|=|-2|=2.$$

3. Να βρείτε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ όπου $A(3,-2), B(4,13)$ και $\Gamma(-1,1)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{1-13}{-1-4}=\frac{12}{5}$$

Άρα, $(B\Gamma): y-y_B=\lambda_{AB}(x-x_B)$, επομένως:

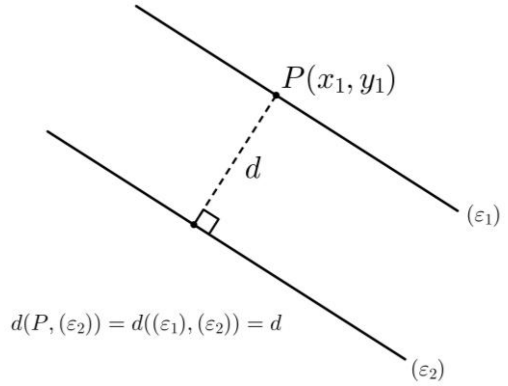
$$(B\Gamma): y-13=\frac{12}{5}(x-4) \Leftrightarrow (B\Gamma): 5y-12x-17=0$$

$(A\Delta)\perp(B\Gamma)$ και άρα η ζητούμενη απόσταση είναι:

$$d(A,B\Gamma)=\frac{|5\cdot(-2)-12\cdot 3-17|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{|-63|}{\sqrt{169}}=\frac{63}{13}.$$

Εφαρμογή [Απόσταση μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών]

Για να υπολογίσουμε την απόσταση δύο (παράλληλων) ευθειών, αρκεί να βρούμε ένα σημείο στη μία ευθεία και να χρησιμοποιήσουμε τον πιο πάνω τύπο.



Παράδειγμα

Έστω οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + 3y - 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + 6y - 3 = 0$. Τότε,

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = -\frac{A_2}{B_2} = \lambda_{\varepsilon_2}$$

και άρα οι ευθείες είναι παράλληλες. Για να βρω ένα σημείο της ευθείας (ε_2), αρκεί να πάρω μια αυθαίρετη τιμή για το x ή το y, π.χ. $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ και άρα $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (\varepsilon_2)$.

Έτσι,

$$d = \frac{\left|1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Γενικά, ισχύει:

Πρόταση

Έστω οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda x + \beta_2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, η απόσταση d μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{\boldsymbol{d = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}}}.$$

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, οι ευθείες είναι παράλληλες, αφού $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \lambda$.

Επίσης, το σημείο $(0, \beta_2) \in (\varepsilon_2)$. Τώρα, $(\varepsilon_1): y = \lambda x + \beta_1 \Leftrightarrow -\lambda x + y - \beta_1 = 0$.

Έτσι, έχουμε:

$$d = \frac{|-\lambda \cdot 0 + 1 \cdot \beta_2 - \beta_1|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}. \quad \square$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι

$$(\varepsilon_1): x + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_1): y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

και

$$(\varepsilon_2): 2x + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow (\varepsilon_2): y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{2}.$$

Έτσι:

$$d = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{\left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{\left|-\frac{1}{6}\right|}{\sqrt{\frac{1}{9} + 1}} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{3}{6\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} = \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = \frac{3}{6\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Πρόταση (Συνθήκη συνευθειακών σημείων)

Τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ του επιπέδου είναι συνευθειακά αν και μόνο αν:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Απόδειξη

Για το ευθύ:

Έστω τα σημεία $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ συνευθειακά σημεία του επιπέδου.

Περίπτωση 1: $x_1 \neq x_2 \neq x_3$.

Τότε μπορούμε (χωρίς απώλεια της γενικότητας) να θεωρήσουμε ότι

$$x_2 \neq x_1 \text{ και } x_3 \neq x_1,$$

δηλαδή το σημείο $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ είναι «σημείο αναφοράς». Τότε, $x_2 - x_1 \neq 0$ και $x_3 - x_1 \neq 0$. Αφού τα σημεία είναι συνευθειακά, οι ευθείες (AB) και $(A\Gamma)$ ταυτίζονται, άρα έχουν την ίδια κλίση:

$$\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}.$$

Επομένως:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}.$$

Πολλαπλασιάζουμε χιαστί:

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = (y_3 - y_1)(x_2 - x_1).$$

Αναπτύσσουμε:

$$y_2x_3 - y_2x_1 - y_1x_3 + y_1x_1 = y_3x_2 - y_3x_1 - y_1x_2 + y_1x_1.$$

Αφαιρούμε το y_1x_1 και από τα δύο μέλη και μεταφέρουμε όλα στο ένα μέλος:

$$y_2x_3 - y_2x_1 - y_1x_3 - y_3x_2 + y_3x_1 + y_1x_2 = 0.$$

Αναδιατάσσουμε:

$$x_1(y_3 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_1) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$y_3 - y_2 = \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix}, \qquad y_1 - y_3 = \begin{vmatrix} y_3 & 1 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad y_2 - y_1 = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Άρα:

$$x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

που είναι ακριβώς το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Περίπτωση 2: $x_1 = x_2 = x_3 = \kappa$, δηλαδή τα σημεία βρίσκονται σε μια κατακόρυφη ευθεία. Τότε:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa & y_1 & 1 \\ \kappa & y_2 & 1 \\ \kappa & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

όπως πολύ εύκολα μπορούμε να δούμε.

Για το αντίστροφο:

Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$ του επιπέδου. Υποθέτουμε ότι

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Αναπτύσσουμε την πιο πάνω ορίζουσα ως προς την 1η γραμμή:

$$x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

Περίπτωση 1: $x_1 = x_2 = x_3$

Τότε όλα τα σημεία έχουν την ίδια τετμημένη ⇒ ανήκουν στην κατακόρυφη ευθεία, την $x = x_1$, άρα είναι συνευθειακά.

Περίπτωση 2: δεν ισχύει ότι $x_1 = x_2 = x_3$.

Τότε υπάρχουν **τουλάχιστον δύο σημεία** με διαφορετικές τετμημένες, έστω χωρίς απώλεια της γενικότητας, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 \neq 0$. Ομαδοποιούμε:

$$(x_2 - x_1)y_3 = (x_3 - x_1)y_2 - (x_3 - x_2)y_1$$

και διαιρούμε με $x_2 - x_1 \neq 0$ και παίρνουμε:

$$y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1).$$

Άρα:

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

δηλαδή

$$\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB}.$$

Βρήκαμε ότι οι ευθείες AB και $A\Gamma$ έχουν την ίδια κλίση ⇒ τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ είναι συνευθειακά. ■

Σημείωση – *διδακτικής ακρίβειας:*

Γιατί η διατύπωση $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ είναι λάθος

1. **Μαθηματικά**, το $x_1 \neq x_2 \neq x_3$ δεν σημαίνει καν «ανά δύο διαφορετικά». Σημαίνει απλώς:

$$x_1 \neq x_2 \text{ και } x_2 \neq x_3,$$

   χωρίς πληροφορία για το αν $x_1 = x_3$ ή όχι.

2. **Διδακτικά**, οδηγεί τους μαθητές να πιστεύουν ότι:

   πρέπει όλα τα x_i να είναι διαφορετικά, ενώ στην πραγματικότητα αρκεί **ένα σημείο αναφοράς** (π.χ. το A) με διαφορετική τετμημένη από τα άλλα δύο.

3. Η υπόθεση ότι τα σημεία x_1, x_2, x_3 είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους γράφεται: $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$.

<u>**Παρατήρηση**</u>
Στην ‘απόδειξη’ του σχολικού εγχειριδίου (Μαθ. Α πρ., Τεύχος Β, σελ. 36-37) δεν υπάρχει η απόδειξη για το αντίστροφο.

<u>**Σημείωση (για τον εκπαιδευτικό)**</u>
Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει γραμμές τα διανύσματα

$$X_1 = (x_1, y_1, 1), \qquad X_2 = (x_2, y_2, 1), \qquad X_3 = (x_3, y_3, 1).$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{1\times 3}$.

Η συνθήκη $\det A = 0$ είναι ισοδύναμη με την συνθήκη ‘οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες.’

Πώς αυτό μεταφράζεται γεωμετρικά

Από τη γραμμική εξάρτηση:

$$\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 = 0 \text{ με } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0),$$

παίρνουμε:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

(από την τρίτη συνιστώσα).

Άρα:

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) + \gamma(x_3, y_3) = (0,0) \text{ και } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι ένα σημείο είναι αφφινικός (affine) συνδυασμός των άλλων δύο, δηλαδή τα τρία σημεία είναι συνευθειακά και αυτός είναι ο λόγος που εμφανίζεται η στήλη των 1.

Πού μπαίνουν οι 2×2 υποορίζουσες
Όταν στο ευθύ (⇒) λεμε:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1},$$

στην πραγματικότητα απαιτούμε:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0.$$

Αυτό είναι 2×2 ορίζουσα.
Αν αυτή η 2×2 ορίζουσα είναι 0 ⇒ τα διανύσματα (x_2-x_1, y_2-y_1) και (x_3-x_1, y_3-y_1) είναι γραμμικά εξαρτημένα⇒ έχουν την ίδια διεύθυνση⇒ τα σημεία είναι συνευθειακά.
Άρα: η συγγραμμικότητα ισοδυναμεί με γραμμική εξάρτηση δύο διανυσμάτων μετατόπισης.

Χρειάζεται να πούμε «τουλάχιστον μία 2×2 υποορίζουσα ≠ 0»;

Σωστό είναι το εξής:

- Για να ορίζονται οι κλίσεις, χρειάζεται **τουλάχιστον** μία 2×2 υποορίζουσα να είναι ≠ 0, π.χ.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \Leftrightarrow x_2\neq x_1.$$

Αν όλες οι 2×2 υποορίζουσες μηδενίζονται ⇒ πλήρης εκφυλισμός (ίδια σημεία ή κατακόρυφη ευθεία).

Παραδείγματα

1. Να εξετάσετε αν τα σημεία $\mathrm{A}(0,3),\ \mathrm{B}(2,2)$ και $\Gamma(4,1)$ είναι συνευθειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$=0\,(2-1)-3(2-4)+(2-8)=-6+6=0$$

και άρα τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά.

2. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(0,-2),\ B(-2,-1)$ και $\Gamma(2,2)$ είναι συνευθειακά.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$
$$=0\,(-1-2)+2(-2-2)+(-4+2)=-10\neq 0$$

και άρα τα σημεία αυτά δεν είναι συνευθειακά. Συνεπώς, τα 3 αυτά σημεία ορίζουν τρίγωνο.

Πρόταση (Τύπος εμβαδού τριγώνου)

Έστω τα μη συνευθειακά σημεία $\mathrm{A}(x_A, y_A)$, $\mathrm{B}(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ του επιπέδου. Τότε, το εμβαδόν $E(AB\Gamma)$ του τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{matrix} \right\|$$

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, αφού τα σημεία $\mathrm{A}(x_A, y_A)$, $\mathrm{B}(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ είναι μη συνευθειακά, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Είναι

$$E(AB\Gamma) = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{|B\Gamma| \cdot |A\Delta|}{2}$$

όπου $(A\Delta) \perp (B\Gamma)$. Επίσης, $|A\Delta| = d(A, B\Gamma)$. Έχουμε

$$\begin{cases} (\mathrm{B\Gamma}): y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \\ \lambda_{B\Gamma} = \dfrac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \end{cases} \Leftrightarrow y - y_B = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_B)$$

$$\Leftrightarrow (B\Gamma): (y_\Gamma - y_B)x - (x_\Gamma - \chi_B)y + y_B x_{\Gamma -} x_B y_\Gamma = 0$$

Άρα,

$$|A\Delta| = d(A, B\Gamma) = \frac{|(y_\Gamma - y_B)x_A - (x_\Gamma - x_B)y_A + y_B x_{\Gamma -} x_B y_\Gamma|}{\sqrt{(y_\Gamma - y_B)^2 + (x_\Gamma - x_B)^2}}$$

Αλλά,

$$|B\Gamma| = \sqrt{(y_\Gamma - y_B)^2 + (x_\Gamma - x_B)^2}$$

και άρα

$$E(AB\Gamma) = \frac{|B\Gamma| \cdot |A\Delta|}{2} = \frac{|(y_\Gamma - y_B)x_A - (x_\Gamma - x_B)y_A + y_B x_{\Gamma -} x_B y_\Gamma|}{2}$$

Όμως, αφού

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = (y_\Gamma - y_B)x_A - (x_\Gamma - x_B)y_A + y_B x_{\Gamma -} x_B y_\Gamma,$$

έπεται το συμπέρασμα. ■

Παράδειγμα

1. Να βρείτε το εμβαδόν $E(AB\Gamma)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ όπου $A(5,0)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(-3,2)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Είναι

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5(3-2) + 1(-2+9) = 12 \neq 0$$

και άρα τα σημεία αυτά δεν είναι συνευθειακά και έτσι ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν

$$E(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{12}{2}=6.$$

2. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$, $B(4,5)$ και $\Gamma(3,8)$.

(α) Δείξτε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

(β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(γ) Βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.

(δ) Βρείτε την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

(ε) Βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 1\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 8 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 4 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 4 & 5\\ 3 & 8\end{vmatrix}$$
$$=-2(5-8)-3(4-3)+(32-15)=20\neq 0$$

και άρα τα σημεία δεν είναι συνευθειακά, άρα ορίζουν τρίγωνο.

(β) Βρίσκω τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου:

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{5-3}{4+2}=\frac{1}{3},$$
$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{8-5}{3-4}=-3$$
$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{8-3}{3+2}=1$$

Παρατηρώ ότι $\lambda_{AB}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1 \Rightarrow (AB)\perp(B\Gamma)\Rightarrow \hat{B}=90^o \Rightarrow AB\Gamma$ ορθογώνιο.

(γ) Η εξίσωση της πλευράς (ΑΓ) είναι

$$(A\Gamma): y-y_\Gamma=\lambda_{A\Gamma}(x-x_\Gamma)\Leftrightarrow (A\Gamma): y-8=x-3\Leftrightarrow \boldsymbol{(A\Gamma): y-x-5=0}$$

(δ) Η εξίσωση του ύψους $B\Delta$ είναι

$$(B\Delta): y-y_B=\lambda_{B\Delta}(x-x_B)$$

Αλλά, ΒΔ ύψος $\Rightarrow (B\Delta)\perp(A\Gamma)\Rightarrow \lambda_{B\Delta}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1\Rightarrow\lambda_{B\Delta}=-1$ και άρα

$$(B\Delta): y-5=-(x-4)\Leftrightarrow (B\Delta): y+x=9$$

(ε) Η εξίσωση της διαμέσου AM είναι

$$(AM): y-y_A=\lambda_{AM}(x-x_A)$$

Αφού M μέσο της $(B\Gamma)$,

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_\Gamma}{2}=\dfrac{7}{2}\\ y_M=\dfrac{y_B+y_\Gamma}{2}=\dfrac{13}{2}\end{cases}\Rightarrow \lambda_{AM}=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{\frac{13}{2}-3}{\frac{7}{2}+2}=\frac{7}{11}$$

Συνεπώς,

$$(AM): y - y_A = \lambda_{AM}(x - x_A) \Leftrightarrow (AM): y - 3 = \frac{7}{11}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (\boldsymbol{AM}): \mathbf{11}\boldsymbol{y} - \mathbf{7}\boldsymbol{x} = \mathbf{47}$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή $\mathrm{A}(3,4)$ και εξισώσεις υψών $(B\Theta): x - 3y + 1 = 0$ και $(\Gamma H): x + y - 3 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών B και Γ του τριγώνου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$(B\Theta): x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{B\Theta} = -\frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{3}$$

$$(\Gamma H): x + y - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_{\Gamma H} = -\frac{A_1}{B_1} = -1$$

$$(B\Theta) \perp (A\Gamma) \Rightarrow \lambda_{B\Theta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{A\Gamma} = -3$$

$$(\Gamma H) \perp (AB) \Rightarrow \lambda_{\Gamma H} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{AB} = 1$$

Συνεπώς:

$$(A\Gamma): y - y_A = \lambda_{A\Gamma}(x - x_A) \Leftrightarrow (A\Gamma): y - 4 = -3(x-3) \Leftrightarrow (A\Gamma): y + 3x - 13 = 0.$$

Η ευθεία (AB) είναι της μορφής δηλ. η

$$(AB): y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow (AB): y - 4 = x - 3 \Leftrightarrow (A\Gamma): y + x - 1 = 0.$$

Το σημείο Β είναι το σημείο τομής των ευθειών (AB) και $(B\Theta)$:

$$\begin{cases} (B\Theta): x - 3y + 1 = 0 \\ (A\Gamma): y + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y - 1 + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 + 3y \Rightarrow x = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής των ευθειών $(A\Gamma)$ και (ΓH):

$$\begin{cases} (B\Theta): x - 3y + 1 = 0 \\ (\Gamma H): x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 3y \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y - 1 + 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$x = -1 + 3y \Rightarrow x = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Συνεπώς, $\Gamma\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ■

Δραστηριότητες σελ. 41 (Απόσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου)

1. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(-3,2)$ από την ευθεία:
(α) $(\varepsilon_1): 4x+3y-21=0$
(β) $(\varepsilon_2): x=6$
(γ) $(\varepsilon_3): y=-2$

Απάντηση

(α) $(\varepsilon_1): 4x+3y-21=0$. Τότε:

$$d(A,\varepsilon_1)=\frac{|4\cdot(-3)+3\cdot 2-21|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|-27|}{\sqrt{16+9}}=\frac{27}{\sqrt{25}}=\frac{27}{5}$$

(β) $(\varepsilon_2): x=6$. Τότε:

$$d(A,\varepsilon_2)=|x_A-6|=|-3-6|=|-9|=9$$

(οριζόντια απόσταση)

(γ) $(\varepsilon_3): y=-2$

$$d(A,\varepsilon_3)=|y_A-6|=|2-(-2)|=|4|=4$$

(κατακόρυφη απόσταση)

2. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, αν:
(α) $A(2,3),\ B(3,10)$ και $\Gamma(7,5)$
(β) $A(2,3),\ B(3,10)$ και $\Gamma(8,0)$
(γ) $A(2,3),\ B(3,10)$ και $\Gamma(3,-2)$

Απάντηση

(α) $A(2,3)$, $B(3,10)$ και $\Gamma(7,5)$.

Βρίσκω την εξίσωση της $(B\Gamma)$:

$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{5-10}{7-3}=-\frac{5}{4}$$

και άρα:

$$(B\Gamma): y-y_\Gamma=\lambda_{B\Gamma}(x-x_\Gamma)\Leftrightarrow(B\Gamma): y-5=-\frac{5}{4}(x-7)$$
$$\Leftrightarrow(B\Gamma): 5x+4y-55=0.$$

Τότε:

$$(A\Delta)=d\big(A,(B\Gamma)\big)=\frac{|5\cdot 2+4\cdot 3-55|}{\sqrt{5^2+4^2}}=\frac{|-33|}{\sqrt{25+16}}=\frac{33}{\sqrt{41}}=\frac{33\sqrt{41}}{41}$$

(β) $A(2,3)$, $B(3,10)$ και $\Gamma(8,0)$.

Βρίσκω την εξίσωση της $(B\Gamma)$:

$$\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{0-10}{8-3}=-2$$

και άρα:

$$(B\Gamma): y-y_\Gamma=\lambda_{B\Gamma}(x-x_\Gamma)\Leftrightarrow(B\Gamma): y-0=-2(x-8)$$

$$\Leftrightarrow (ΒΓ): 2x + y - 16 = 0.$$

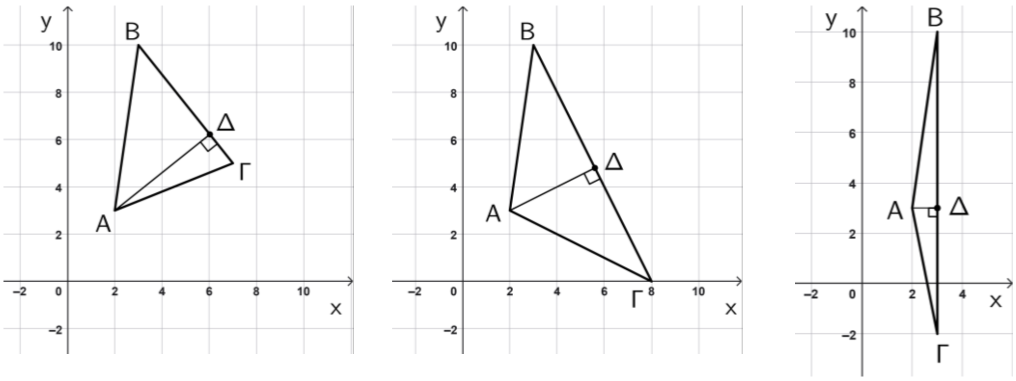
Τότε:

$$(ΑΔ) = d\big(A, (ΒΓ)\big) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 - 16|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

(γ) $A(2,3)$, $B(3,10)$ και $Γ(3,-2)$.

Παρατηρώ ότι $x_Γ = x_B = 3$ και άρα:

$$(ΑΔ) = d\big(A, (ΒΓ)\big) = |x_B - x_A| = |3 - 2| = 1$$



(α) **(β)** **(γ)**

3. Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(2,6)$ και $Γ(4,0)$. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$

(β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

Απάντηση

(α) $A(0,3)$, $B(2,6)$ και $Γ(4,0)$.

$$E(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_Γ & y_Γ & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$$

Αναπτύσσω την πιο πάνω ορίζουσα ως προς την 1η στήλη:

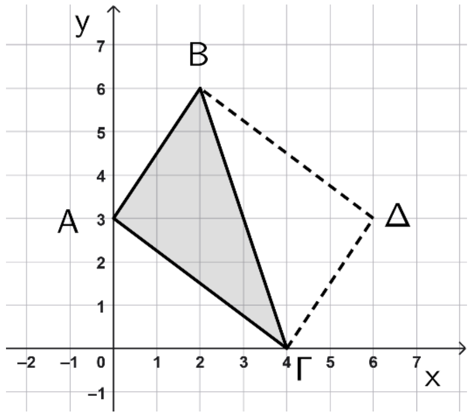
$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(3 - 0) + 4(3 - 6) = -6 - 12 = -18$$

και άρα:

$$E(ΑΒΓ) = \tfrac{1}{2} \cdot |-18| = \tfrac{18}{2} = 9 \text{ τ.μ..}$$

(β) $$E_{\#ΑΒΓΔ} = 2 \cdot E(ΑΒΓ) = 18\ τ.μ.$$



Σημείωση: Τι παρατηρείτε για τη γωνία $\hat{A}$ και πως αυτό μπορεί να δώσει εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του εμβαδού του τριγώνου;

4. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(1,5)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(6,-1)$ ορίζουν τρίγωνο. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(β) το μήκος του ύψους $A\Delta$

(γ) το μήκος της διαμέσου AM.

Απάντηση

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{1η στήλη}}{=} 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(2+1) - 3(5+1) + 6(5-2) = -3 \neq 0$$

⇒τα 3 αυτά σημεία δεν είναι συνευθειακά⇒ορίζουν τρίγωνο.

(α)

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-3| = \frac{3}{2}\ \tau.\mu.$$

(β) Βρίσκω την εξίσωση της $(B\Gamma)$:

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-1-2}{6-3} = -1$$

$$\Rightarrow (B\Gamma): y - y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow (B\Gamma): y + 1 = -(x-6)$$

$$\Leftrightarrow (B\Gamma): x + y - 5 = 0.$$

Τότε:

$$(A\Delta) = d\big(A,(B\Gamma)\big) = \frac{|1\cdot 1 + 5\cdot 1 - 5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

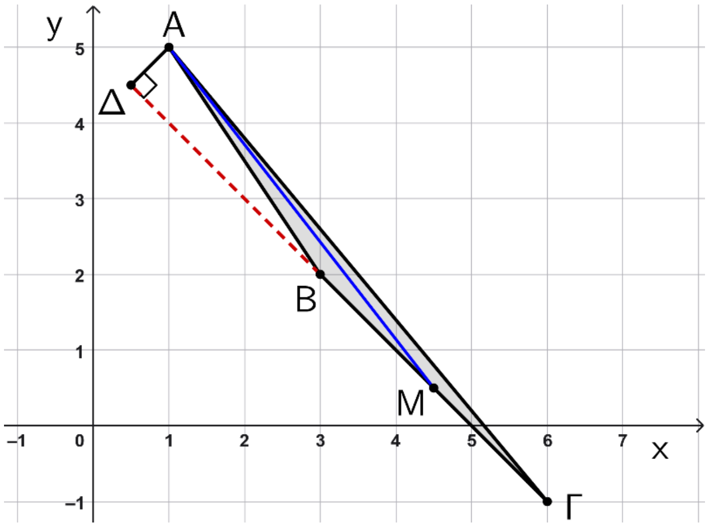
(γ)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \ \ \kappa\alpha\iota\ \ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 5$$

και άρα:

$$(AM) = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 5\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{130}{4}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$



5. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(2,5)$, $B(6,3)$ και $\Gamma(-2,-3)$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

<u>Απάντηση</u>

$A(2,5)$, $B(6,3)$ και $\Gamma(-2,-3)$.

Βρίσκω την εξίσωση της $(B\Gamma)$:

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = \frac{-3-3}{-2-6} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (B\Gamma): y - y_\Gamma = \lambda_{B\Gamma}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow (B\Gamma): y - 3 = \frac{3}{4}(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (B\Gamma): 3x - 4y - 6 = 0.$$

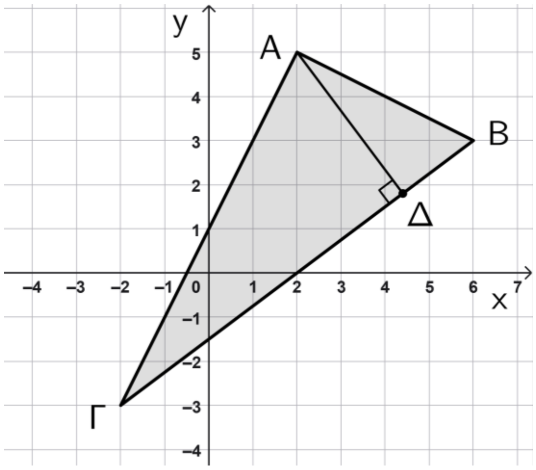
Τότε:

$$(A\Delta) = d\big(A, (B\Gamma)\big) = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 5 - 6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4\,\mu.$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

και συνεπώς:

$$E(AB\Gamma) = \frac{(B\Gamma)(A\Delta)}{2} = \frac{10\cdot 4}{2} = 20\,\tau.\mu..$$



6. Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των ευθειών $(\varepsilon_1): -6x+8y=29$ και $(\varepsilon_2): 3x-4y-8=0$.

Απάντηση

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{-6}{8} = \frac{3}{4},\ \ \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4} \ \Rightarrow\ (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$$

1^{ος} τρόπος

Βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε σημείο στην $(\varepsilon_1): -6x+8y-29=0$: π.χ. για $x=0$ έχουμε $y=\frac{29}{8}$ και άρα το σημείο $A\left(0,\frac{29}{8}\right)$ ανήκει στην (ε_1).
Έτσι, η απόσταση της (ε_1) από την $(\varepsilon_2): 3x-4y-8=0$ είναι ίση με την απόσταση του A από την (ε_2):

$$d\big(A,(\varepsilon_2)\big) = \frac{\left|3\cdot 0 - 4\cdot\frac{29}{8} - 8\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{\left|-\frac{29}{2}-8\right|}{\sqrt{25}} = \frac{\frac{45}{2}}{5} = \frac{9}{2}$$

2^{ος} τρόπος

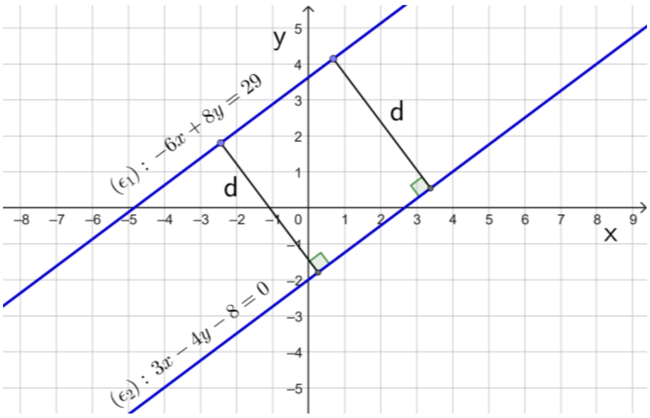
Έστω $\lambda = \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{3}{4}$. Τότε:

$$(\varepsilon_1): -6x+8y=29 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \underbrace{\frac{29}{8}}_{\beta_1}$$

$$(\varepsilon_2): 3x-4y-8=0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x \underbrace{-2}_{\beta_2}$$

Από τον τύπο της απόστασης μεταξύ δύο (παράλληλων) ευθειών:

$$d = \frac{|\beta_1-\beta_2|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = \frac{\left|\frac{29}{8}-(-2)\right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}} = \frac{\left|\frac{29}{8}+2\right|}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}} = \frac{\left|\frac{29+16}{8}\right|}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{\frac{45}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{9}{2}$$



7. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): x-3y+1=0$, $(\varepsilon_2): 2x+5y-9=0$ και η απόσταση της αρχής των αξόνων O από τις ευθείες αυτές είναι ίση με 2 μονάδες.

Απάντηση

Βρίσκω το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2):

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ 2x+5y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ 2x+5y-9=0 \end{cases}$$

Αντικαθιστώ την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη:

$$2(3y-1)+5y-9=0 \Leftrightarrow 6y-2+5y-9=0 \Leftrightarrow 11y=11 \Leftrightarrow y=1$$

Τότε: $x=3\cdot 1-1=2 \Rightarrow (x,y)=(2,1)$.

Άρα ζητούνται οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $P(2,1)$.

Γενική μορφή ζητούμενης ευθείας: $Ax+By+\Gamma=0$.
Αντικαθιστώ στην πιο πάνω τις συντεταγμένες του σημείου $P(2,1)$:

$$2A+B+\Gamma=0 \Rightarrow \Gamma=-(2A+B).$$

Απόσταση σημείου $P(2,1)$ από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$:

$$d(O,\varepsilon)=2 \Leftrightarrow \frac{|\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow \frac{|-(2A+B)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=2 \Leftrightarrow |2A+B|=2\sqrt{A^2+B^2}.$$

$$\Leftrightarrow |2A+B|^2=4(A^2+B^2) \Leftrightarrow (2A+B)^2=4(A^2+B^2)$$

$$\Leftrightarrow 4A^2+4AB+B^2=4A^2+4B^2$$

$$\Leftrightarrow 4AB-3B^2=0 \Leftrightarrow B(4A-2B)=0 \Leftrightarrow B=0, \qquad B=2A$$

Περίπτωση 1: $B=0$
Η ευθεία που προκύπτει είναι η:

$$Ax-(2A)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Περίπτωση 2: $B=2A \Leftrightarrow A=\frac{3}{4}B$
Επιλέγω $B=4$ ώστε να αποφύγω τα κλάσματα, οπότε $A=3$.

(Η εξίσωση ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ **δεν αλλάζει** αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους συντελεστές με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό).

Τότε, $\Gamma = -(2A + B) = -(6 + 4) = -10$ και η ευθεία έχει εξίσωση:

$$3x + 4y - 10 = 0.$$

Οι ζητούμενες ευθείες είναι οι:

$$\boxed{\boldsymbol{x = 2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\boldsymbol{3x + 4y - 10 = 0}}.$$

8. Δύο πλευρές ενός τετραγώνου ανήκουν στις ευθείες $5x - 12y - 13 = 0$ και $5x - 12y - 78 = 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

<u>Απάντηση</u>

$(\varepsilon_1): 5x - 12y - 78 = 0$
$(\varepsilon_2): 5x - 12y - 13 = 0$

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-12} = \frac{5}{12}, \quad \lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-12} = \frac{5}{12} \;\Rightarrow\; (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$$

Άρα έχει νόημα η απόσταση $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Παίρνω ένα οποιοδήποτε σημείο στην (ε_1), π.χ. για $x = 0$ έχω$y = -\frac{13}{2}$ και άρα το σημείο $A\left(0, -\frac{13}{2}\right)$ ανήκει στην (ε_1).
Έτσι, η απόσταση της (ε_1) από την (ε_2) είναι ίση με την απόσταση του A από την (ε_2):

$$d\big(A, (\varepsilon_2)\big) = \frac{\left|5 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{13}{2} - 13\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5 \cdot 13|}{\sqrt{169}} = \frac{5 \cdot 13}{13} = 5$$

Συνεπώς,

$$\text{Εμβαδόν τετραγώνου} = \Big(d\big(A, (\varepsilon_2)\big)\Big)^2 = 25\ \tau.\mu..$$

9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία $A(0,2), B(2,4), \Gamma(8,1)$ και $\Delta(4,-1)$.

<u>Απάντηση</u>

Είναι

$$E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AB\Gamma} + E_{A\Gamma\Delta}$$

Έχω (ανάπτυγμα π.χ. ως προς την 1η στήλη)

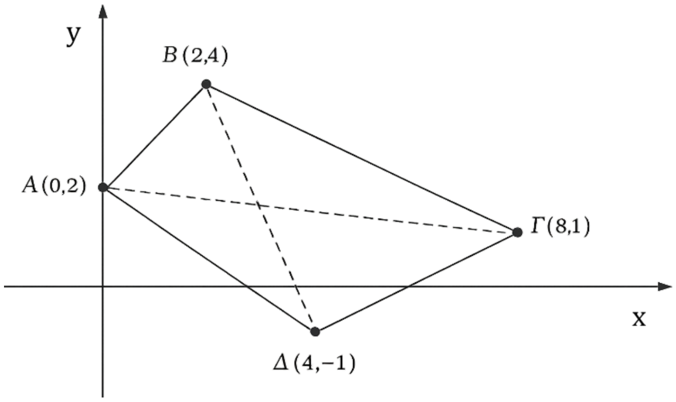
$$E_{AB\Gamma} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \frac{1}{2}|-18| = 9$$

και (ανάπτυγμα π.χ. ως προς την 1η στήλη)

$$E_{A\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \\ x_\Delta & y_\Delta & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{matrix}\right\| \frac{1}{2}|-20| = 10$$

και έτσι,

$$E_{ΑΒΓΔ} = E_{ΑΒΓ} + E_{ΑΓΔ} = 19\ τ.μ.$$



10. Δίνονται τα σημεία $A(\kappa,\kappa^2)$, $B(\lambda,\lambda^2)$ και $\Gamma(\mu,\mu^2)$, όπου κ,λ και μ τρεις πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι τα A, B και Γ είναι κορυφές τριγώνου και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

Απάντηση

$A(\kappa,\kappa^2)$, $B(\lambda,\lambda^2)$ και $\Gamma(\mu,\mu^2)$ με $\kappa \neq \lambda \neq \mu \neq \kappa \neq 0$.

Είναι

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa & \kappa^2 & 1 \\ \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \mu & \mu^2 & 1 \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ \mu^2 & 1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} \kappa^2 & 1 \\ \mu^2 & 1 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \kappa^2 & 1 \\ \lambda^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \mu)(\kappa - \lambda)(\mu - \kappa)$$

Η ποσότητα αυτή είναι $\neq 0$ αφού από υπόθεση $\kappa \neq \lambda \neq \mu \neq \kappa \neq 0$. Συνεπώς, τα 3 αυτά σημεία δεν είναι συνευθειακά, άρα ορίζουν τρίγωνο.

$$E(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_\Gamma & y_\Gamma & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}|(\lambda - \mu)(\kappa - \lambda)(\mu - \kappa)|$$

ή

$$= \frac{1}{2}|\lambda^2(\kappa - \mu) + \kappa^2(\mu - \lambda) + \mu^2(\lambda - \kappa)|\ \ τ.μ$$

Δραστηριότητες σελ. 44-47 (Ενότητας)

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} -10 & 16 \\ -5 & 9 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 100 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **(δ)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\begin{vmatrix} -10 & 16 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = (-10)\cdot 9 - 16\cdot(-5) = -90 + 80 = -10$

(β) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 2\cdot 2 = 2 - 4 = -2$

(γ) Αναπτύσσω π.χ. ως προς την 3η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 100 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 100 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 100 \end{vmatrix}$$

$$= -2(7\cdot 3 - 1\cdot 2) = -38$$

(δ) Αναπτύσσω π.χ. ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = +1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 3(4\cdot 8 - 7\cdot 5) = 0$$

2. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \sqrt{10}-2 & 2 \\ 3 & \sqrt{10}+2 \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha + x & \beta + x \end{vmatrix}$ **(γ)** $\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 \\ -99 & -98 & -97 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\begin{vmatrix} \sqrt{10}-2 & 2 \\ 3 & \sqrt{10}+2 \end{vmatrix} = (\sqrt{10}-2)\cdot(\sqrt{10}+2) - 2\cdot 3$

$= (\sqrt{10})^2 - 2^2 - 6$

$= 10 - 4 - 6 = 0$

(β) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+x & \beta+x \end{vmatrix} = \alpha\cdot(\beta+x) - \beta\cdot(\alpha+x)$

$= \alpha\beta + \alpha x - \beta\alpha - \beta x$

$= \alpha x - \beta x = -x(\alpha-\beta)$

(γ) Αναπτύσσω π.χ. ως προς την 3η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 \\ -99 & -98 & -97 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= +(-1)\begin{vmatrix} 99 & 98 \\ -98 & -97 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 100 & 98 \\ -99 & -97 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 100 & 99 \\ -99 & -98 \end{vmatrix}$$
$$= -\big(99\cdot(-97) - 98\cdot(-98)\big) - \big(100\cdot(-98) - 99\cdot(-99)\big)$$
$$= 99\cdot 97 - 98^2 + 100\cdot 98 - 99^2$$
$$= (98-1)\cdot(98+1) - 98^2 + (98+2)\cdot 98 - (98+1)^2$$
$$= 98^2 - 1 - 98^2 + 98^2 + 2\cdot 98 - 98^2 - 2\cdot 98 - 1 = -2$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

<u>Απάντηση</u>

Αναπτύσσω ως προς την 1η γραμμή:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma\alpha & \alpha\beta \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta\gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta\gamma & \gamma\alpha \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\beta^2 - \gamma^2\alpha - \alpha^2\beta + \gamma^2\beta + \alpha^2\gamma - \beta^2\gamma$$

(αναδιατάσσοντας τους όρους και προσθαφαιρώντας τον όρο $\alpha\beta\gamma$)

$$= (\alpha^2\gamma - \alpha^2\beta) + (\alpha\beta^2 - \alpha\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma - \beta^2\gamma) + (\gamma^2\beta - \gamma^2\alpha)$$

$$= \underbrace{\alpha^2(\gamma-\beta) - \alpha\beta(\gamma-\beta)} + \underbrace{\beta\gamma(\alpha-\beta) - \gamma^2(\alpha-\beta)}$$

$$= \alpha(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) - \gamma(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})$$

$$= (\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)$$

4. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta+6 & 2 \\ \beta & \alpha+6 & 2 \\ 6 & \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Απάντηση

Αναπτύσσω π.χ. ως προς την 1η στήλη:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta+6 & 2 \\ \beta & \alpha+6 & 2 \\ 6 & \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} = +\alpha \begin{vmatrix} \alpha+6 & 2 \\ \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \beta+6 & 2 \\ \alpha+\beta & 2 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} \beta+6 & 2 \\ \alpha+6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha\big(2(\alpha+6) - 2(\alpha+\beta)\big) - \beta\Big(\big(2(\beta+6) - 2(\alpha+\beta)\big)\Big) + 6\Big(\big(2(\beta+6) - 2(\alpha+6)\big)\Big)$$

$$= 2\alpha(\alpha+6) - 2\alpha(\alpha+\beta) - 2\beta(\beta+6) + 2\beta(\alpha+\beta) + 12(\beta+6) - 12(\alpha+6)$$

$$= 2\alpha^2 + 12\alpha - 2\alpha^2 - 2\alpha\beta - 2\beta^2 - 12\beta + 2\beta\alpha + 2\beta^2 + 12\beta + 48 - 12\alpha - 48$$

$$= 0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$

(β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix}$

Απάντηση

(α) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1,\ 1}$

(β) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} x & -6 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 5x + 18 - 18 + 3x = x^2 - 2x$$

και

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = -2(1-x) - 1 = -2 + 2x - 1 = 2x - 3$$

Άρα

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1, 3}$$

6. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

(α) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-\beta \\ \beta & \alpha-\beta \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & x & x \end{vmatrix}$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha-\beta \\ \beta & \alpha-\beta \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-\beta)-\beta(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta) = (\alpha-\beta)^2$

(β) Έχουμε (ανάπτυγμα ως προς την 1η στήλη)

$$\begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & x & x \end{vmatrix} = +x\begin{vmatrix} x & y \\ x & x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & y \\ x & x \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y & y \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$= x(x^2-xy) - y(xy-xy) + y(y^2-xy)$$

$$= x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$$

7. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

παριστάνει την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5,4)$.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3-4) - y(2-5) + 8 - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{-x+3y-7=0}$$

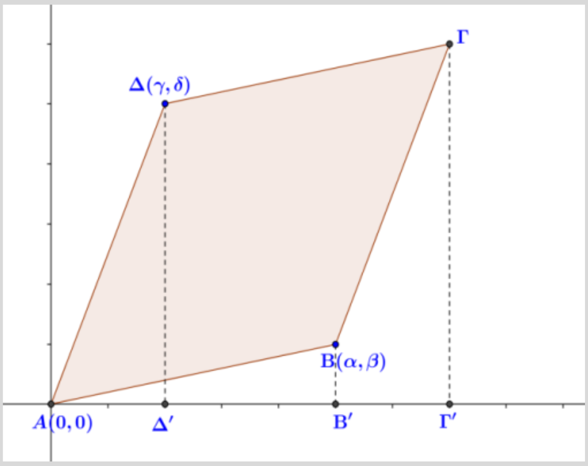
Τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5,4)$ ανήκουν στην ευθεία αυτή αφού επαληθεύουν την εξίσωσή της, όπως εύκολα μπορούμε να δούμε (αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες τους στην εξίσωση που βρήκαμε):

$$A(2,3): -2+3\cdot 3-7=0 \checkmark$$

και

$$B(5,4): -5+3\cdot 4-7=0 \checkmark$$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το παραληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$.



Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου $ΑΒΓΔ$ είναι:

$$E = \left| \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right|$$

<u>Απάντηση</u>

[Γεωμετρική Ερμηνεία της 2 × 2 ορίζουσας]

Το εμβαδόν του παρακάτω παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ είναι (λόγω συμμετρίας του σχήματος) ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $ΑΔΒ'$. Θα βρούμε το ύψος του τριγώνου αυτού που άγεται από την κορυφή $Δ$:

Εξίσωση του AB:

$$(AB): y = \frac{\beta}{\alpha} x \Leftrightarrow (AB): \alpha y - \beta x = 0$$

Απόσταση του $Δ$ από την (AB):

$$d\big(Δ, (AB)\big) = \frac{|\alpha\delta - \beta\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος (AB) είναι ίσο με $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Άρα,

$$E_{ΑΔΒ'} = \frac{βάση \times ύψος}{2} = \frac{|AB| \times d\big(Δ, (AB)\big)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \times \frac{|\alpha\delta - \beta\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{2}|\alpha\delta - \beta\alpha|$$

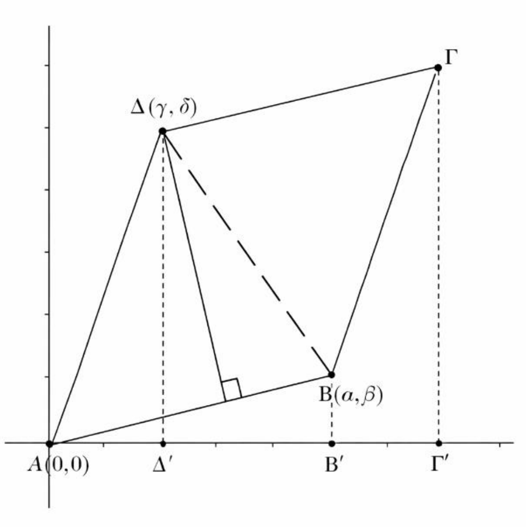
Αλλά, ξέρουμε ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\alpha$ και άρα

$$E_{ΑΔΒ'} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right|.$$

Ετσι,

$$E_{ΑΒΓΔ} = 2E_{ΑΔΒ'} = \left| \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \right|$$

Δηλαδή, η ορίζουσα ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.



9. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που:

(α) διέρχεται από τα σημεία $A(0,4)$και $B(3,-1)$.

(β) σχηματίζει γωνία $60°$με τον άξονα των τετμημένων.

<u>Απάντηση</u>

(α) $A(0,4)$, $B(2,-1)$.

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-4}{2-0} = -\frac{5}{2}$$

(β) $\measuredangle(\varepsilon, xx') = \theta = 60^o \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$

10. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), η οποία σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία θ ίση με:

(α) $60°$ **(β)** $150°$ **(γ)** $0°$ **(δ)** $90°$

<u>Απάντηση</u>

(α) $\measuredangle(\varepsilon, xx') = \theta = 60^o \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 60^o = \sqrt{3}$

(β)
$$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi 150^o = -\varepsilon\varphi(180^o - 30^o) = -\varepsilon\varphi(30^o) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(γ) $\lambda_\varepsilon = 0$, αφού η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.

(δ) λ_ε δεν ορίζεται, αφού η ευθεία είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων.

11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και:

(α) έχει συντελεστή διεύθυνσης -3.

(β) είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.

(γ) είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων.

Απάντηση

(α) Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία. Από υπόθεση, $\alpha = -3$ και αρα $(\varepsilon): y = -3x + \beta$. Αντικαθιστώντας το σημείο $A(-2,3)$ στην εξίσωση της ευθείας, έχουμε $3 = -3 \cdot (-2) + \beta \Rightarrow \beta = -3$ και αρα η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$(\varepsilon): y = -3x - 3 \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{y + 3x + 3 = 0}}.$$

(β) Αφού η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων, έχουμε ότι είναι της μορφής $y = \alpha$ και αφού η ευθεία περνά από το σημείο $A(-2,3)$, έχει εξίσωση $\boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{y = 3}}$.

(γ) Αφού η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, έχουμε ότι είναι της μορφής $x = \alpha$ και αφού η ευθεία περνά από το σημείο $A(-2,3)$, έχει εξίσωση $\boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{x = -2}}$.

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(2,3)$.

Απάντηση

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{y - 6}{x + 1} = \frac{3 - 6}{2 + 1} \Leftrightarrow \frac{y - 6}{x + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow y - 6 = -(x + 1) \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x + y = 5}}$$

13. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(-2,5)$.

Απάντηση

Υπολογίζω την ορίζουσα (ανάπτυξη ως προς την 1η γραμμή):

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= x(3 \cdot 1 - 5 \cdot 1) - y(-1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1) + (-1 \cdot 5 - (-2) \cdot 3)$$
$$= -2x - y + 1$$

Άρα:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 1 = 0$$

Έλεγχος ότι η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(-2,5)$:
Για $A(-1,3)$:

$$2(-1) + 3 - 1 = 0 \checkmark$$

Για $B(-2,5)$:

$$2(-2) + 5 - 1 = 0 \checkmark$$

14. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι ευθείες $(\varepsilon_1)\colon y = 2x + 5$ και $(\varepsilon_2)\colon y = 3x + 5$.

Απάντηση

Είναι $\lambda_{\varepsilon_1} = 2,\ \lambda_{\varepsilon_2} = 3$.
Οι ευθείες δεν είναι παράλληλες ($\lambda_{\varepsilon_1} \neq \lambda_{\varepsilon_2}$) ούτε και κάθετες ($\lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} \neq -1$) μεταξύ τους.
Τώρα, αν $\theta = \measuredangle(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_{\varepsilon_1} - \lambda_{\varepsilon_2}}{1 + \lambda_{\varepsilon_1}\lambda_{\varepsilon_2}} = \frac{2-3}{1+2\cdot 3} = -\frac{1}{7}$$

Αφού shift+tan(-1/7)= $-8,13^o$,

$$\boldsymbol{\theta = |-8,13^o| = 8,13^o}$$

15. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $2x + 3y = 12$ με τον άξονα των τεταγμένων.

Απάντηση

$$(\varepsilon)\colon 2x + 3y = 12 \Leftrightarrow (\varepsilon)\colon 2x + 3y - 12 = 0$$

και α=άρα

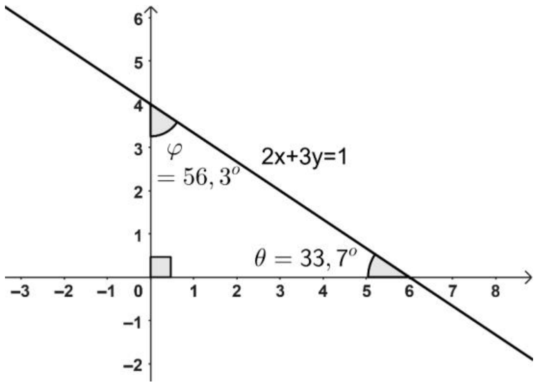
$$\lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{3}.$$

Τώρα, αν $\theta = \measuredangle(\varepsilon, xx')$ (η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα των τετμημένων),

$$\varepsilon\varphi\theta = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta \approx -33,7^o$$

Βρήκαμε την **αρνητικά προσανατολισμένη** οξεία γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα των **τετμημένων**, άρα η οξεία **θετικά** προσανατολισμένη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των **τεταγμένων** είναι η

$$\varphi = 90^o - |-33,7^o| = 56,3^o$$



16. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1)\colon 2x + y = 11$, $(\varepsilon_2)\colon x + 2y = 13$ και $(\varepsilon_3)\colon 5x - 3y = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απάντηση

$(\varepsilon_1)\colon 2x + y = 11 \Leftrightarrow (\varepsilon_1)\colon 2x + y - 11 = 0$,
$(\varepsilon_2)\colon x + 2y = 13 \Leftrightarrow (\varepsilon_2)\colon x + 2y - 13 = 0$,
$(\varepsilon_3)\colon 5x - 3y = 0$.

1ος τρόπος
Βήμα 1: Εύρεση κοινού σημείου των (ε_1) και (ε_2).
Λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

Από την πρώτη: $y = 11 - 2x$.
Αντικαθιστώ στη δεύτερη:

$$x + 2(11 - 2x) = 13$$
$$\Rightarrow x + 22 - 4x = 13$$
$$\Rightarrow -3x = -9 \Rightarrow x = 3$$

Τότε:

$$y = 11 - 2 \cdot 3 = 5$$

Άρα οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(3,5)$.

Βήμα 2:
Το σημείο αυτό ανήκει και στην (ε_3):
Παίρνω δύο σημεία της (ε_3), π.χ. τα $\Gamma(0,0)$, $\Delta(3,5)$ και ελέγχω:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 0$$

Άρα το σημείο ανήκει και στην (ε_3).

2ος τρόπος
Βήμα 1: Εύρεση κοινού σημείου των (ε_1) και (ε_2)
Όπως και πριν, βρίσκω ότι οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $A(3,5)$.

Βήμα 2: Έλεγχος αν το σημείο ανήκει στην (ε_3).
Στην (ε_3): $5x - 3y = 0$.
Για $x = 3, y = 5$:

$$5 \cdot 3 - 3 \cdot 5 = 15 - 15 = 0$$

Το σημείο $A(3{,}5)$ικανοποιεί και την (ε_3).

Συμπέρασμα:
Οι τρεις ευθείες (ε_1), (ε_2), (ε_3) διέρχονται από το ίδιο σημείο, το $A(3{,}5)$.

17. Να υπολογίσετε την τιμή του λ ∈ ℝ, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): x + (\lambda + 1)y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + 4y - 11 = 0$ να τέμνονται. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες τέμνονται κάθετα;

Απάντηση

$(\varepsilon_1): x + (\lambda + 1)y - 2 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x + 4y - 11 = 0$.

Οι ευθείες τέμνονται (είτε συμπίπτουν είτε τέμνονται σε ένα μόνο σημείο)

$$\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \neq \lambda_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda+1} \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda + 1 \neq 2 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda \neq 1}}.$$

Οι ευθείες τέμνονται κάθετα

$$\Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon_2}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda+1} = 2 \Leftrightarrow \lambda + 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\lambda = -\frac{3}{2}}}.$$

18. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ με Α(2,1) και εξισώσεις δύο διαγωνίων του $(\delta_1): y = 5x + 3$ και $(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$.
Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των άλλων τριών κορυφών του $ΑΒΓΔ$.

Απάντηση

$ΑΒΓΔ$# με $(\delta_1): y = 5x + 3$ και $(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$.

Ξέρουμε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται.
Λύνω το σύστημα με τις εξισώσεις των (δ_1) και (δ_2):

$$(\delta_1): y = 5x + 3$$
$$(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$$

Αντικαθιστώ από την (δ_1)στην (δ_2):

$$x - 5(5x + 3) + 3 = 0 \Rightarrow x - 25x - 15 + 3 = 0$$
$$\Rightarrow -24x - 12 = 0 \Rightarrow -24x = 12 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Τότε:

$$y = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2}$$

Λύση συστήματος (σημείο τομής):

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Το σημείο τομής τους είναι το $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
E μέσο του $(ΑΓ)$ και άρα

$$x_E = \frac{x_A + x_\Gamma}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{2 + x_\Gamma}{2} \Rightarrow x_\Gamma = -3$$

$$y_E = \frac{y_A + y_\Gamma}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 + y_\Gamma}{2} \Rightarrow y_\Gamma = 0$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\Gamma(-3,0)}$.

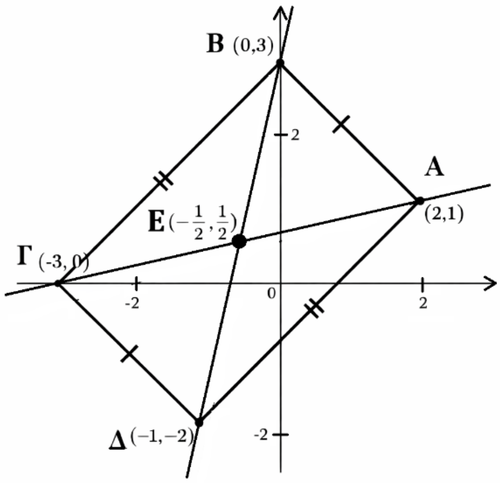
Λόγω συμμετρίας στο παραλληλόγραμμο, το σημείο B έχει συντεταγμένες $(0,3)$. Τέλος, για το σημείο Δ, βρίσκω την εξίσωση της $(\Gamma\Delta)$:

$$(\Gamma\Delta) \parallel (AB) \Rightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{0-2} = -\frac{2}{2} = -1$$

και $\Gamma(-3,0) \in (\Gamma\Delta)$), άρα:

$$y - y_\Gamma = \lambda_{\Gamma\Delta}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y = -(x+3) \Leftrightarrow \boldsymbol{(\Gamma\Delta): y + x = -3}.$$

Λύνω σύστημα με τις εξισώσεις των ευθειών (δ_1) και $(\Gamma\Delta)$, βρίσκοντας $\boldsymbol{\Delta(-1,-2)}$.



19. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με Α(2,1) και εξισώσεις δύο διαγωνίων του $(\delta_1): y = 5x + 3$ και $(\delta_2): x - 5y + 3 = 0$.
Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των άλλων τριών κορυφών του $AB\Gamma\Delta$.

Λύθηκε πριν.

20. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ παριστάνει ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(2,7)$ και έχει κλίση 5.

<u>Απάντηση</u>

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-2) - (y-7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 10 - y + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - y - 3 = 0 \ (εξίσωση\ ευθείας)$$

Η κλίση της πιο πάνω ευθείας είναι $=-\frac{A}{B}=-\frac{5}{-1}=5$ και το σημείο $A(2,7)$ επαληθεύει την εξίσωσή της:

$$5\cdot 2-7-3=0.$$

21. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κοινό σημείο των ευθειών $3x-5y-11=0$και $4x+3y-5=0$ και:

(α) είναι παράλληλη προς την ευθεία $2x-3y+1=0$

(β) είναι κάθετη προς την ευθεία $3x+4y-5=0$

(γ) διέρχεται και από το σημείο $A(-4,1)$.

<u>Απάντηση</u>

$(\varepsilon_1): 3x-5y-11=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}=-\frac{A_1}{B_1}=\frac{3}{5}$

$(\varepsilon_2): 4x+3y-5=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_2}=-\frac{A_2}{B_2}=-\frac{4}{3}$

Βρίσκω το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) π.χ. με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$\begin{cases}3x-5y=11 \\ 4x+3y=5\end{cases}\left|\begin{matrix}4\\-3\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{c}12x-20y=44\\ \underline{-12x-9y=-15}\\ -29y=29\end{array} \Leftrightarrow y=-1$$

Αντικαθιστώ στην πρώτη εξίσωση και βρίσκω $x=2$

Έτσι, το σημείο τομής είναι το $(2,-1)$.

(α) $(\varepsilon_3): 2x-3y+1=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_3}=-\frac{A_3}{B_3}=\frac{2}{3}.$

Έστω $(\varepsilon): y=\lambda_\varepsilon x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.
Έχουμε $(\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon) \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_3} \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=\frac{2}{3}$ και άρα $(\varepsilon): y=\frac{2}{3}x+\beta$.
Αντικαθιστώ το σημείο $(2,-1)$ στην εξίσωση αυτή και βρίσκω $\beta=-\frac{7}{3}$.
Έτσι,

$$(\varepsilon): y=\frac{2}{3}x-\frac{7}{3} \Leftrightarrow (\varepsilon): 2x-3y-7=0$$

(β) $(\varepsilon_4): 3x+4y-5=0 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_4}=-\frac{A_4}{B_4}=-\frac{3}{4}.$

Έστω $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Έχουμε:

$$(\varepsilon_4)\perp(\varepsilon) \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda_{\varepsilon_3}}=\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3}$$

και άρα $(\varepsilon): y=\frac{4}{3}x+\beta$.
Αντικαθιστώ το σημείο $(2,-1)$ στην εξίσωση αυτή και βρίσκω $\beta=-\frac{11}{3}$.
Έτσι,

$$(\varepsilon): y = \frac{4}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow (\varepsilon): 4x - 3y - 11 = 0$$

(γ) Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Η (ε) περνά από τα σημεία $(2,-1)$ και $A(-4,1)$. Έτσι,

$$(2,-1) \Rightarrow -1 = 2\alpha + \beta \Rightarrow \beta = -1 - 2\alpha \quad και \quad (-4,1)$$
$$\Rightarrow 1 = -4\alpha + \beta \Rightarrow \beta = 1 + 4\alpha$$

Άρα

$$1 + 4\alpha = -1 - 2\alpha \quad \Rightarrow 6\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

και

$$\beta = 1 + 4\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Έτσι, η ζητούμενη ευθεία είναι

$$(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow (\varepsilon): x + 3y + 1 = 0$$

22. Δίνονται τα σημεία Α(8, 3) και Β(6, −1).

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ που βρίσκεται πάνω στον άξονα των τετμημένων, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι ίσο με 7 τετρ. μονάδες.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Απάντηση</u>

(α) Το σημείο Γ ανήκει στον άξονα x ⇒Γ($x_Γ$, 0).
Εμβαδόν τριγώνου με ορίζουσα:

$$E = \frac{1}{2} | \begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ x_Γ & 0 & 1 \end{vmatrix} |$$

Υπολογίζω την ορίζουσα (1η γραμμή):

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ x_Γ & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ x_Γ & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ x_Γ & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 8(-1-0) - 3(6 - x_Γ) + x_Γ$$

$$= -8 - 18 + 3x_Γ + x_Γ = 4x_Γ - 26$$

Άρα:

$$E = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}|4x_Γ - 26| = 7 \Leftrightarrow |4x_Γ - 26| = 14$$
$$\Leftrightarrow 4x_Γ - 26 = \pm 14$$

Έχουμε:

$$4x_Γ - 26 = 14 \Leftrightarrow 4x_Γ = 40 \Leftrightarrow x_Γ = 10$$

και

$$4x_Γ - 26 = -14 \Leftrightarrow 4x_Γ = 12 \Leftrightarrow x_Γ = 3$$

Έτσι:

$$\Gamma(10,0),\ \ \Gamma(3,0)$$

(β) Μήκος ύψους ΓΔ:

$$(AB)=\sqrt{(8-6)^2+(3+1)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Χρησιμοποιώ τον τύπο του εμβαδού:

$$E=\frac{1}{2}\cdot(AB)\cdot(\Gamma\Delta)\Leftrightarrow 7=\frac{1}{2}(2\sqrt{5})\cdot(\Gamma\Delta)$$

$$\Leftrightarrow 7=\sqrt{5}(\Gamma\Delta)\Leftrightarrow(\Gamma\Delta)=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

23. Να υπολογίσετε την απόσταση:

(α) του σημείου Α(−1, 2) από την ευθεία (ε): −4x + 3y + 20 = 0

(β) του σημείου Α(−1, 2) από την ευθεία (ε): y = 5

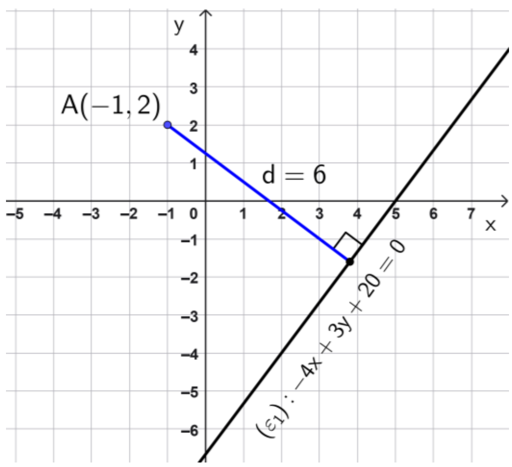
(γ) του σημείου Α(−1, 2) από την ευθεία (ε): x = 5

(δ) μεταξύ των ευθειών ($ε_1$): −4x + 3y + 20 = 0 και ($ε_2$): 4x − 3y + 20 = 0

Απάντηση

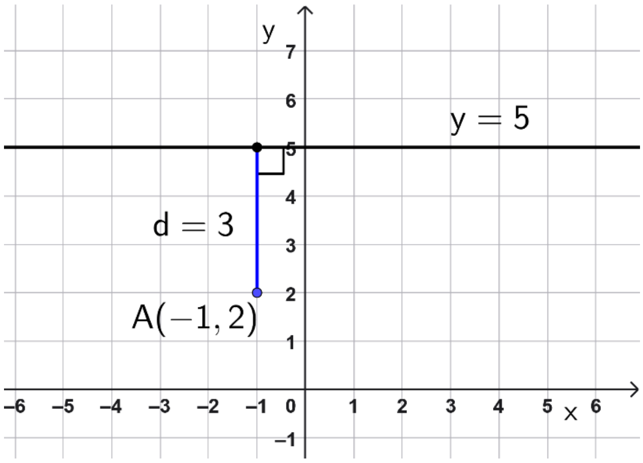
(α)

$$d=\frac{|-4(-1)+3\cdot 2+20|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|4+6+20|}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$$



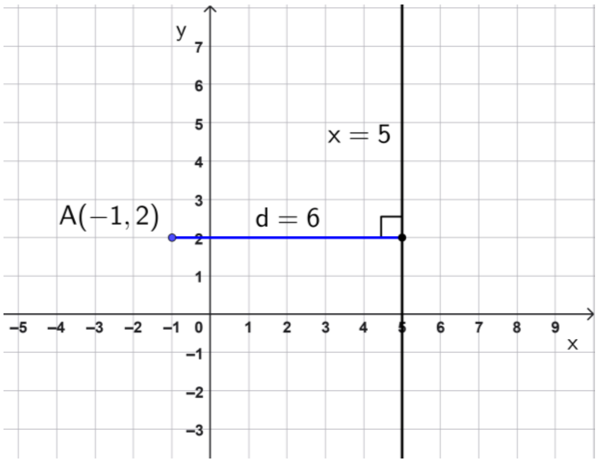
(β) Η ευθεία είναι η y=5 (οριζόντια). Άρα:

$$d=|\,y_A-5\,|=|\,2-5\,|=|-3|=3$$



(γ) Η ευθεία είναι η x=5 (κατακόρυφη). Άρα:

$$d = |\ x_A - 5\ | = |\ -1 - 5\ | = |\ -6\ | = 6$$



(δ) $(\varepsilon_1): -4x + 3y + 20 = 0$
$(\varepsilon_2): 4x - 3y + 20 = 0$

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}, \quad \lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} \Longrightarrow (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$ και άρα έχει νόημα η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Επιλογή σημείου πάνω στην $(\boldsymbol{\varepsilon_1})$

Θέτω $x = 0$ στην (ε_1):

$$-4(0) + 3y + 20 = 0 \Leftrightarrow 3y = -20 \Leftrightarrow y = -\frac{20}{3}$$

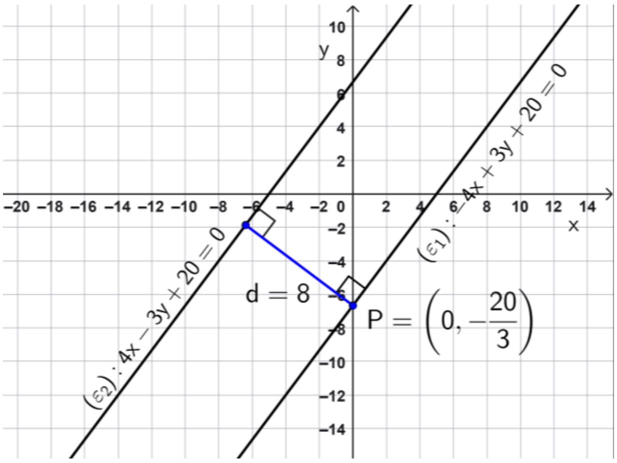
Άρα, ένα σημείο στην (ε_1) είναι το

$$P\left(0, -\frac{20}{3}\right)$$

Απόσταση του σημείου $\boldsymbol{P}$ από την $(\boldsymbol{\varepsilon_2})$

$$d = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + \Gamma\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\ 4 \cdot 0 - 3 \cdot \left(-\frac{20}{3}\right) + 20\ |}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{|\ 20 + 20\ |}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{40}{5} = 8$$



24. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ενός οποιουδήποτε σημείου της ευθείας $(\varepsilon): 7x + 4y - 16 = 0$ από τις ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y - 4 = 0, (\varepsilon_2): 5x - 12y - 4 = 0$ είναι ίσες. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της (ε) ως προς τις (ε_1), (ε_2);

<u>Απάντηση</u>

Έστω $P(x_0, y_0)$ σημείο της (ε). Τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας:

$$7x_0 + 4y_0 - 16 = 0$$

Απόσταση από την (ε_1)

$$d_1 = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + \Gamma\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\ 3x_0 - 4y_0 - 4\ |}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|\ 3x_0 - 4y_0 - 4\ |}{5}$$

Απόσταση από την (ε_2)

$$d_2 = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + \Gamma\ |}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|\ 5x_0 - 12y_0 - 4\ |}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|\ 5x_0 - 12y_0 - 4\ |}{13}$$

Επειδή το P ανήκει στην (ε), οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας:

$$7x_0 + 4y_0 - 16 = 0$$

Θα δείξω ότι:

$$\frac{|\ 3x_0 - 4y_0 - 4\ |}{5} = \frac{|\ 5x_0 - 12y_0 - 4\ |}{13}$$

δηλαδή ότι

$$13\ |\ 3x_0 - 4y_0 - 4\ | = 5\ |\ 5x_0 - 12y_0 - 4\ |$$

Έχουμε:

$$7x_0 + 4y_0 - 16 = 04 \Leftrightarrow y_0 = 16 - 7x_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{16 - 7x_0}{4}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}&3x_0-4y_0-4=3x_0-(16-7x_0)-4\\&=3x_0-16+7x_0-4=10x_0-20\\&=10(x_0-2)\\&\Longrightarrow |\,3x_0-4y_0-4\,|=10\,|\,x_0-2\,|\end{aligned}$$

και άρα:

$$\boldsymbol{d_1=\frac{10\,|\,x_0-2\,|}{5}=2\,|\,x_0-2\,|}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned}&5x_0-12y_0-4=5x_0-12\left(\frac{16-7x_0}{4}\right)-4\\&=5x_0-3(16-7x_0)-4\\&=5x_0-48+21x_0-4\\&=26x_0-52\\&=26(x_0-2)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |\,5x_0-12y_0-4\,|=26\,|\,x_0-2\,|$$

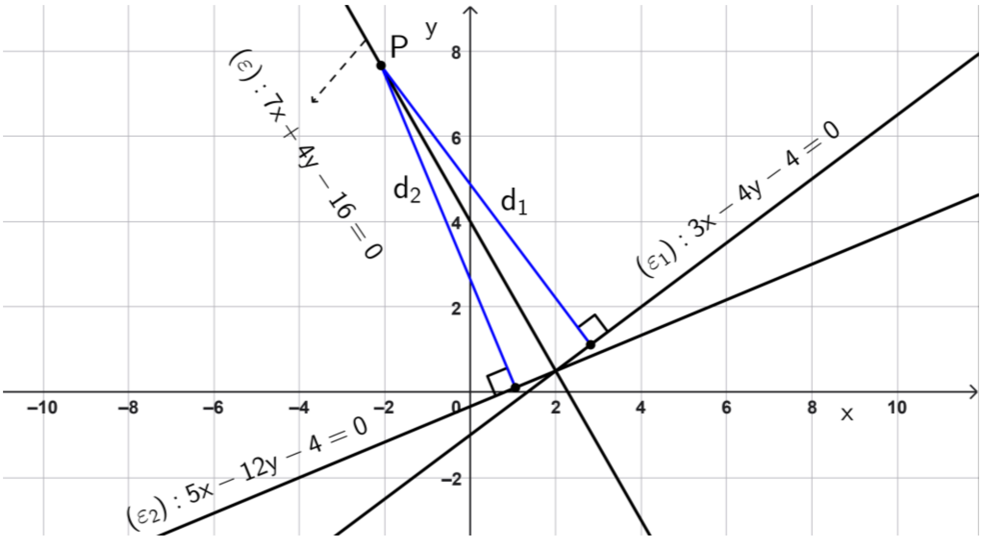
και άρα:

$$\boldsymbol{d_2=\frac{26\,|\,x_0-2\,|}{13}=2\,|\,x_0-2\,|}$$

Συνεπώς:

$$d_1=d_2$$

Συμπέρασμα: Η ευθεία (ε) αποτελεί **γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από τις (ε_1) και (ε_2)**. Άρα η (ε) είναι **διχοτόμος των γωνιών** που σχηματίζουν οι (ε_1) και (ε_2).



25. Να αποδείξετε ότι τα σημεία

$$A(-1,0),\ \ B(1,4),\ \ \Gamma(-3,2),\ \ \Delta(-5,-2)$$

είναι κορυφές ρόμβου. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων.

__Απάντηση__

Υπολογισμός πλευρών

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$B\Gamma=\sqrt{(-3-1)^2+(2-4)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\Gamma\Delta=\sqrt{(-5+3)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$
$$\Delta A=\sqrt{(-1+5)^2+(0+2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

Όλες οι πλευρές είναι ίσες ⇒ το τετράπλευρο είναι ρόμβος.

Διαγώνιος ΑΓ
Κλίση:

$$\lambda_{A\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_A}{x_\Gamma-x_A}=\frac{2-0}{-3+1}=\frac{2}{-2}=-1$$

Εξίσωση:

$$y-y_A=\lambda_{A\Gamma}(x-x_A)\Leftrightarrow y-0=-(x+1)\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y=-x-1}}$$

Διαγώνιος ΒΔ
Κλίση:

$$\lambda_{B\Delta}=\frac{y_\Delta-y_B}{x_\Delta-x_B}=\frac{-2-4}{-5-1}=\frac{-6}{-6}=1$$

Εξίσωση:

$$y-y_B=\lambda_{B\Delta}(x-x_B)\Leftrightarrow y-4=x-1\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y=x+3}}$$

26. Δίνονται τα σημεία $K(\kappa,0)$ και $\Lambda(0,\lambda)$, όπου $\kappa,\lambda\neq 0$.
(α) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $K\Lambda$.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(\kappa,\lambda)$ και είναι κάθετη στην $K\Lambda$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο

$$N(\kappa+\lambda,\kappa+\lambda).$$

__Απάντηση__

(α) Εξίσωση ΚΛ
Κλίση:

$$\lambda_{K\Lambda}=\frac{y_\Lambda-y_K}{x_\Lambda-x_K}=\frac{\lambda-0}{0-\kappa}=-\frac{\lambda}{\kappa}$$

Άρα:

$$y-y_\Lambda=\lambda_{K\Lambda}(x-x_\Lambda)\Leftrightarrow y-\lambda=-\frac{\lambda}{\kappa}(x-0)$$
$$\Leftrightarrow \lambda x+\kappa y-\kappa\lambda=0$$

(β) Εξίσωση κάθετης στην ΚΛ που διέρχεται από το Μ(k,λ)

Η κλίση της κάθετης είναι:

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\kappa}{\lambda}$$

Άρα:

$$y - y_M = \lambda_\varepsilon(x - x_M) \Leftrightarrow y - \lambda = \frac{\kappa}{\lambda}(x - \kappa) \Leftrightarrow \boxed{(\boldsymbol{\varepsilon}): \boldsymbol{\lambda y - \kappa x + \kappa^2 - \lambda^2 = 0}}$$

(γ) Έλεγχος για το $N(\kappa + \lambda, \kappa + \lambda)$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση της (ε):

$$\boldsymbol{\lambda(\kappa + \lambda) - \kappa(\kappa + \lambda) + \kappa^2 - \lambda^2 = \lambda\kappa + \lambda^2 - \kappa^2 - \kappa\lambda + \kappa^2 - \lambda^2 = 0}$$

$\Longrightarrow$ ικανοποιεί την εξίσωσή της

$\Longrightarrow$ το σημείο $N(\kappa + \lambda, \kappa + \lambda)$ ανήκει στην (ε).

Δραστηριότητες σελ. 48 (Εμπλουτισμού)

1. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο διαφορετικών τετραγωνικών πινάκων 2×2, οι οποίοι να έχουν ίσες ορίζουσες.

Απάντηση

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13$$

και

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

Δηλαδή, $\det(A) = \det(B)$, αλλά οι πίνακες A και B είναι διαφορετικοί.

2. Να αποδείξετε τις ιδιότητες:

(α) $\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ **(β)** $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

(γ) $\begin{vmatrix} \alpha + \lambda\delta & \beta + \lambda\varepsilon & \gamma + \lambda\zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$

Απάντηση

(α) Έχουμε (ανάπτυγμα π.χ. ως προς την 1η γραμμή)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} &= (\lambda\alpha) \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - (\lambda\beta) \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + (\lambda\gamma) \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} \\ &= (\lambda\alpha)(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - (\lambda\beta)(\delta\iota - \zeta\eta) \\ &\qquad + (\lambda\gamma)(\delta\theta - \varepsilon\eta) \\ &= \lambda[\alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta)] \\ &= \lambda\left[\alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}\right] \\ &= \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Δηλαδή, αν σε μια 3×3 ορίζουσα πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή της με ένα πραγματικό αριθμό λ, τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα αυτής είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσουμε την ορίζουσα με τον αριθμό λ.

(β) Έχουμε (ανάπτυγμα π.χ. ως προς την 1η γραμμή)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} &= \alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} = \\
&= \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) \\
&= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \beta\delta\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon\eta \\
\text{αναδιατάσσουμε τους όρους} &= -\beta\delta\iota + \gamma\delta\theta + \alpha\varepsilon\iota - \gamma\varepsilon\eta + \beta\zeta\eta - \alpha\zeta\theta \\
&= -\delta(\beta\iota - \gamma\theta) + \varepsilon(\alpha\iota - \gamma\eta) - \zeta(\alpha\theta - \beta\eta) \\
&= -[\delta(\beta\iota - \gamma\theta) - \varepsilon(\alpha\iota - \gamma\eta) + \zeta(\alpha\theta - \beta\eta)] \\
&= -\left[\delta\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \varepsilon\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \zeta\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \eta & \theta \end{vmatrix}\right] = -\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν σε μια 3×3 ορίζουσα εναλλάξουμε 2 γραμμές της, τότε το αριθμητικό αποτέλεσμα αυτής είναι το ίδιο με το να πολλαπλασιάσουμε την ορίζουσα με τον αριθμό -1.

(γ) Έχουμε (ανάπτυγμα π.χ. ως προς την 1η γραμμή)

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \alpha+\lambda\delta & \beta+\lambda\varepsilon & \gamma+\lambda\zeta \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} &= (\alpha+\lambda\delta)\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - (\beta+\lambda\varepsilon)\begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + (\gamma+\lambda\zeta)\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} \\
&= (\alpha+\lambda\delta)(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - (\beta+\lambda\varepsilon)(\delta\iota - \zeta\eta) + (\gamma+\lambda\zeta)(\delta\theta - \varepsilon\eta) \\
&= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta + \boldsymbol{\lambda\delta\varepsilon\iota} - \lambda\delta\zeta\theta - \beta\delta\iota + \beta\zeta\eta - \boldsymbol{\lambda\varepsilon\delta\iota} + \lambda\varepsilon\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon\eta + \lambda\zeta\delta\theta - \lambda\zeta\varepsilon\eta \\
\text{εκτελούμε διαγραφή όρων} &= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \beta\delta\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon\eta \\
&= \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) \\
&= +\alpha\begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν σε μια 3×3 ορίζουσα προσθέσουμε σε μια γραμμή της το αριθμητικό πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής της, τότε το αριθμητικό της αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο.

3. Να γράψετε υπό μορφή ορίζουσας 3×3 τις αλγεβρικές παραστάσεις:

(α) $4\beta\kappa + 2\gamma\lambda + 3\alpha\mu - 2\beta\mu - 3\gamma\kappa - 4\alpha\lambda$

(β) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$

Υπόδειξη: Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ στη μορφή $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha + \beta \cdot \beta \cdot \beta + \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma$.

Απάντηση

(α)

$$\begin{aligned} 4\beta\kappa + 2\gamma\lambda + 3\alpha\mu - 2\beta\mu - 3\gamma\kappa - 4\alpha\lambda &= 4(\beta\kappa - \alpha\lambda) - 3(\gamma\kappa - \alpha\mu) + 2(\gamma\lambda - \beta\mu) \\ &= 3\begin{vmatrix} \beta & \alpha \\ \lambda & \kappa \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \mu & \kappa \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ \gamma & \beta & \alpha \\ \mu & \lambda & \kappa \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma &= \alpha^2 \cdot \alpha + \beta^2 \cdot \beta + \gamma^2 \cdot \gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\gamma \\ &= (\alpha^2 \cdot \alpha - \alpha\beta\gamma) - (\alpha\beta\gamma - \beta^2 \cdot \beta) + (\gamma^2 \cdot \gamma - \alpha\beta\gamma) \\ &= \alpha(\alpha^2 - \beta\gamma) - \beta(\alpha\gamma - \beta^2) + \gamma(\gamma^2 - \alpha\beta) \\ &= \alpha\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} - \beta\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} + \gamma\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \end{aligned}$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει $45°$ με τον άξονα των τετμημένων και απέχει από το σημείο $A(2,5)$ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$ μονάδες.

Απάντηση

Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Αν $\widehat{\omega} = \measuredangle(\varepsilon, xx') = 45^o$, τότε $\lambda = \varepsilon\varphi 45^o = 1$ και Άρα

$$(\varepsilon): y = x + \beta \Leftrightarrow (\varepsilon): x - y + \beta = 0.$$

Είναι

$$d(A,\varepsilon) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2 - 5 + \beta|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|\beta - 3|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |\beta - 3| = 3\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow |\beta - 3| = 6 \Leftrightarrow \beta - 3 = \pm 6 \Leftrightarrow \beta = 9 \text{ ή } \beta = -3$$

Αν $\beta = 9$, τότε η ευθεία είναι η $(\varepsilon): x - y + 9 = 0$ ενώ αν $\beta = -3$, τότε η ευθεία είναι η $(\varepsilon): x - y - 3 = 0$.

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x - 3y - 9 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες των συντεταγμένων τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.

Απάντηση

Έστω $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

$$(\varepsilon) \parallel (\varepsilon_*): 2x - 3y - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_*} = a \Leftrightarrow \frac{-2}{-3} = a \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

και άρα $(\varepsilon): y = \frac{2}{3}x + \beta \Leftrightarrow (\varepsilon): 2x - 3y + \beta = 0$.
Επίσης, τα σημεία τομής της ευθείας είναι τα $A(0, \beta)$ και $B\left(-\frac{3}{2}\beta, 0\right)$.
Συνεπώς,

$$E = 3 \Leftrightarrow \frac{(OA)(OB)}{2} = 3 \Leftrightarrow \frac{\beta \cdot \left(-\frac{3}{2}\beta\right)}{2} = 3 \Leftrightarrow \beta^2 = 4 \Leftrightarrow \beta = \pm 2$$

και αρα οι ευθείες που ψάχνουμε είναι οι

$$(\varepsilon): 2x - 3y + 2 = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad (\varepsilon): 2x - 3y - 2 = 0$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες

$$\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ \kappa x + (\kappa - 1)y - 2 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

να συντρέχουν.

<u>Απάντηση</u>

Οι ευθείες $\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ \kappa x + (\kappa - 1)y - 2 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases}$ συντρέχουν αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -10 \\ \kappa & \kappa - 1 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

και μια τουλάχιστον από τις 2x2 υποορίζουσες

$$\begin{vmatrix} \kappa - 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \kappa & \kappa - 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

της πιο πάνω ορίζουσας είναι $\neq 0$.
Παρατηρώ ότι η $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
Έτσι, αναπτύσσοντας κατα τα γνωστά την πιο πάνω 3x3 ορίζουσα, έχουμε:

$$10\kappa - 10 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

7. Να δείξετε ότι το σημείο $M(2\lambda - 1, \lambda + 4)$ ανήκει σε ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωσή της.

<u>Απάντηση</u>

$$M\left(\underbrace{2\lambda - 1}_{x_M}, \underbrace{\lambda + 4}_{y_M}\right)$$

και άρα:

$$\begin{cases} y_M = \lambda + 4 \\ x_M = 2\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M - 4 = \lambda \\ x_M = 2\lambda - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_M = 2(y_M - 4) - 1$$

$$\Leftrightarrow x_M = 2y_M - 8 - 1 \Leftrightarrow x_M - 2y_M + 9 = 0$$

Η πιο πάνω λύση, χρησιμοποιεί την έννοια του ‘γεωμετρικού τόπου’. Μια άλλη λύση είναι:
Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται $M(2\lambda - 1, \lambda + 4)$. Άρα:

$$x = 2\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+1}{2}.$$

Τότε

$$y = \lambda + 4 = \frac{x+1}{2} + 4 = \frac{x+9}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί 2:

$$2y = x + 9 \Longrightarrow x = 2y - 9$$

Άρα το M ανήκει για κάθε λ στην ευθεία

$$\boxed{x - 2y + 9 = 0}$$

8. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \lambda x + \beta_2$.

Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο:

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

<u>Απάντηση</u>

Κατ’ αρχάς, οι ευθείες είναι παράλληλες, αφού $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \lambda$.
Επίσης, το σημείο $(0, \beta_2) \in (\varepsilon_2)$. Τώρα, $(\varepsilon_1): y = \lambda x + \beta_1 \Leftrightarrow -\lambda x + y - \beta_1 = 0$.
Έτσι, από το γνωστό τύπο απόστασης σημείου από ευθεία έχουμε:

$$d = \frac{|-\lambda \cdot 0 + 1 \cdot \beta_2 - \beta_1|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{|\beta_2 - \beta_1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

Γενικές Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η κλίση της ευθείας (AB) στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathrm{A}(2,-1)$ και $\mathrm{B}(1,4)$, **(β)** $\mathrm{A}(4,-3)$ και $\mathrm{B}(1,3)$

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που περνούν από τα σημεία A και B στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) $\mathrm{A}(3,5)$ και $\mathrm{B}(2,7)$, **(β)** $\mathrm{A}(-1,5)$ και $\mathrm{B}(-1,2)$, **(γ)** $\mathrm{A}(0,-3)$ και $\mathrm{B}(1,-3)$,

(δ) $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3},4\right)$ και $\mathrm{B}\left(1,-\frac{2}{3}\right)$

3. Να βρεθούν οι κλίσεις των πιο κάτω ευθειών:

(ε_1): $y=-2x$, (ε_2): $y=3x+1$ (ε_3): $2y-3x=1$, (ε_4): $y=5$
(ε_5): $x=-5$, (ε_6): $6x-4y=13$

4. **(α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει τετμημένη επί την αρχή ίση με 6 και τεταγμένη επί την αρχή ίση με -5.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(2,3)$ και $\mathrm{B}(-2,2)$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το σημείο $\mathrm{A}(2,1)$ και έχει κλίση $\lambda=-\frac{1}{2}$.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

(α) περνά από τα σημεία $\mathrm{A}(3,3)$ και $\mathrm{B}(1,-1)$

(β) περνά από το σημείο $\mathrm{A}(3,0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία (ε): $3x+2y=1$

(γ) είναι παράλληλη με την ευθεία $x=3$ και περνά από το σημείο $\mathrm{A}(-3,2)$

(δ) περνά από το σημείο $\mathrm{A}(3,3)$ και είναι κάθετη στον άξονα των τεταγμένων

(ε) περνά από το σημείο $\mathrm{A}(-1,1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία AB, όπου $\mathrm{A}(3,3)$ και $\mathrm{B}(1,-1)$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,0)$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon): y = -3$

(β) είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): 2y + 6y = -3$

(γ) είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -2$.

7. Να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία περνά από το σημείο $\mathrm{A}(-4,1)$ και σχηματίζει γωνία 135^o με τον άξονα των τετμημένων.

8. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

(α) οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = 3x$ και $(\varepsilon_2): (\lambda + 1) - y = 1$ να είναι παράλληλες

(β) οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda x + 5$ και $(\varepsilon_2): (\lambda - 2x) - y = -2$ να είναι κάθετες

(γ) οι ευθείες $(\varepsilon_1): \lambda x + 4y = 1$ και $(\varepsilon_2): \lambda x - 9y - 3 = 0$ να ταυτίζονται.

9. Να προσδιοριστούν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι πιο κάτω ευθείες να ταυτίζονται:

$$(\varepsilon_1): y - (\alpha + 2)x = -4\,, \qquad (\varepsilon_2): y + (2\alpha - 1)x = 2\beta$$

10. **(α)** Να βρεθεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος (AB) αν $A(6,1)$ και $B(3,-3)$.

(β) Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ αν $A(1,3), B(4,7), \Gamma(5,6)$ και $\Delta(4,0)$.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου $A(5,3), B(2,7)$ και $\Gamma(2,1)$ είναι ισοσκελές.

11. Δίνονται τα σημεία $A(1,-1), B(3,4)$ και $\Gamma(-5,0)$. Αφού δείξετε ότι τα σημεία αυτά ορίζουν τρίγωνο, να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $(B\Gamma)$.

(β) Την εξίσωση της διαμέσου (AM).

(γ) Το μήκος της διαμέσου (AM).

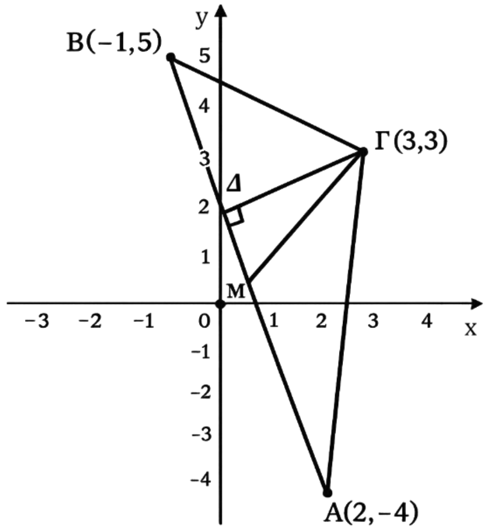
12. Με τη βοήθεια του πιο κάτω σχήματος, να βρείτε:

(α) Το μήκος της διαμέσου (ΓM).

(β) Το μήκος του ύψους $(\Gamma \Delta)$.

(γ) Τη γωνία $\Delta\hat{\Gamma}M$.

(δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$



13. Να υπολογίσετε την θετικά προσανατολισμένη οξεία γωνία των ευθειών $(\varepsilon_1): 2x + 2y - 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2x - y - 1 = 0$.

14. Αφού δείξετε ότι τα σημεία $A(5,-2)$, $B(8,3)$ και $\Gamma(1,6)$ ορίζουν τρίγωνο, να υπολογίσετε τις γωνίες και το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

15. Δίνονται τα σημεία $A(6,-2), B(-2,4)$ και $\Gamma(0,5)$. Αφού δείξετε ότι τα σημεία αυτά ορίζουν τρίγωνο, να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB.

(β) Την κλίση λ_{AB} του ευθυγράμμου τμήματος AB.

(γ) Την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα AB.

(δ) Την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.