



Β' ΤΕΧΝΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΡΤΙΣΗΣ
ΛΕΥΚΩΣΙΑΣ

Σχολική Χρονιά: 2025-2026

2^η ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ)

Α ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 02 – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ονοματεπώνυμο καθηγητή: Ιωακείμ Ιωάννης

Ημερομηνία: Διάρκεια: 45'

Βαθμός: _____ /20_____

Ολογράφως: _____

Υπ. καθηγητή: _____

Υπ. Κηδεμόνα: _____

Ονοματεπώνυμο μαθητή: _____ Τμήμα: _____

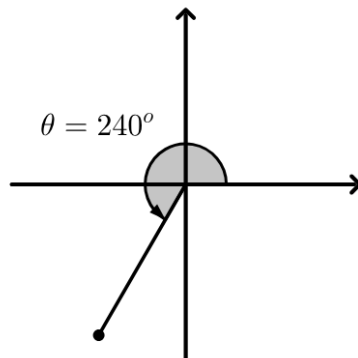
Να γράφετε με μπλε ή μαύρο ανεξίτηλο μελάνι.
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Το σύμβολο $\cdot$ σημαίνει πολλαπλασιασμός.
Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να γράψετε δύο γωνίες, οι οποίες έχουν την ίδια τελική πλευρά με τη γωνία θ , στις πιο κάτω περιπτώσεις:

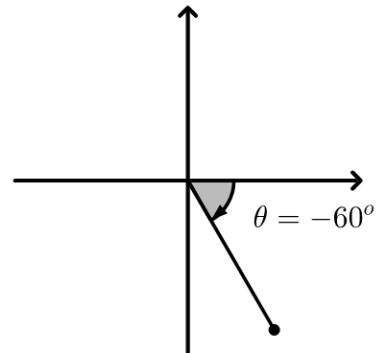
(α)



Γωνία 1: $_{-360^{\circ}+240^{\circ}=600^{\circ}}$

Γωνία 2: $_{-240^{\circ}-360^{\circ}=-120^{\circ}}$

(β)



Γωνία 1: $_{-360^{\circ}-60^{\circ}=300^{\circ}}$

Γωνία 2: $_{-360^{\circ}-60^{\circ}=-420^{\circ}}$

(Μονάδες: 2)

ΑΣΚΗΣΗ 2

(α) Να αποδείξετε ότι: $\sigma\tau\epsilon\mu(270^\circ + \theta) = -\tau\epsilon\mu\theta$.

Απάντηση

$$\sigma\tau\epsilon\mu(270^\circ + \theta) = \frac{1}{\eta\mu(270^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\sigma\upsilon\nu\theta} = -\tau\epsilon\mu\theta$$

(β) Να γράψετε τον πιο κάτω τριγωνομετρικό αριθμό σε τριγωνομετρικό αριθμό οξείας γωνίας:

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{23\pi}{6}\right)$$

Απάντηση

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{23\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

ή

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\left(\frac{23\pi}{6}\right) &= \varepsilon\varphi\left(\frac{18\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(3\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

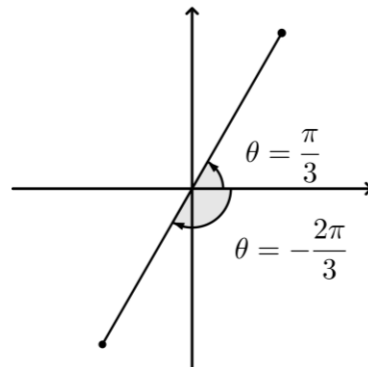
Απάντηση

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} \in [-\pi, \pi]$$

και

$$\theta_2 = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$$



(Μονάδες: 1/1.5/1.5)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta) - \varepsilon\varphi(270^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(-\theta)}{-\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta$$

$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

(Μονάδες: 3)

Απάντηση

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \cdot \eta\mu(180^{\circ}-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{\circ}+\theta)-\varepsilon\varphi(270^{\circ}-\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(-\theta)}{-\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$$
$$=\frac{\sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)-\sigma\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta}{-\sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta}=\frac{-\sigma\varphi\theta(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta)}{-\sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta}=\frac{\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta}$$
$$=\frac{1}{\eta\mu\theta}=\sigma\tau\epsilon\mu\theta$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να αποδείξετε τις πιο κάτω ταυτότητες:

(α) $\sigma\upsilon\nu\omega(\tau\epsilon\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)=\eta\mu^2\omega$

Απάντηση

Α μέλος= $\sigma\upsilon\nu\omega(\tau\epsilon\mu\omega-\sigma\upsilon\nu\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega\tau\epsilon\mu\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega$

$$=\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}-\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\eta\mu^2\omega=\text{Β μέλος}$$

(β) $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

Απάντηση

Α μέλος= $\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x) \cdot (1-\sigma\upsilon\nu x)}=\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$=\frac{\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu^2 x}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\text{Β μέλος}$$

$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$

(Μονάδες: 2x2)

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 13\eta\mu\theta - 24\epsilon\varphi\theta + 26\sigma\upsilon\nu\theta$$

(Μονάδες: 4)

Απάντηση

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \left(-\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{25}{169} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{και αφού } \sigma\upsilon\nu\theta > 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$$

Έχουμε:

$$\epsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

Άρα:

$$A = 13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - 24 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) + 26 \cdot \frac{12}{13} = -5 + 10 + 24 = 29$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu(2x)$.

(α) Ποια η περίοδος της συνάρτησης;

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή $y_{\text{μέγ.}}$ και ποια η ελάχιστη τιμή $y_{\text{ελ.}}$ της παραπάνω συνάρτησης;

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

$$-1 \leq \eta\mu(2x) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\eta\mu(2x) \leq 3 \Rightarrow y_{\text{μέγ.}} = 3, \quad y_{\text{ελ.}} = -3$$

(γ) Κάνοντας χρήση της περιοδικότητας, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρεθεί η τιμή

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right).$$

(Μονάδες: 1)

Απάντηση

Με χρήση της περιοδικότητας:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = f\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

Απευθείας:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(2 \cdot \frac{5\pi}{4}\right) = 3\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 3\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$