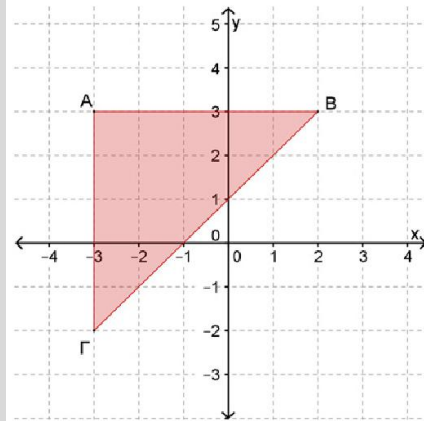


Δραστηριότητες σελ. 8-11 (Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο)

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$ και να δώσετε την απάντησή σας στην πιο απλή μορφή.



Απάντηση

$A(-3,3)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-3,-2)$.

Είναι

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|A\Gamma| = \sqrt{(x_\Gamma - x_A)^2 + (y_\Gamma - y_A)^2} = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\begin{aligned} |B\Gamma| &= \sqrt{(x_\Gamma - x_B)^2 + (y_\Gamma - y_B)^2} = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 25} \\ &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Διαφορετικά,

$|AB| = 2 - (-3) = 5$ αφού τα σημεία A και B έχουν την ίδια τετμημένη (και αρα το ευθύγραμμο τμήμα (AB) είναι παράλληλο με τον άξονα των τετμημένων)

$|A\Gamma| = -2 - 3 = 5$ αφού τα σημεία A και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη (και αρα το ευθύγραμμο τμήμα $(A\Gamma)$ είναι παράλληλο με τον άξονα των τεταγμένων), τα ευθύγραμμα τμήματα (AB) και $(A\Gamma)$ είναι κάθετα μεταξύ τους και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ βρίσκουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $(B\Gamma) = 5\sqrt{2}$.

2. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

$$\sqrt{5}, \quad \sqrt[3]{5}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{29}, \quad \sqrt{29}$$

Απάντηση

$$5 < 8 \Rightarrow \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{29} < \sqrt{29}$$

Επίσης,

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3.$$

Αλλά,

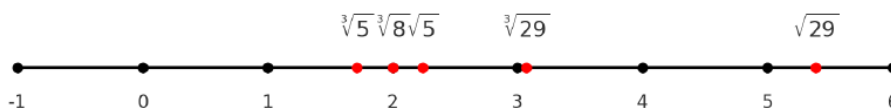
$$27 < 29 < 64 \Rightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{29} < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{29} < 4.$$

Άρα,

$$\sqrt{5} < \sqrt[3]{29}$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω,

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{29} < \sqrt{29}$$



3. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε κάθε σειρά;

Απάντηση

30 σειρές επί 30 καθίσματα, άρα θα τοποθετηθούν $\sqrt{900} = 30$ καθίσματα σε κάθε σειρά.

4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο 10 m.

Απάντηση

$$\delta = 10m \Rightarrow 2R = 10m \Rightarrow R = 5m$$

και άρα

$$\text{Περίμετρος} = 2\pi R = 10\pi m$$

και

$$\text{Εμβαδόν} = \pi R^2 = 25\pi m^2$$

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x - 6 = 4x - 2$

(β) $3(x - 4) = 2x - 5$

(γ) $5(x + 3) = 5x + 3$

(δ) $\frac{a-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{a}{3} + \frac{1}{6}$

Απάντηση

(α) $2x - 6 = 4x - 2 \Leftrightarrow -6 + 2 = 4x - 2x$

$\Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow x = -2$

(β) $3(x - 4) = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x - 12 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow 3x - 2x = 12 - 5$

$\Leftrightarrow x = 7$

(γ) $5(x + 3) = 5x + 3 \Leftrightarrow 5x + 15 = 5x + 3$

$\Leftrightarrow 5x - 5x = 3 - 15 \Leftrightarrow 0 \cdot x = -12$

και αρα η εξίσωση είναι *αδύνατη*.

(δ) $\frac{\alpha-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{2(\alpha-1) + 3 \cdot 1}{6} = \frac{2\alpha+1}{6}$

$\Leftrightarrow 2(\alpha-1) + 3 = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 + 3 = 2\alpha + 1$

$\Leftrightarrow 2\alpha - 2\alpha = 1 - 1$

$\Leftrightarrow 0\alpha = 0$

και αρα η εξίσωση είναι *αόριστη*.

6. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, έτσι ώστε να είναι αδύνατες:

(α) $(\lambda - 3)x = 7$

(β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$

Απάντηση

(α) Η εξίσωση $(\lambda - 3)x = 0$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$.

(β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x \Leftrightarrow 3x + \lambda x + 6x = 15 - 6 \Leftrightarrow (9 + \lambda)x = 9$

Η εξίσωση $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow$ η εξίσωση $(9 + \lambda)x = 9$ είναι αδύνατη $\Leftrightarrow 9 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -9$.

7. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό α σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, έτσι ώστε να είναι αόριστες:

(α) $(\alpha + 3)x = 0$

(β) $\alpha x = 6x$

Απάντηση

(α) Η εξίσωση $(\alpha + 3)x = 0$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow \alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$.

(β) $\alpha x = 6x \Leftrightarrow \alpha x - 6x = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 6)x = 0$

Η εξίσωση $\alpha x = 6x$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow$ η εξίσωση $(\alpha - 6)x = 0$ είναι αόριστη $\Leftrightarrow \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$.

8. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{3x - 2}, \quad B = \sqrt{20 - 5x}$$

Απάντηση

Η παράσταση $A = \sqrt{3x - 2}$ ορίζεται για τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $3x - 2 \geq 0$.

Είναι

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Λύση σε μορφή διαστήματος:

$$x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$$

Η παράσταση $B = \sqrt{20 - 5x}$ ορίζεται για τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $20 - 5x \geq 0$.

Είναι

$$20 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow 20 \geq 5x \Leftrightarrow \frac{20}{5} \geq \frac{5x}{5} \Leftrightarrow \underbrace{4 \geq x}_{x \leq 4}.$$

Λύση σε μορφή διαστήματος:

$$x \in (-\infty, 4]$$

9. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 4 \geq x - 2$ και $2x + 3 < 13$.

(α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.

(β) Να παραστήσετε την κοινή λύση των δύο ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

(γ) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί τις δύο ανισώσεις;

(δ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν τις δύο ανισώσεις.

(ε) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραιη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.

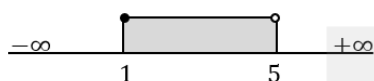
Απάντηση

(α) $3x - 4 \geq x - 2 \Leftrightarrow 3x - x \geq 4 - 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty)$

και

$$2x + 3 < 13 \Leftrightarrow 2x < 13 - 3 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5)$$

(β) Οι δυο ανισώσεις συναληθεύουν για $1 \leq x < 5$, δηλαδή στο διάστημα $[1, 5)$.



(γ) Η μικρότερη τιμή του x η οποία ικανοποιεί και τις 2 ανισώσεις είναι η $x = 1$.

(δ) Π.χ. $x = 2, \frac{5}{2}, 3, 4$.

(ε) Η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x η οποία ικανοποιεί και τις 2 ανισώσεις είναι η $x = 4$.

10. Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών και να τις παραστήσετε γραφικά:

(α) $y = x + 2$

(β) $y = 2x$

(γ) $y = 3x - 2$

(δ) $y + 3x = 2$

(ε) $y = 2$

(στ) $x = 3$

Απάντηση

(α) $y = x + 2 \Rightarrow \lambda = 1$ (ο συντελεστής του x)

(β) $y = 2x \Rightarrow \lambda = 2$ (ο συντελεστής του x)

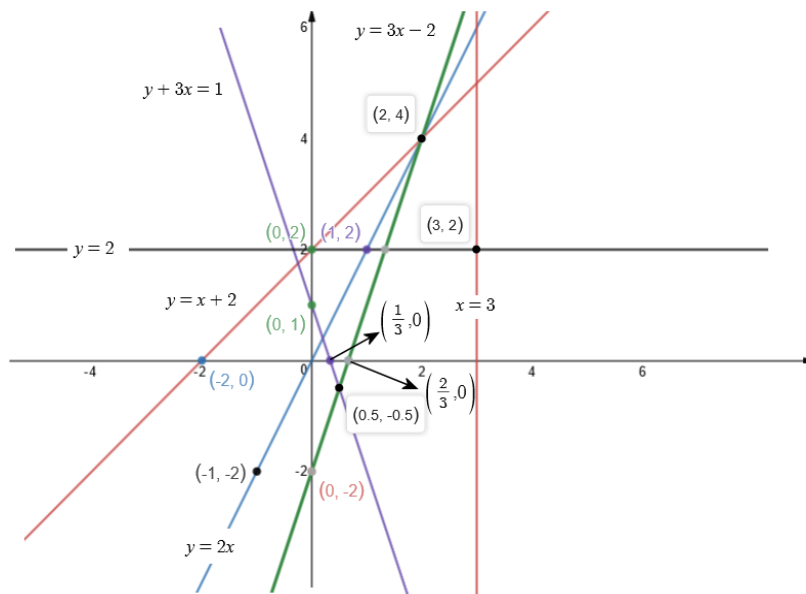
(γ) $y = 3x - 2 \Rightarrow \lambda = 3$ (ο συντελεστής του x)

(δ) $y + 3x = 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow \lambda = -3$ (ο συντελεστής του x)

- (ε) $y = 2 \Rightarrow \lambda = 9$ (η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων)
- (στ) $x = 3 \Rightarrow \eta \lambda \text{ δεν ορίζεται}$ (η ευθεία είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων)

Για τη γραφική τους αναπαράσταση:

- (α) $y = x + 2$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,2)$ και $(-2,0)$
- (β) $y = 2x$. Περνά από την αρχή των αξόνων. Επίσης, π.χ. τα $(1,2)$ και $(-1,-2)$ ανήκουν στην ευθεία
- (γ) $y = 3x - 2$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,-2)$ και $(\frac{2}{3}, 0)$
- (δ) $y + 3x = 1$ Σημεία τομής με τους άξονες: $(0,1)$ και $(\frac{1}{3}, 0)$



11. Η ευθεία $y = ax$ περνά από το σημείο $A(-1,3)$.

- (α) Να υπολογίσετε την τιμή του a .
- (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία $y = ax$.

Απάντηση

- (α) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(-1,3)$ στην εξίσωση της ευθείας:

$$3 = -a \Rightarrow a = -3.$$

- (β) Η ευθεία περνά από την αρχή των αξόνων, δηλαδή από το σημείο $(0,0)$. Βάζουμε π.χ. $x = 1$ στην εξίσωση της ευθείας:

$$y = -3 \cdot 1 = -3$$

και άρα το σημείο $B(1,-3)$ ανήκει επίσης στην ευθεία.

12. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2x + \beta$ περνά από το σημείο $A(-2,6)$. Να υπολογίσετε την τιμή του β .

Απάντηση

Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(-2,6)$ στην εξίσωση της ευθείας:
 $6 = -2 \cdot (-2) + \beta \Rightarrow \beta = 6 - 4 = 2.$

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:

(α) $(0,1)$ και $(2,4)$

(β) $(0,4)$ και $(-1,4)$

Απάντηση

(α) $A(0,1)$ και $B(2,4)$

Η εξίσωση της ευθείας που ψάχνουμε είναι η $y = ax + \beta$.

Το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στην ευθεία $\Rightarrow \beta = 1$.

Άρα,

$$y = ax + 1.$$

Αντικαθιστούμε το σημείο $B(2,4)$ στην πιο πάνω εξίσωση:

$$y = ax + 1 \Rightarrow 4 = 2a + 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Συνεπώς,

$$y = \frac{3}{2}x + 1.$$

(β) $A(0,4)$ και $B(-1,4)$

Αφού η ευθεία περνά από τα σημεία $(0,4)$ και $(-1,4)$, είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων (τον άξονα των x). Άρα, η εξίσωση της ευθείας είναι η

$$y = 4.$$

14. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

(α)
$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

(β)
$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Απάντηση

(α) Με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Βήμα 1: Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση είναι λυμένη ως προς τον ένα άγνωστο (τον y)

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την 1η εξίσωση στη 2η, δηλ. όπου y θα αντικαταστήσουμε με $3 + x$ και (λύνουμε ως προς x)

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2(3 + x) = 6 \Leftrightarrow 2x + 6 + 2x = 6 \Leftrightarrow 4x = 0 - 3$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε στο 2ο Βήμα στην 1η εξίσωση και βρίσκουμε το y

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 + 0 = 3$$

Έτσι, η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = (0, 3)$.

(β) Με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

Βήμα 1: Βλέπουμε τους συντελεστές των x και y και των 2 συστημάτων. Εδώ οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι.

Βήμα 2: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και λύνουμε ως προς y

$$\begin{array}{r} y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \\ \hline 2y = 3 \end{array} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

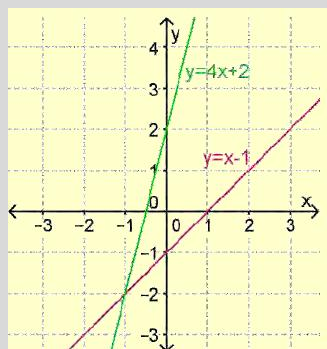
Βήμα 3: Αντικαθιστούμε το αποτέλεσμα του 2ου Βήματος στην 1η εξίσωση και βρίσκουμε το x

$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

Έτσι, η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών $(\varepsilon_1): y = x - 1$ και $(\varepsilon_2): y = 4x + 2$.
Να λύσετε γραφικά το σύστημα:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$



Απάντηση

Η λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής των ευθειών: $(-1, -2)$.

16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 2)^2$

(β) $(2x - 3y)^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$

(δ) $(x - 3)(x + 3)$

(ε) $(x + 4)^3$

(στ) $(2x - 1)(2x + 1)$

Απάντηση

(α) $(x + 2)^2 = x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

(β) $(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(γ) $\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (-2) + (-2)^2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

(δ) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

(ε) $(x + 4)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

(στ) $(2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + 1)^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 2(\alpha + 1)$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= (\alpha + 1)^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) &= \alpha^2 + 2\alpha \cdot 1 + 1^2 - (\alpha^2 - 1^2) \\ &= \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 1 &= 2\alpha + 2 \\ &= 2(\alpha + 1) &= \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

18. Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha \cdot \beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

(β) $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 10(\alpha + \beta) = \frac{119}{3}$

(γ) $\alpha^3 + \beta^3 = -\frac{64}{27}$

Απάντηση

$$(α) \quad \alpha + \beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = \frac{1}{9}$$

$$\xrightarrow{\alpha \cdot \beta = -\frac{7}{3}} \alpha^2 + \beta^2 - \frac{14}{3} = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{9} + \frac{14}{3} = \frac{43}{9}$$

$$\begin{aligned} (β) \quad & (3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 10 \overbrace{(\alpha + \beta)}^{-\frac{1}{3}} \\ &= (3\alpha)^2 + 2 \cdot (3\alpha) \cdot 1 + 1^2 + (3\beta)^2 + 2 \cdot (3\beta) \cdot 1 + 1^2 - \frac{10}{3} \\ &= 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 9\beta^2 + 6\beta + 1 - \frac{10}{3} \\ &= 9 \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2)}_{\frac{43}{9}} + 6 \underbrace{(\alpha + \beta)}_{-\frac{1}{3}} + 2 - \frac{10}{3} \\ &= 9 \cdot \frac{43}{9} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 - \frac{10}{3} = 43 - 2 + 2 - \frac{10}{3} = \frac{119}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (γ) \quad & \alpha^3 + \beta^3 = \underbrace{(\alpha + \beta)}_{-\frac{1}{3}} (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) \\ & (\text{αφού } \alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9} \text{ και } \alpha \cdot \beta = -\frac{7}{3}) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{43}{9} + \frac{7}{3} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{64}{9} \right) = -\frac{64}{27} \end{aligned}$$

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$(α) \quad 2x^3 - 2x$$

$$(β) \quad y^2 - x^2 - 10y + 25$$

$$(γ) \quad \alpha^3 x^3 - \beta^3 x^3 + \alpha^3 - \beta^3$$

$$(δ) \quad (x - 2y)^2 - (x + 3y)^2$$

Απάντηση

$$(α) \quad 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$$

$$\begin{aligned} (β) \quad & y^2 - x^2 - 10y + 25 = (y^2 - 10y + 25) - x^2 = \underbrace{(y - 5)^2}_{\text{διαφορά 2 τετραγώνων}} - x^2 \\ &= [(y - 5) - x] \cdot [(y - 5) + x] \\ &= (y - 5 - x) \cdot (y - 5 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\gamma) \quad & \alpha^3 x^3 - \beta^3 x^3 + \alpha^3 - \beta^3 = x^3(\alpha^3 - \beta^3) + (\alpha^3 - \beta^3) \\& = (\alpha^3 - \beta^3)(x^3 + 1) \\& = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(x + 1)(x^2 - x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\delta) \quad & \underbrace{(x - 2y)^2 - (x + 3y)^2}_{\text{διαφορά 2 τετραγώνων}} = [(x - 2y) - (x + 3y)] \cdot [(x - 2y) + (x + 3y)] \\& = (x - 2y - x - 3y) \cdot (x - 2y + x + 3y) \\& = (-5y) \cdot (2x + y) \\& = -5y \cdot (2x + y)\end{aligned}$$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(\alpha) \quad 3x^2 - 15x = 0$$

$$(\beta) \quad x^2 + x = 6$$

$$(\gamma) \quad (a - 2)(2a + 8) = 0$$

$$(\delta) \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad 3x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 5$$

$$(\beta) \quad x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 5)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ ή } x = 1$$

$$(\gamma) \quad (a - 2)(2a + 8) = 0 \Leftrightarrow 2(a - 2)(a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 2 = 0 \text{ ή } a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -4 \text{ ή } a = 2$$

(δ) 1^{ος} τρόπος

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(x - 2) = 0$$

$$3x - 1 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = 2$$

2^{ος} τρόπος

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\alpha = 3, \quad \beta = -5, \quad \gamma = 2$$

και έχουμε:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{5 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1, \quad x_2 = \frac{5 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2}$

(β) $\frac{(a + 1)(a - 2)^2 - 4(a + 1)}{a^3 + a^2}$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί: $x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2, -1$

Για $x \neq -2, -1$:

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{x}{x + 1}$$

(β) Περιορισμοί: $a^3 + a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2(a + 1) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1, 0$

Για $a \neq -1, 0$:

$$\frac{(a + 1)(a - 2)^2 - 4(a + 1)}{a^3 + a^2} = \frac{(a + 1)[(a - 2)^2 - 4]}{a^2(a + 1)}$$

$$= \frac{(a - 2)^2 - 4}{a^2} = \frac{a^2 - 4a + 4 - 4}{a^2} = \frac{a^2 - 4a}{a^2} = \frac{a(a - 4)}{a^2} = \frac{a - 4}{a}$$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$(α) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 0$$

$$(β) \quad \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3}$$

$$(γ) \quad \frac{2x-19}{x^2+x-6} - \frac{x}{2-x} = \frac{5}{x+3}$$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \\ x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1, +1$$

$$\text{ΕΚΠ}(x-1, (x-1)(x+1), x+1) = (x-1)(x+1)$$

$$\text{Για } x \neq -1, +1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}}{-\frac{4}{(x-1)(x+1)}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1+2(x+1)-4}{(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1+2x+2-4}{(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-3}{(x-1)(x+1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x-3=0 \Leftrightarrow x=1 \\ &\Leftrightarrow \text{απορρίπτεται} \end{aligned}$$

(β) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, 3 \\ x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \\ x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3, 1$$

$$\text{ΕΚΠ}(x-1, (x-1)(x+3), x+3) = (x-1)(x+3)$$

$$\text{Για } x \neq -3, 1$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x + 1}{x - 1} &= \frac{x + 2}{x + 3} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 3} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{(x - 1)(x - 3)} + \frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x + 3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 1 + (x + 3)(x + 1) - (x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 6}{(x - 1)(x + 3)} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ δεκτή, } x = -3 \text{ απορρίπτεται} \end{aligned}$$

(γ) Περιορισμοί:

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3, 2 \\ x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3, 2$$

$$\text{ΕΚΠ}(x - 2, (x - 2)(x + 3), x + 3) = (x - 2)(x + 3)$$

Για $x \neq -3, 2$

$$\begin{aligned} \frac{2x - 19}{(x - 2)(x + 3)} + \frac{x}{x - 2} - \frac{5}{x + 3} &= 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 19 + x(x + 3) - 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x - 19 + x(x + 3) - 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{(x - 2)(x + 3)} &= 0 \\ x^2 - 9 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \text{ δεκτή, } x = -3 \text{ απορρίπτεται} \end{aligned}$$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων τα τετράγωνα να έχουν άθροισμα 145.

Απάντηση

Έστω n και $n + 1$ δυο διαδοχικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $n^2 + (n + 1)^2 = 145$

Έχουμε

$$n^2 + (n + 1)^2 = 145 \Leftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 145$$

$$2n^2 + 2n - 144 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2(\nu^2 + \nu - 72) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(\nu - 9)(\nu - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow \nu &= 8 \text{ ή } \nu = 9. \end{aligned}$$

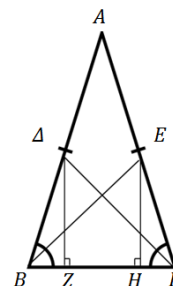
24. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.

Απάντηση

$AD = DB = AE = EG$ (μέσα ίσων πλευρών)

$DE \perp BG$ και $EH \perp BG$. Επίσης, $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (παρα τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου)

Άρα, τα τρίγωνα ΔBZ και $E\Gamma H$ είναι ίσα (Π-Ο-Γ) και άρα $DZ = EH$.



25. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία E, Z έτσι ώστε $BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Απάντηση

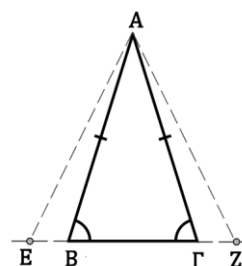
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AEB και $AZ\Gamma$. Είναι ίσα Π-Γ-Π αφού

$AB = A\Gamma$ ($AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο)

$\hat{AEB} = \hat{AZ\Gamma}$ (παραπληρωματικές ίσων γωνιών)

$EB = \Gamma Z$ (υπόθεση)

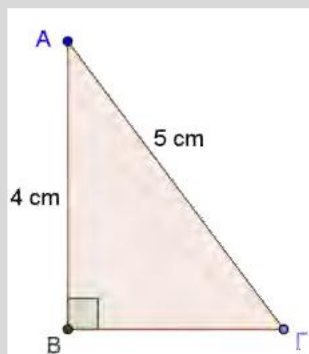
και άρα $AE = AZ$ και άρα το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.



26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:

(α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{A}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;

(β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{\Gamma}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$;



Απάντηση

(α) $\sin \hat{A} = \frac{4}{5}$

(β) $\eta\mu \hat{\Gamma} = \frac{4}{5}$

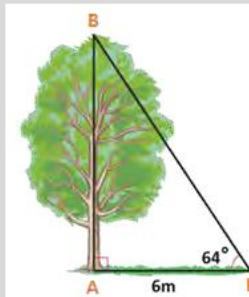
27. Να υπολογίσετε το συνθ και την εφθ οξείας γωνίας θ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

Απάντηση

$\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και αφού η γωνία θ είναι οξεία, έπεται ότι η απέναντι πλευρά της είναι ίση με 3 και η υποτείνουσα του αντίστοιχου ορθογωνίου τριγώνου ίση με 5. Βρίσκουμε (οι αριθμοί 3,4,5 αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα) η προσκείμενη πλευρά της θ είναι ίση με 4 και άρα

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \quad \epsilon\phi\theta = \frac{3}{4}$$

28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64° . Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου.

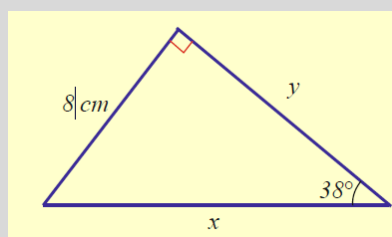


Απάντηση

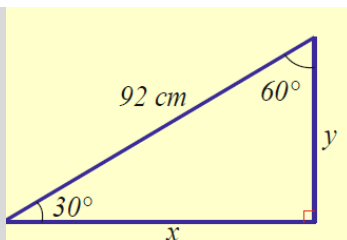
$$\epsilon\phi\hat{A} = \frac{AB}{AG} \Rightarrow \epsilon\phi 68^\circ = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 6\epsilon\phi 68^\circ = 6 \times 2,05 = 12.3 \text{ m}$$

29. Να υπολογίσετε τους αγνώστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α)



(β)



Απάντηση

(α)

$$\eta\mu 38^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{y}{\eta\mu 38^\circ} = 12,99 \text{ cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu 38^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow y = x \cdot \sigma\upsilon\nu 38^\circ = 12,99 \cdot 0,788 = 10,24 \text{ cm}$$

(ή με το Πυθαγόρειο Θεώρημα ή με την $\epsilon\varphi 38^\circ$)

(β)

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{y}{92} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 92 = 46 \text{ cm}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{x}{92} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 92 = 79,67 \text{ cm}$$

Κεφάλαιο 1

Πραγματικοί Αριθμοί

1.1 Η έννοια της ν-οστής ρίζας



Θεωρία

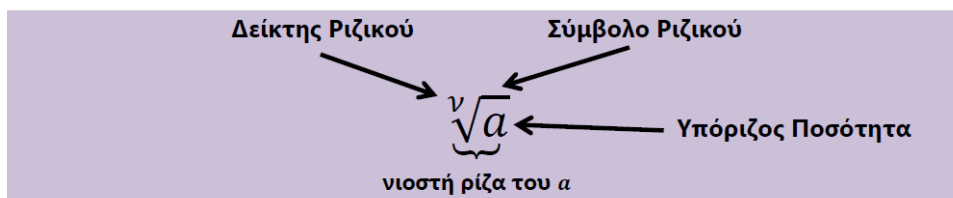
Ορισμός

Η **ν -οστή ρίζα** ενός μη-αρνητικού αριθμού α , όπου n φυσικός αριθμός, είναι ο μη-αρνητικός αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί στη δύναμη με εκθέτη το n , δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$.

Δηλαδή, αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = \alpha$$



Από τον πιο πάνω ορισμό έπονται άμεσα τα πιο κάτω:

$\alpha \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$,

- $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$, διότι $\alpha^1 = \alpha$.
- $\sqrt[n]{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Πράγματι, αν $\sqrt[n]{\alpha} = 0$ τότε $0^n = \alpha \Rightarrow \alpha = 0$ και αντίστροφα, αν $\alpha = 0$, τότε $\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{0} = 0$.

- $\sqrt[n]{1} = 1$, διότι $1^n = 1$.
- $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, διότι $\alpha^n = \alpha^n$.

Διερεύνηση της εξίσωσης $x^n = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$

$\alpha = 0$. Τότε, $x^n = \alpha \Leftrightarrow x = 0$

$\alpha > 0$. Τότε

- Αν n = άρτιος, έχουμε $x^n = \alpha \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{\alpha}$
- Αν n = περιττός, έχουμε $x^n = \alpha \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\alpha}$

$\alpha < 0$. Τότε,

- Αν n = άρτιος, έχουμε ότι η εξίσωση $x^n = \alpha$ είναι αδύνατη.
- Αν n = περιττός, έχουμε $x^n = \alpha \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{|\alpha|}$



Δραστηριότητες σελ. 24 (Η έννοια της νιοστής ρίζας)

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

$$(α) \quad \sqrt{100} \quad (β) \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \quad (γ) \quad \sqrt[4]{81} - \sqrt{81} \quad (δ) \quad \sqrt[5]{0,00032}$$

Απάντηση

$$(α) \quad \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$(β) \quad \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{2}{3}$$

$$(γ) \quad \sqrt[4]{81} - \sqrt{81} = \sqrt[4]{3^4} - \sqrt{9^2} = 3 - 3 = 0$$

$$(δ) \quad \sqrt[5]{0,00032} = \sqrt[5]{32 \cdot 10^{-5}} = \sqrt[5]{\frac{32}{10^5}} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{10^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{10}\right)^5} = \frac{2}{10}$$

2. (α) Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός και να αναφέρετε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερός του.
- (β) Δίνεται ότι $x = \sqrt[3]{25}$ και $y = \sqrt{8}$. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να υπολογίσετε τους αριθμούς x^3 , x^6 , y^2 και y^6 .
- (γ) Με βάση το (β), να συγκρίνετε τα x και y .

Απάντηση

(α) Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ ήταν ακέραιος, δηλαδή, $\sqrt[3]{25} = \alpha$, όπου α ακέραιος. Τότε, από τον ορισμό της κυβικής ρίζας, $25 = \alpha^3$. Όμως, $2^3 = 8$ και $3^3 = 27$ και εφόσον ο αριθμός 25 βρίσκεται ανάμεσα στο 8 και το 27, δεν μπορεί να υπάρχει τέτοιος αριθμός α . Από τον προηγούμενο συλλογισμό, έχουμε ότι ο μικρότερος ακέραιος αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερός του είναι ο 3.

Με άλλα λόγια, το $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος διότι δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός του οποίου ο κύβος να ισούται με 25.

$$(β) \quad \begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{25})^3 = 25 \\ x^6 &= (x^3)^2 = (25)^2 = 625 \\ y^2 &= (\sqrt{8})^2 = 8 \end{aligned}$$

$$y^6 = (y^2)^3 = 8^3 = 512$$

(γ) Με βάση το (β), $x > y$, αφού $x^6 > y^6$.

3. Ένας αριθμός, όταν υψωθεί στην $5^{\text{η}}$ δύναμη, μας δίνει 10.

(α) Να δώσετε τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτόν τον αριθμό.

(β) Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής, να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

Απάντηση

(α) $x^5 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10}$

(β) $x^5 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{10} \approx 1.585$

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες, δίνοντας την απάντησή σας σε μορφή δύναμης:

(α) $\sqrt[3]{5^{36}}$ (β) $\sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}}$ (γ) $\sqrt[4]{2^{31} + 2^{31}}$ (δ) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{5^{36}} = \sqrt[3]{(5^{12})^3} = 5^{12}$

(β) $\sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}} = \sqrt{3^{7+4+19}} = \sqrt{3^{30}} = \sqrt{(3^{15})^2} = 3^{15}$

(γ) $\sqrt[4]{2^{31} + 2^{31}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{31}} = \sqrt[4]{2^{1+31}} = \sqrt[4]{2^{32}} = \sqrt[4]{(2^8)^4} = 2^8$

(δ) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{(7^{30})^3}} = \sqrt[6]{7^{30}} = \sqrt[6]{(7^5)^6} = 7^5$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3^{12}}$ (β) $\sqrt[3]{6^{60}}$ (γ) $\sqrt[5]{\frac{32}{x^{20}}}$, $x > 0$ (δ) $\sqrt[6]{\frac{\beta^{18}}{1000000}}$, $\beta \geq 0$

Απάντηση

(α) $\sqrt{3^{12}} = \sqrt{(3^6)^2} = 3^6$

$$(β) \quad \sqrt[3]{6^{60}} = \sqrt[3]{(6^{20})^3} = 6^{20}$$

$$(γ) \quad \sqrt[5]{\frac{32}{x^{20}}} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{(x^4)^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{x^4}\right)^5} = \frac{2}{x^4}$$

$$(δ) \quad \sqrt[6]{\frac{\beta^{18}}{1000000}} = \sqrt[6]{\frac{(\beta^3)^6}{10^6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{\beta^3}{10}\right)^6} = \frac{\beta^3}{10}$$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(α) \quad x^4 = 16$$

$$(β) \quad 2x^3 = -54$$

$$(γ) \quad 3x^7 - 1 = 383$$

Απάντηση

$$(α) \quad x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm \sqrt[4]{2^4} = \pm 2.$$

$$(β) \quad 2x^3 = -54 \Leftrightarrow x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3$$

$$(γ) \quad 3x^7 - 1 = 383 \Leftrightarrow 3x^7 = 383 + 1 \Leftrightarrow 3x^7 = 384$$

$$\Leftrightarrow x^7 = 128 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{128} = 2$$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(α) \quad x^6 = 1000000$$

$$(β) \quad x^4 = -16$$

$$(γ) \quad 1 - 2x^6 = \frac{31}{32}$$

Απάντηση

$$(α) \quad x^6 = 1000000 \Leftrightarrow x^6 = 10^6 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{10^6} = \pm 10.$$

$$(β) \quad x^4 = -16$$

αδύνατη εξίσωση (στο σύνολο των πραγματικών αριθμών)

$$(γ) \quad 1 - 2x^6 = \frac{31}{32} \Leftrightarrow 1 - \frac{31}{32} = 2x^6 \Leftrightarrow \frac{1}{32} = 2x^6 \Leftrightarrow x^6 = \frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{2^6}} = \pm \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \pm \frac{1}{2}$$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^3 = 2$

(β) $3x^4 + 5 = 11$

(γ) $x^5 + 20 = 10$

Απάντηση

(α) $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$

(β) $3x^4 + 5 = 11 \Leftrightarrow 3x^4 = 11 - 5 \Leftrightarrow 3x^4 = 6 \Leftrightarrow x^4 = 2$

$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{2}$

(γ) $x^5 + 20 = 10 \Leftrightarrow x^5 = 10 - 20 \Leftrightarrow x^5 = -10 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{10}$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $(x + 2)^4 = 81$

(β) $(1 - x)^5 = -1024$

(γ) $2x^3 + 1 = 129$

Απάντηση

(α) $(x + 2)^4 = 81 \Leftrightarrow x + 2 = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3.$

$x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$ και $x + 2 = -3 \Leftrightarrow x = -5$

(β) $(1 - x)^5 = -1024 \Leftrightarrow 1 - x = -\sqrt[5]{1024}$

$\Leftrightarrow 1 - x = -4 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$

(γ) $2x^3 + 1 = 129 \Leftrightarrow 2x^3 = 129 - 1 \Leftrightarrow 2x^3 = 128$

$\Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{2x + 3} = 5$

(β) $\sqrt[3]{3x} = 6$

(γ) $3\sqrt[4]{x} - 2 = 7$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί:

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

$\sqrt{2x + 3} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{2x + 3})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 2x + 3 = 25$
 $\Leftrightarrow 2x = 22 \Leftrightarrow x = 11$ δεκτή.

(β) Περιορισμοί:

$$3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{3x} = 6 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x})^3 = 6^3 \Leftrightarrow 3x = 216 \Leftrightarrow x = 72 \text{ δεκτή.}$$

(γ) Περιορισμοί:

$$x \geq 0$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt[4]{x} - 2 = 7 &\Leftrightarrow 3\sqrt[4]{x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x})^4 = 3^4 \\ &\Leftrightarrow x = 81 \text{ δεκτή.} \end{aligned}$$

11. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά 2, έχει κυβική ρίζα ίση με 10.

Απάντηση

Έστω x ο αριθμός.

Τότε:

$$\sqrt[3]{x-2} = 10 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-2})^3 = 10^3 \Leftrightarrow x-2 = 1000 \Leftrightarrow x = 1002.$$

12. Ποσό €3000 ανατοκίζεται με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια γίνεται €3828,84. Να υπολογίσετε την τιμή του τ από την εξίσωση:

$$3000(1+\tau)^5 = 3828,84$$

Απάντηση

Η εξίσωση που μας δίνεται είναι ο ανατοκισμός του ποσού 3000 με επιτόκιο $\tau\%$ και σε 5 χρόνια.

$$3000(1+\tau)^5 = 3828,84 \Leftrightarrow (1+\tau)^5 = \frac{3828,84}{3000}$$

$$\Leftrightarrow (1+\tau)^5 = 1,27628 \Leftrightarrow 1+\tau = \sqrt[5]{1,27628}$$

$$\Leftrightarrow 1+\tau = 1,05 \Leftrightarrow \tau = 0,05 = 5\%$$

1.2 Ιδιότητες νιοστής ρίζας



Θεωρία

Οι πιο κάτω ιδιότητες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της νιοστής ρίζας:

αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = \alpha$$

και επιβάλλεται να τις δουλέψει ο μαθητής για να αντιληφθεί πως δουλεύει στην πράξη ο ορισμός αυτός.

Ιδιότητα 1

$$(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Θέτω $x = \sqrt[n]{\alpha}$. Τότε, δυνάμει του ορισμού,

$$\sqrt[n]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^n = \alpha,$$

δηλαδή

$$(\sqrt[n]{\alpha})^n = x = \alpha.$$

Ιδιότητα 2

$$\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

όπου $\alpha, \beta \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων¹, έχουμε ότι:

$$(\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n \stackrel{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \alpha \cdot \beta$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta}$$

Ιδιότητα 3

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$$

όπου $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ και $n \in \mathbb{N}$.

¹ $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων², έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}\right)^v = \frac{(\sqrt[n]{\alpha})^v}{(\sqrt[n]{\beta})^v} \stackrel{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \frac{\alpha}{\beta}$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}}$$

Ιδιότητα 4

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot n]{\alpha}$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $\mu, n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από τις ιδιότητες των δυνάμεων³, έχουμε ότι:

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}}\right)^{\mu \cdot n} = \left[\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^{\mu}\right]^n = (\sqrt[n]{\alpha})^{\mu \cdot n} \stackrel{\text{Ιδιότητα 1}}{=} \alpha$$

και άρα, από τον ορισμό της νιοστής ρίζας,

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot n]{\alpha}$$

Ιδιότητα 5

$$\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu \cdot \rho}}} = \sqrt[n]{\alpha^{\rho}}$$

όπου $\alpha \geq 0$ και $\mu, n, \rho \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη

Από την ιδιότητα 4,

$$\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu \cdot \rho}}} = \sqrt[n]{\sqrt[\mu]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[n]{\alpha^{\rho}}$$

² $\left(\frac{x}{y}\right)^v = \frac{x^v}{y^v}$
³ $(\alpha^{\mu})^v = \alpha^{\mu \cdot v}$



Δραστηριότητες σελ. 30-31 (Ιδιότητες νιοστής ρίζας)

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{4 + 9 + 6^2}$

(β) $\sqrt{10^2 - 8^2}$

(γ) $\sqrt{(4 + \sqrt{5})^2}$

(δ) $\sqrt[3]{108:4}$

(ε) $\sqrt[4]{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^4}$

(στ) $\sqrt[5]{16: \frac{1}{\sqrt[5]{2}}}$

Απάντηση

(α) $\sqrt{4 + 9 + 6^2} = \sqrt{13 + 36} = \sqrt{49} = 7$

(β) $\sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

(γ) $\sqrt{(4 + \sqrt{5})^2} = 4 + \sqrt{5}$

(δ) $\sqrt[3]{108:4} = \sqrt[3]{108:4} = \sqrt[3]{27} = 3$

(ε) $\sqrt[4]{(\sqrt{6} - \sqrt{7})^4} = \sqrt{6} - \sqrt{7}$

(στ) $\sqrt[5]{16: \frac{1}{\sqrt[5]{2}}} = \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2$

2. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt[3]{8x^3}, x > 0$

(β) $\sqrt{4x^4y^{14}}$

(γ) $\sqrt[4]{-16a^4}, a > 0$

(δ) $\sqrt[5]{2y} \cdot \sqrt[5]{8y^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{27}}, y > 0$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{(2x)^3} = 2x$

(β) $\sqrt{4x^4y^{14}} = \sqrt{(2x^2y^7)^2} = 2x^2y^7$

(γ) $\sqrt[4]{-16a^4} = \sqrt[4]{-(2a)^4}$
Η ρίζα δεν είναι πραγματικός αριθμός.

$$\begin{aligned}
 (\delta) \quad & \sqrt[5]{2y} \cdot \sqrt[5]{8y^3} \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{27}} = \sqrt[5]{2y \cdot 8y^3 \cdot \frac{2y}{27}} = \sqrt[5]{32y^5 \cdot \frac{1}{27}} \\
 & = \sqrt[5]{32y^5} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \sqrt[5]{(2y)^5} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \frac{2y}{\sqrt[5]{27}}
 \end{aligned}$$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} & (\beta) \quad & \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{128} & (\gamma) \quad & \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{2} \\
 (\delta) \quad & \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3}, \alpha \geq 0 & (\epsilon) \quad & \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^{10}}, x \geq 0 & (\sigma\tau) \quad & \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{32}}
 \end{aligned}$$

Απάντηση

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4 \cdot 8} = \sqrt[5]{32} = 2 \\
 (\beta) \quad & \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2 \cdot 128} = \sqrt[3]{1 \cdot 64} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} \\
 (\gamma) \quad & \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{24 \cdot 2}{3}} = \sqrt{16} = 4 \\
 (\delta) \quad & \sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} = \sqrt[4]{\alpha \cdot \alpha^3} = \sqrt[4]{\alpha^4} = \alpha \\
 (\epsilon) \quad & \sqrt[6]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x^{10}} = \sqrt[6]{x^2 \cdot x^{10}} = \sqrt[6]{x^{12}} = \sqrt[6]{(x^2)^6} = x^2 \\
 (\sigma\tau) \quad & \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{32}} = \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{200} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{200 \cdot 2} \\
 & = 2\sqrt{400} = 2 \cdot 20 = 40
 \end{aligned}$$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

$$\begin{aligned}
 (\alpha) \quad & \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 & \text{ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ} \\
 (\beta) \quad & \sqrt{90} = 9\sqrt{10} & \text{ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ} \\
 (\gamma) \quad & \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (x, y > 0, \quad n \text{ φυσικός}) & \text{ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ} \\
 (\delta) \quad & \sqrt{3} + \sqrt{7} = \sqrt{10} & \text{ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ}
 \end{aligned}$$

(ε)	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = 4$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	$\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = 100$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	$\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

- (α) **ΣΩΣΤΟ:**
 $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$
- (β) **ΛΑΘΟΣ:**
 $9\sqrt{10} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{81 \cdot 10} = \sqrt{810} \neq \sqrt{90}$
- (γ) **ΣΩΣΤΟ:**
 Είναι Θεωρία.
- (δ) **ΛΑΘΟΣ:**
 $\sqrt{3} + \sqrt{7} > \sqrt{10}$
 (Στην υπολογιστική. Αργότερα θα μάθουμε πως να συγκρίνουμε αριθμούς).
- (ε) **ΣΩΣΤΟ:**
 $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$
- (στ) **ΛΑΘΟΣ:**
 $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \neq 7$
- (ζ) **ΛΑΘΟΣ:**
 $\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \neq 100$
- (η) **ΣΩΣΤΟ:**
 $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

- | | | |
|---|--|--|
| (α) $\sqrt[5]{64}$ | (β) $\sqrt{18\alpha^5}, \alpha > 0$ | (γ) $\sqrt[4]{x^{24}}, x \geq 0$ |
| (δ) $\sqrt[3]{16\alpha^4}, \alpha \geq 0$ | (ε) $\sqrt{9a^2\beta^3\gamma^5}, \alpha, \beta, \gamma \geq 0$ | (στ) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^6}}, x > 0$ |

Απάντηση

$$(α) \quad \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{2 \cdot 32} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{32} = 2\sqrt[5]{2}$$

$$(β) \quad \sqrt{18\alpha^5} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^4} \cdot \sqrt{\alpha} \\ = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(\alpha^2)^2} \cdot \sqrt{\alpha} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \alpha^2 = 3\alpha^2\sqrt{2\alpha}$$

$$(γ) \quad \sqrt[4]{\sqrt{x^{24}}} = \sqrt[4]{\sqrt{(x^6)^4}} = \sqrt{x^6} = \sqrt{x^{2 \cdot 3}} = x^3$$

$$(δ) \quad \sqrt[3]{16\alpha^4} = \sqrt[3]{8 \cdot 2\alpha^4} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^3 \cdot \alpha} \\ = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha^3} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \alpha = 2\alpha\sqrt[3]{2\alpha}$$

$$(ε) \quad \sqrt{9\alpha^2\beta^3\gamma^5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^3} \cdot \sqrt{\gamma^5} = 3\alpha\sqrt{\beta^2 \cdot \beta} \cdot \sqrt{\gamma^4 \cdot \gamma} \\ 3\alpha\sqrt{\beta^2} \cdot \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\gamma^4} \cdot \sqrt{\gamma} = 3\alpha\beta\gamma^2\sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\gamma} = 3\alpha\beta\gamma^2\sqrt{\beta\gamma}$$

$$(στ) \quad \sqrt[3]{\frac{16}{x^6}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 2}{x^6}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{x^6}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^3} = \frac{2}{x^2}\sqrt[3]{2}$$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(α) \quad \sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{5}$$

$$(β) \quad (2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{27}$$

$$(γ) \quad \sqrt{2 + \sqrt[3]{2^5 - 5} + \sqrt{121}}$$

$$(δ) \quad \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7\beta^{18}}}$$

Απάντηση

$$(α) \quad \sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} + 3\sqrt{4 \cdot 5} - \sqrt{5} \\ = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 3 \cdot 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \\ = 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

$$(β) \quad \text{1ος τρόπος} \\ (2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{27} \\ = (2\sqrt{3 \cdot 25} + 3\sqrt{3 \cdot 16} - 9\sqrt{3} + \sqrt{9 \cdot 3}) : \sqrt{27} \\ = (2\sqrt{3} \cdot \sqrt{25} + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{16} - 9\sqrt{3} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}) : \sqrt{27}$$

$$= (2\sqrt{3} \cdot 5 + 3\sqrt{3} \cdot 4 - 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) : \sqrt{27}$$

$$= (10\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) : \sqrt{27} = 16\sqrt{3} : \sqrt{27} = 16\sqrt{3 \cdot 27} = 16\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{16}{3}$$

2^{ος} τρόπος

$$(2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + \sqrt{27}) : \sqrt{27}$$

$$= 2\sqrt{75} : \sqrt{27} + 3\sqrt{48} : \sqrt{27} - 9\sqrt{3} : \sqrt{27} + \sqrt{27} : \sqrt{27}$$

$$= 2\sqrt{75 \cdot 27} + 3\sqrt{48 \cdot 27} - 9\sqrt{3 \cdot 27} + 1$$

$$= 2\sqrt{\frac{25}{9}} + 3\sqrt{\frac{16}{9}} - 9\sqrt{\frac{1}{9}} + 1 = 2\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + 3\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} - 9\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} - 9 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{16}{3}$$

$$(Y) \quad \sqrt{2 + \sqrt[3]{2^5 - 5} + \sqrt{121}} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{32 - 5} + 11} = \sqrt{2 + \sqrt[3]{27} + 11}$$

$$= \sqrt{2 + 3 + 11} = \sqrt{16} = 4$$

$$(δ) \quad \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7 \beta^{18}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha^7 \beta^{18}}} = \sqrt[6]{\alpha^7 \beta^{18}} = \sqrt[6]{\alpha^7} \cdot \sqrt[6]{\beta^{18}} = \sqrt[6]{\alpha^6 \cdot \alpha} \cdot \sqrt[6]{(\beta^3)^6}$$

$$= \sqrt[6]{\alpha^6} \cdot \sqrt[6]{\alpha} \cdot \beta^3 = \alpha \beta^3 \sqrt[6]{\alpha}$$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$(α) \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}$$

$$(β) \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}$$

$$(Y) \quad \sqrt[40]{\alpha^{16}}, \alpha > 0$$

$$(δ) \quad \sqrt{(7 + \sqrt{13}) \cdot \sqrt{(7 - \sqrt{13})}}$$

$$(ε) \quad (2\sqrt{3} + 3)^2$$

$$(στ) \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{16}}$$

$$(ζ) \quad \sqrt{x^2 + 9 - 6\sqrt{x}}, x > 3$$

Απάντηση

$$(α) \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[3 \cdot 4]{6} = \sqrt[12]{6}$$

$$(\beta) \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3 \cdot 3 \cdot 3]{3} = \sqrt[27]{3}$$

$$(\gamma) \quad \sqrt[40]{\alpha^{16}} = \sqrt[8 \cdot 5]{\alpha^{8 \cdot 2}} = \sqrt[5]{\alpha^2}$$

$$(\delta) \quad \sqrt{(7 + \sqrt{13})} \cdot \sqrt{(7 - \sqrt{13})} = \sqrt{(7 + \sqrt{13}) \cdot (7 - \sqrt{13})}$$

$$= \sqrt{7^2 - (\sqrt{13})^2} = \sqrt{49 - 13} = \sqrt{36} = 6$$

$$(\epsilon) \quad (2\sqrt{3} + 3)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 + 3^2 = 4 \cdot 3 + 12\sqrt{3} + 9$$

$$= 21 + 12\sqrt{3}$$

$$(\sigma\tau) \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\sqrt[4]{4 \cdot 16}} = \sqrt[6]{4 \cdot 16} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$(\zeta) \quad \sqrt{x^2 + 9 - 6\sqrt{x}} = \sqrt{x^2 - 6\sqrt{x} + 9} = \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{x} + 9^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x} - 3)^2} = \sqrt{x} - 3$$

8. Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 - \sqrt{2}$, να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

$$(\alpha) \quad x + y \quad (\beta) \quad x^2 - y^2 \quad (\gamma) \quad xy \quad (\delta) \quad x^2 + y^2$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad x + y = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

$$(\beta) \quad x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = [(1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2})][(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})]$$

$$= (1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}$$

$$(\gamma) \quad xy = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1$$

(δ) 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 1 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \xrightarrow{(α),(γ)} 2^2 = x^2 + 2(-1) + y^2 \\ \Rightarrow 4 &= -2 + x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 6 \end{aligned}$$

9. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

(α) $\alpha^3 \sqrt[3]{\beta}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$

(β) $\sqrt[3]{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{N}$

Απάντηση

(α)
$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{135} + \sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} + \sqrt[3]{27 \cdot 5} + \sqrt[3]{64 \cdot 5} \\ &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{5} \\ &= 2\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} + 4\sqrt[3]{5} = 9\sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

(β)
$$A = 9\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{9^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{3645}$$

10. Αν $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, να δείξετε ότι $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+(1+\sqrt{5})}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi \end{aligned}$$

11. Να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός α είναι θετικός ρητός.

Απάντηση

$$\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha + 2) + 1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$$

12. Οι δύο κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη $(4 + \sqrt{2})$ και $(4 - \sqrt{2})$. Να αποδείξετε ότι το μήκος της υποτείνουσάς του είναι φυσικός αριθμός.

Απάντηση

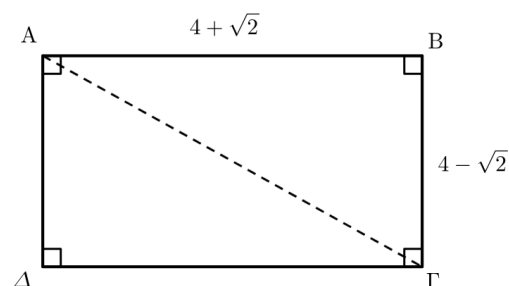
Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$(4 + \sqrt{2})^2 + (4 - \sqrt{2})^2 = (ΑΓ)^2$$

$$\Rightarrow 4^2 + 8\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 8\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = (ΑΓ)^2$$

$$\Rightarrow 16 + 2 + 16 + 2 = (ΑΓ)^2$$

$$\Rightarrow (ΑΓ)^2 = 36 \Rightarrow (ΑΓ) = \sqrt{36} = 6$$



1.3 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη



Θεωρία

Έστω μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$ και έστω $\alpha \geq 0$.

Η παράσταση της μορφής

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

λέγεται **δύναμη με ρητό εκθέτη**.

Πρόταση

Έστω $\alpha \geq 0$ και μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$. Τότε,

$$(\alpha) \quad \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

$$(\beta) \quad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu}$$

Απόδειξη

(α) Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας θετικού πραγματικού αριθμού,

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$$

(β) Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας θετικού πραγματικού αριθμού,

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Μπορούμε λοιπόν να δούμε τον αριθμό $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ με δύο τρόπους:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \begin{cases} (\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \\ \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\mu} \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

- $\alpha^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}$ και $\alpha^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha}$, όπου $\alpha \geq 0$.

- $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$, όπου μ, ν ακέραιοι αριθμοί με $\nu > 0$.

- Για $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$



Δραστηριότητες σελ. 33-34 (Δυνάμεις με ρητό εκθέτη)

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω ριζικά σε δύναμη με ρητό εκθέτη:

(α) $\sqrt[3]{5^2}$

(β) $\sqrt{3}$

(γ) $\sqrt[5]{10000}$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

(β) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

(γ) $\sqrt[5]{10000} = \sqrt[5]{10^4} = 10^{\frac{4}{5}}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $16^{\frac{1}{2}}$

(β) $8^{\frac{1}{3}}$

(γ) $81^{\frac{1}{4}}$

(δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

(ε) $9^{-\frac{1}{2}}$

(στ) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$

(η) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$

(θ) $8^{\frac{10}{6}}$

Απάντηση

(α) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

(β) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

(γ) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

(ε) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

(στ) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^2} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^5}\right)^2} = \sqrt[5]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^2} = \sqrt[5]{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{9^2}{8^2}\right)^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]^3} = \sqrt{\left[\left(\frac{9}{8}\right)^3\right]^2} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{9^3}{8^3} = \frac{729}{512}$

ή $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3} = \left(\frac{81}{64}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{4 \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{512}$

$$(η) \quad \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^2} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

ή

$$\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$(θ) \quad 8^{\frac{10}{6}} = 8^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{8^5} = \sqrt[3]{(2^3)^5} = \sqrt[3]{(2^5)^3} = 2^5 = 32$$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27}$ είναι φυσικός αριθμός.

Απάντηση

$$\begin{aligned} A &= 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{3^3} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3^3} \\ &= \sqrt[4]{2^4} + \sqrt{\frac{3^3}{3}} = 2 + \sqrt{3^2} = 2 + 9 = 11 \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) $\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) Η λύση της εξίσωσης $x^{\frac{1}{2}} = 3$, $x > 0$ είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(στ) Η εξίσωση $x^3 = -27$ είναι αδύνατη. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ζ) $\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΣΩΣΤΟ:**

Εξ ορισμού είναι $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

(β) **ΣΩΣΤΟ:**

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2.$$

(γ) **ΛΑΘΟΣ:**

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{(2^2)^3} = 2^2 = 4 \neq \frac{1}{4}$$

(δ) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

(ε) **ΛΑΘΟΣ:**

$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2 \Leftrightarrow x = 9$$

(στ) **ΛΑΘΟΣ:**

Η εξίσωση λύνεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

$$x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{27} = -3$$

(ζ) **“ΛΑΘΟΣ”:**

$$\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

ενώ ο αριθμός $(-8)^{\frac{2}{3}}$ δεν έχει νόημα αφού $-8 < 0$ και εμείς ορίσαμε δυνάμεις με ρητό εκθέτη θετικό αριθμό.

5. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

(β) $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}}$

(γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$

(δ) $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}$

Απάντηση

(α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{5^2} = 5$

(β) $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18-1}{5}} = 2^{\frac{17}{5}} = 2^{\frac{15}{5} + \frac{2}{5}} = 2^{3 + \frac{2}{5}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{2}{5}}$
 $= 8 \cdot \sqrt[5]{2^2} = 8 \cdot \sqrt[5]{4}$

ή
 $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{18-1}{5}} = 2^{\frac{17}{5}} = \sqrt[5]{2^{17}}$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad & \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{24} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{24} \\ & = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 24}{3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 8} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{(3 \cdot 2)^3} = \sqrt[3]{6^3} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta) \quad & 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{1+\frac{1}{2}} + 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \\ & 2^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 7 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις πραγματικές τιμές του x :

$$(\alpha) \quad x^{\frac{1}{2}} = 5, \quad x \geq 0$$

$$(\beta) \quad x^{\frac{1}{3}} = 2, \quad x > 0$$

$$(\gamma) \quad 1 + x^{\frac{2}{3}} = 5, \quad x \geq 0$$

$$(\delta) \quad 5(x+1)^{\frac{1}{3}} = 20, \quad x \geq -1$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad x^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x = 25 \quad (\text{δεκτή})$$

$$(\beta) \quad x^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow x = 8 \quad (\text{δεκτή})$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad & 1 + x^{\frac{2}{3}} = 5 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (4^3)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8 \\ & (\text{δεκτή}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta) \quad & 5(x+1)^{\frac{1}{3}} = 20 \Leftrightarrow (x+1)^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = 4^3 \Leftrightarrow x+1 = 64 \\ & \Leftrightarrow x = 63 \quad (\text{δεκτή}) \end{aligned}$$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για τις πραγματικές τιμές του x :

$$(\alpha) \quad x^{-\frac{1}{2}} = 4, \quad x > 0$$

$$(\beta) \quad x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}, \quad x > 0$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad x^{-\frac{1}{2}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 4^{-2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \quad (\text{δεκτή})$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad & x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 27^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9 \\ & (\text{δεκτή}) \end{aligned}$$

8. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε το χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διένυσε είναι 640 m.

Απάντηση

$$s(t) = 640 \Leftrightarrow 10t^{\frac{3}{2}} = 640 \Leftrightarrow t^{\frac{3}{2}} = 64 \Leftrightarrow \left(t^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (4^3)^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow t = 4^2 = 16 \text{ sec}$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Απάντηση

$$\left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2 \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \beta^{\frac{1}{2}} + \left(\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha + 2(\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

1.4 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό



Θεωρία

Αποδεικνύεται ότι:

- Αν α ρητός αριθμός και β άρρητος αριθμός, τότε ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι άρρητος.
- Αν α ρητός αριθμός, $\alpha \neq 0$ και β άρρητος αριθμός, τότε ο αριθμός $\alpha + \beta$ είναι άρρητος.
- Δεν ισχύει ότι το άθροισμα δύο άρρητων είναι άρρητος αριθμός. Για παράδειγμα, αν $\alpha = \sqrt{2}$ και $\beta = -\sqrt{2}$, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι άρρητοι, αλλά ο αριθμός $\alpha + \beta = 0$ είναι ρητός. Όμως, $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$, $\sqrt{3} \pm \sqrt{5}$ κ.ο.κ. είναι άρρητοι αριθμοί.

Παράσταση A	Συζυγής παράσταση B	Γινόμενο $A \cdot B$
$\frac{\alpha}{\beta}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta \neq 0$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$
$\alpha + \kappa\sqrt{\beta}$ $\alpha, \kappa \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$	$\alpha - \kappa\sqrt{\beta}$	$(\alpha + \kappa\sqrt{\beta}) \cdot (\alpha - \kappa\sqrt{\beta})$ $= \alpha^2 - (\kappa\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2 - \kappa^2\beta^2$
$\lambda\sqrt{\alpha} + \mu\sqrt{\beta}$ $\alpha, \beta \geq 0$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda\sqrt{\alpha} - \mu\sqrt{\beta}$	$(\lambda\sqrt{\alpha} + \mu\sqrt{\beta}) \cdot (\lambda\sqrt{\alpha} - \mu\sqrt{\beta})$ $= (\lambda\sqrt{\alpha})^2 - (\mu\sqrt{\beta})^2$ $= \lambda^2\alpha^2 - \mu^2\beta^2$

Παράδειγμα

Παράσταση A	Συζυγής παράσταση B	Γινόμενο $A \cdot B$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
$3 + 2\sqrt{5}$	$3 - 2\sqrt{5}$	$(3 + 2\sqrt{5}) \cdot (3 - 2\sqrt{5})$ $= 3^2 - (2\sqrt{5})^2 = 9 - 4 \cdot 25$ $= 91$
$2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}$	$2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$	$(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})$ $= (2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2$ $= 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 2$



Δραστηριότητες σελ. 40-41 (Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό)

1. Δίνεται ο αριθμός $x = \sqrt{7} - \sqrt{2}$.

(α) Να γράψετε τον αριθμό y , ο οποίος είναι συζυγής αριθμός με τον x .

(β) Να δείξετε ότι το γινόμενο xy είναι ακέραιος αριθμός.

Απάντηση

(α) $y = \sqrt{7} + \sqrt{2}$

(β) $xy = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5 \in \mathbb{Z}$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Ο αριθμός $3 + \sqrt{2}$ έχει συζυγή τον αριθμό $\sqrt{3} + 2$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(β) Ένα κλάσμα με ρητό παρονομαστή, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\frac{2}{7\sqrt{6}}$, είναι και το $\frac{\sqrt{6}}{21}$. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(γ) Οι αριθμοί $(\sqrt{15} - \sqrt{13})$ και $(\frac{2}{\sqrt{15} + \sqrt{13}})$ είναι ίσοι. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(δ) Οι αριθμοί $(\sqrt{17} + 4)$ και $(\sqrt{17} - 4)$ είναι αντίστροφοι. ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

(ε) Αν $x \geq 0$, τότε ισχύει ότι:
 $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}-2$ ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΛΑΘΟΣ:**
Ο αριθμός $3 + \sqrt{2}$ έχει συζυγή τον αριθμό $3 - \sqrt{2}$.

(β) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\frac{2}{7\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{7(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{6}}{7 \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{7 \cdot 3} = \frac{\sqrt{6}}{21}$$

(γ) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x})^2 - 2^2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{x-4} = \sqrt{x}-2$$

3. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

(β) $\frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}}$

(γ) $\frac{20}{\sqrt{5}}$

(δ) $\frac{9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}$

(ε) $\sqrt{\frac{5}{6}}$

Απάντηση

(α) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$

(β) $\frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot (\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(γ) $\frac{20}{\sqrt{5}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}$

(δ) $\frac{9}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{9 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{9\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

(ε) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{5 \cdot 6}}{6} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

4. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{1 + \sqrt{2}}$

(β) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$

(γ) $\frac{2}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}$

(δ) $\frac{9}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$

(ε) $\frac{1 - \alpha}{1 - \sqrt{\alpha}}, \alpha > 0, \alpha \neq 1$

(στ) $\frac{(x - y)^2}{x + y + 2\sqrt{xy}}, x, y > 0, x \neq y$

Απάντηση

(α) $\frac{5}{1 + \sqrt{2}} = \frac{5(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{5(1 - \sqrt{2})}{1^2 - 2^2} = \frac{5(1 - \sqrt{2})}{-1} = 5(\sqrt{2} - 1)$

(β) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{3})^2}$

$$= \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{6 - 3} = \frac{3(\sqrt{6} + \sqrt{3})}{3} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{(Υ)} \quad \frac{2}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}} &= \frac{2 \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}{(\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}})^2} \\ &= \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})} \\ &= \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{6 - 5} \\ &= \frac{2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{2} = 2\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{5}}(\sqrt{6} - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Δ)} \quad \frac{9}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} &= \frac{9(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})} = \frac{9(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{9(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{4 \cdot 3 - 3 \cdot 2} = \frac{9(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{12 - 6} = \frac{9(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{6} \\ &= \frac{3(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(Ε)} \quad \frac{1 - \alpha}{1 - \sqrt{\alpha}} &= \frac{1 - \alpha}{1 - \sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 + \sqrt{\alpha}} = \frac{(1 - \alpha)(1 + \sqrt{\alpha})}{(1 - \sqrt{\alpha})(1 + \sqrt{\alpha})} \\ &= \frac{(1 - \alpha)(1 + \sqrt{\alpha})}{1 - (\sqrt{\alpha})^2} = \frac{(1 - \alpha)(1 + \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} = 1 + \sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

(στ) Στην άσκηση 9 της προηγούμενης παραγράφου, δείξαμε ότι:

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \left(\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{(x - y)^2}{x + y + 2\sqrt{xy}} &= \frac{(x - y)^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^2 = \left[\frac{(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}\right]^2 \\ &= \left[\frac{(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}\right]^2 = \left[\frac{(x - y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}\right]^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \\ &= \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Διαφορετικά:

$$\frac{(x - y)^2}{x + y + 2\sqrt{xy}} = \frac{(x - y)^2(x + y - 2\sqrt{xy})}{(x + y - 2\sqrt{xy})(x + y + 2\sqrt{xy})} = \dots$$

5. Να δείξετε ότι το άθροισμα

$$A = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{8}}$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή $\kappa\sqrt{2}$, όπου το κ είναι ένας φυσικός αριθμός.

Απάντηση

$$A = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{16}{\sqrt{8}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{16 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} + \frac{16\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} + \frac{16\sqrt{8}}{8}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 7\sqrt{2}.$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα:

(α) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{12 - \sqrt{2}}{2}$

(β) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$

(γ) $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$

(δ) $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

Απάντηση

(α) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{12 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} + \frac{12 - \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{12 - \sqrt{2}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2} + 12 - \sqrt{2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

(β) $\frac{1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{6}{3^2 - (\sqrt{5})^2}$

$$= \frac{6}{9 - 5} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(γ) $\frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}$

$$= \frac{2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta) \quad \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} \\
 \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} &= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}
 \end{aligned}$$

7. Να δείξετε ότι:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 4$$

Απάντηση

$$\begin{aligned}
 \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} &= \frac{(3+\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} = \frac{3^2 + 6\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 3^2 - 6\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{9 + 3 + 9 + 3}{9 - 3} = \frac{24}{6} = 4
 \end{aligned}$$



Δραστηριότητες σελ. 50-52 (Διάταξη Πραγματικών Αριθμών)

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α)	Αν $\alpha > 3$ και $\beta > 2$, τότε $\alpha\beta > 6$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $\kappa > \lambda$ και $\lambda > -2$, τότε $\kappa + \lambda > 1$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $\alpha > -3$, τότε $\alpha^2 > 9$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 3$, τότε $\alpha > 3\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $\alpha - \beta > 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, τότε $\alpha^2 - \beta^2 > 0$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 < \beta^2$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(η)	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(θ)	Αν $x > y$, τότε $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$, ($x, y \geq 0$, n φυσικός).	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ι)	Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Απάντηση

(α) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\text{Άμεσο από την ιδιότητα 3: } \begin{cases} \alpha > 3 > 0 \\ \beta > 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 3 \cdot 2 = 6$$

(β) **ΣΩΣΤΟ:**

$$\text{Από την ιδιότητα 2: } \begin{cases} \kappa > 5 \\ \lambda > -2 \end{cases} \Rightarrow \kappa + \lambda > 5 - 2 \Rightarrow \kappa + \lambda > 3 > 1$$

(γ) **ΛΑΘΟΣ:**

$$\text{Για παράδειγμα, αν } \alpha = -2 > -3, \text{ τότε } \alpha^2 = (-2)^2 = 4 < 9$$

(δ) **ΛΑΘΟΣ:**

$$\text{Για παράδειγμα αν } \alpha = -10 \text{ και } \beta = -2, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} = 5 > 3, \\ \text{αλλά } \alpha = -10 < 3\beta = -6$$

(ε) **ΣΩΣΤΟ:**

$\alpha - \beta > 0 \Rightarrow \alpha > \beta$ και αρα από την ιδιότητα 3, αφού $\alpha, \beta > 0$,
έπεται ότι $\alpha \cdot \alpha > \beta \cdot \beta$, δηλαδή $\alpha^2 - \beta^2 > 0$

(στ) **ΛΑΘΟΣ:**

Για παράδειγμα αν $\alpha = -\frac{1}{3}$ και $\beta = -\frac{1}{4}$, τότε $\alpha < \beta < 0$,
αλλά $\alpha^2 = \frac{1}{9} > \frac{1}{16} = \beta^2$

(ζ) **ΛΑΘΟΣ:**

Για παράδειγμα αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, τότε $\underbrace{25}_{\alpha^2} > \underbrace{(-5) \cdot 1}_{\alpha\beta} = -5$,

αλλά $\underbrace{\alpha}_{-5} < \underbrace{\beta}_1$.

(η) **ΛΑΘΟΣ:**

Για παράδειγμα αν $\alpha = 2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 4$, $\delta = 3$, τότε

$$\begin{cases} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha - \gamma = -2 < 1 = 4 - 3 = \gamma - \delta$$

(θ) **ΛΑΘΟΣ:**

Για παράδειγμα αν $\alpha = 25 > 0$, $\beta = 16$ και $\gamma = 2$, τότε $\alpha > \beta$ και
 $\underbrace{\sqrt{25}}_{\sqrt{\alpha}} = 5 > \underbrace{4}_{\sqrt{\beta}}$.

(ι) **ΣΩΣΤΟ:**

Άμεσο από την ιδιότητα 5.

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, τότε:

A. $-\alpha\beta < 0$ B. $\alpha - \beta > 0$ Γ. $\alpha\beta < 0$ Δ. $\frac{\alpha}{\beta} > 0$

(β) Αν $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq 1$, $y \geq 8$, τότε:

A. $xy \leq 8$ B. $xy \geq -8$ Γ. $x + y \geq 7$ Δ. $x - y \leq -9$

(γ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $xy < 0$ B. $\frac{1}{x} \geq 4$ Γ. $x + y \leq -1$ Δ. $x - y \leq 9$

(δ) Αν $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, με $x \geq 4$ και $y \leq -5$, τότε:

A. $x^2 \leq 9$

B. $y^2 \leq 9$

Γ. $x - y \leq 6$

Δ. $\frac{1}{x} > 0$

Απάντηση

(α) Σωστό το Δ: $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ (Άμεσο από την ιδιότητα 5)

(β) Σωστό το Δ: $x - y \leq -9$. Πράγματι, $y \geq 8 \Rightarrow -y \leq -8$ και άρα έχουμε:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ -y \leq -8 \end{cases} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} x + (-y) \leq (-1) + (-8), \quad \text{δηλ. } x - y \leq -9$$

(γ) Σωστό το Α: $x \cdot y < 0$. Πράγματι, $y \leq -5 \Rightarrow -y \geq 5$. Συνεπώς,

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ -y \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 3}} x \cdot (-y) \geq 4 \cdot 5 = 20, \text{ δηλ. } -x \cdot y \geq 5 > 0$$

και άρα $x \cdot y < 0$.

Σημείωση: η υπόθεση το $x \neq 0$ όπως δίνεται στην εκφώνηση του σχολικού βιβλίου είναι περιττή αφού υποθέτουμε ότι $x \geq 4$.

(δ) Σωστό το Δ: $\frac{1}{x} > 0$ αφού $x \geq 4 > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{4}$.

Σημείωση: η υπόθεση το $x \neq 0$ όπως δίνεται στην εκφώνηση του σχολικού βιβλίου είναι περιττή αφού υποθέτουμε ότι $x \geq 4$.

3. Να συμπληρώσετε με το κατάλληλο σύμβολο $<, =, >$, ώστε οι σχέσεις που θα προκύψουν να είναι αληθείς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας:

(α) $24^{\frac{3}{5}} \dots 15^{\frac{3}{5}}$

(β) $17^{-\frac{3}{5}} \dots 15^{-\frac{3}{5}}$

(γ) $0,7^{\frac{5}{7}} \dots 0,4^{\frac{5}{7}}$

(δ) $0,3^{-\frac{3}{5}} \dots 0,5^{-\frac{3}{5}}$

(ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} \dots -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$

Απάντηση

(α) $24^{\frac{3}{5}} > 15^{\frac{3}{5}}$.

Πράγματι,

$$24 > 15 > 0 \xrightarrow{\text{ιδιότητα 7}} 24^{\frac{1}{5}} > 15^{\frac{1}{5}} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 6}} \left(24^{\frac{1}{5}}\right)^3 > \left(15^{\frac{1}{5}}\right)^3, \text{ δηλ. } 24^{\frac{3}{5}} > 15^{\frac{3}{5}}$$

(β) $17^{-\frac{3}{5}} < 15^{-\frac{3}{5}}$.

Πράγματι,

$$17^{-\frac{3}{5}} < 15^{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{3}{5}}$$

η οποία είναι αληθής (προχωράμε όπως ακριβώς στο (α))

(γ) $0,7^{\frac{5}{7}} > 0,4^{\frac{5}{7}}$.

Πράγματι, έπεται όπως στα προηγούμενα, αφού $0,7 > 0,4$.

(δ) $0,3^{-\frac{3}{5}} > 0,5^{-\frac{3}{5}}$.

Πράγματι,

$$0,3^{-\frac{3}{5}} > 0,5^{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{0,3}\right)^{\frac{3}{5}} > \left(\frac{1}{0,5}\right)^{\frac{3}{5}}$$

η οποία είναι αληθής (προχωράμε όπως ακριβώς στα προηγούμενα)

(ε) $-\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} < -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}$.

Πράγματι,

$$\frac{2}{7} > \frac{2}{9} > 0 \xRightarrow{\text{ιδιότητα 7}} \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \xRightarrow{\text{ιδιότητα 6}} \left(\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{11} > \left(\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{11}$$

δηλαδή:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} > \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}} \text{ και αρα } -\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{11}{2}} < -\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{11}{2}}.$$

4. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$, τότε:

A. $\alpha < \beta < \gamma$ **B.** $\alpha < \gamma < \beta$ **Γ.** $\gamma < \alpha < \beta$ **Δ.** $\beta < \gamma < \alpha$ **Ε.** $\beta < \alpha < \gamma$

Απάντηση

$$\xRightarrow{\text{ιδιότητα 8}} \sqrt[6]{10} > \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$$

και

$$9 > 8 \xRightarrow{\text{ιδιότητα 8}} \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8} \Rightarrow \sqrt[6]{3^2} > \sqrt[6]{2^3} \Rightarrow \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$$

Άρα,

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10}$$

Δηλαδή σωστό το **Δ.** ($\beta < \gamma < \alpha$).

5. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$.

(α) $A = 10\alpha - 3, \quad B = 10\beta - 3$

(β) $\Gamma = 4 - 3\alpha, \quad B = 4 - 3\beta$

(γ) $E = 2\alpha^2 + 3, \quad Z = 2\beta^2 + 3$

(δ) $H = \frac{5}{\alpha} - 1, \quad \theta = \frac{5}{\beta} - 1$

(ε) $K = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \Lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$

Απάντηση

(α) $\alpha < \beta \Rightarrow 10\alpha < 10\beta \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 10\alpha - 3 < 10\beta - 3$, δηλαδή $A < B$.

(β) $\alpha < \beta \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow -3\alpha < -3\beta \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 4 - 3\alpha < 4 - 3\beta$, δηλαδή $\Gamma > \Delta$.

(γ) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2 \Rightarrow 2\alpha^2 < 2\beta^2 \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 2\alpha^2 + 3 < 2\beta^2 + 3$, δηλαδή $E < Z$.

(δ) α, β ομόσημοι, τότε $\alpha < \beta \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Rightarrow 5\frac{1}{\alpha} > 5\frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{5}{\alpha} > \frac{5}{\beta}$
 $\xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} \frac{5}{\alpha} - 1 > \frac{5}{\beta} - 1$, δηλαδή $H > \theta$.

(ε) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$,
 δηλαδή $\Lambda < K$.

6. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha^2 < \alpha$.

Απάντηση

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 3}} \alpha \cdot \alpha < 1 \cdot \alpha \Rightarrow \alpha^2 < \alpha.$$

7. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι και $x < y$, τότε να διατάξετε τους αριθμούς

$$1, \quad \frac{x}{y}, \quad \frac{y}{x}$$

από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο.

Απάντηση

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot x < \frac{1}{x} \cdot y \Rightarrow 1 < \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot x < \frac{1}{y} \cdot y \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$$

Έτσι,

$$\frac{x}{y} < 1 < \frac{y}{x}$$

8. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$, αποδείξτε ότι:

(α) $3 < x + y < 8$ (β) $4 < 2x + y < 11$ (γ) $-4 < x - y < 1$

Απάντηση

(α) Είναι

$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 2 \end{cases} \Rightarrow x + y > 2 + 1 = 3 \quad \text{και} \quad \begin{cases} x < 3 \\ y < 5 \end{cases} \Rightarrow x + y < 3 + 5 = 8$$

και άρα

$$3 < x + y < 8.$$

(β) Είναι $x > 1 \Rightarrow 2x > 2 \cdot 1 = 2$ και άρα $\begin{cases} 2x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \Rightarrow 2x + y > 2 + 2 = 4.$

Επίσης,

$$x < 3 \Rightarrow 2x < 3 \cdot 2 = 6 \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x < 6 \\ y < 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + y < 6 + 5 = 11.$$

Έτσι,

$$4 < 2x + y < 11.$$

(γ) Είναι $y > 2 \Rightarrow -y < -2$ και άρα $\begin{cases} x < 3 \\ -y < -2 \end{cases} \Rightarrow x + (-y) < 3 - 2 = 1.$

Επίσης,

$$y < 5 \Rightarrow -y > -5 \quad \text{και} \quad \begin{cases} x > 1 \\ -y > -5 \end{cases} \Rightarrow x + (-y) > 1 - 5 = -4.$$

Έτσι,

$$-4 < x - y < 1.$$

9. Αν $x > 2$ και $y > 3$, αποδείξτε ότι:

(α) $xy > 6$ (β) $(x - 2)(y - 3) > 0$

Απάντηση

(α) Από την ιδιότητα 3: $\begin{cases} x > 2 > 0 \\ y > 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \cdot y > 2 \cdot 3 = 6$

(β) $x > 2 \Rightarrow x - 2 > 2 - 2 = 0$ και $y > 3 \Rightarrow y - 3 > 3 - 3 = 0$ και άρα

$$\underbrace{(x-2)}_{>0} \underbrace{(y-3)}_{>0} > 0$$

10. Αν $x > 3$ και $y < 2$, τότε να αποδείξετε ότι $(x-3)(y-2) < 0$. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $xy + 6 < 2x + 3y$.

Απάντηση

$x > 3 \Rightarrow x - 3 > 3 - 3 = 0$ και $y < 2 \Rightarrow y - 2 < 2 - 2 = 0$ και άρα

$$\underbrace{(x-3)}_{>0} \underbrace{(y-2)}_{<0} < 0$$

Τότε,

$$(x-3)(y-2) < 0 \Rightarrow xy - 2x - 3y + 6 < 0 \Rightarrow xy + 6 < 2x + 3y$$

11. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι πραγματικοί αριθμοί:

$$2x + 3y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}, \quad -\frac{2x}{3y}$$

Απάντηση

$$1 < x < 2 \Rightarrow 2 \cdot 1 < 2x < 2 \cdot 2 \Rightarrow 2 < 2x < 4$$

και

$$-2 < y < -1 \Rightarrow -2 \cdot 3 < 3y < -1 \cdot 3 \Rightarrow -6 < 3y < -3$$

και άρα

$$\begin{cases} 2 < 2x < 4 \\ -6 < 3y < -3 \end{cases} \Rightarrow 2 - 6 < 2x + 3y < 4 - 3 \Rightarrow -4 < 2x + 3y < 1$$

Τώρα, $-2 < y < -1 \Rightarrow -(-1) < -y < -(-2) \Rightarrow 1 < -y < 2$.

Συνεπώς,

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ 1 < -y < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot 1 < x \cdot (-y) < 2 \cdot 2 \Rightarrow 1 < -x \cdot y < 4 \Rightarrow -4 < x \cdot y < -1$$

Από πριν, έχουμε ότι $1 < -y < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{1}{y} < 1$.

Συνεπώς,

$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} < -\frac{1}{y} < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} < x \cdot \left(-\frac{1}{y}\right) < 2 \cdot 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < -\frac{x}{y} < 2 \Rightarrow -2 < \frac{x}{y} < -\frac{1}{2}$$

Από πριν, έχουμε ότι $1 < -y < 2 \Rightarrow 3 < -3y < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{3}$.

Επίσης, είδαμε ότι $2 < 2x < 4$. Έτσι,

$$\begin{cases} 2 < 2x < 4 \\ \frac{1}{6} < -\frac{1}{3y} < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{6} < 2x \cdot \left(-\frac{1}{3y}\right) < 4 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{2x}{3y} < \frac{4}{3}$$

12. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει 32 m μήκος και 20 m πλάτος. Αν το λάθος στις μετρήσεις δεν ξεπερνά τα 10 cm για κάθε διάσταση, τότε να υπολογίσετε:

- (α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του οικοπέδου
(β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του οικοπέδου.

Απάντηση

- (α) Έστω $x = \text{σφάλμα μήκους}$ και $y = \text{σφάλμα πλάτους}$. Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε ότι

$$x \leq 0.1m \text{ και } y \leq 0.1m \Rightarrow x \leq 0.2m \text{ και } 2y \leq 0.2m$$

και άρα οι μετρήσεις των πλευρών του οικοπέδου α και β ικανοποιούν τις

$$31.9 = 32 - 0.1 \leq \alpha \leq 32 + 0.1 = 32.1$$

και

$$19.9 = 20 - 0.1 \leq \beta \leq 20 + 0.1 = 20.1$$

αντίστοιχα. Έτσι,

$$63.8 \leq 2\alpha \leq 64.2 \text{ και } 39.8 \leq 2\beta \leq 40.2$$

Συνεπώς, η περίμετρος $\Pi = 2\alpha + 2\beta$ του οικοπέδου θα ικανοποιεί την

$$\underbrace{63.8 + 39.8}_{103.6m} \leq 2\alpha + 2\beta \leq \underbrace{64.2 + 40.2}_{104.4m}$$

- (β) Ομοίως, για το εμβαδόν, $E = \alpha\beta$

$$\underbrace{19.9 \times 31.9}_{634.81m} \leq \alpha\beta \leq \underbrace{20.1 \times 32.1}_{645.21m}$$

13. Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα, για να δείξετε ότι δεν ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις:

- (α) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:
 $\alpha - \gamma < \beta - \delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

- (β) Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε ισχύει:
 $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \text{ με } \gamma \neq 0$

Απάντηση

- (α) Αν $\alpha = 2, \beta = 3$ και $\gamma = -1, \delta = 0$ τότε $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$,
αλλά

$$\alpha - \gamma = 3 = \beta - \delta.$$

(β) Αν $\alpha = 2$, $\beta = 3$ και $\gamma = -3$, $\delta = -1$ τότε $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, αλλά

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{2}{3} > -3 = \frac{\beta}{\delta}$$

14. Αν $x < y < \omega$, τότε να αποδείξετε ότι $(x - y)(y - \omega)(\omega - x) > 0$.

Απάντηση

$$x < y \Rightarrow x - y < 0, \quad y < \omega \Rightarrow y - \omega < 0 \text{ και } x < y < \omega \Rightarrow x < \omega \Rightarrow \omega - x > 0$$

Συνεπώς,

$$\underbrace{\underbrace{(x - y)}_{<0} \underbrace{(y - \omega)}_{<0}}_{>0} \underbrace{(\omega - x)}_{>0} > 0$$

15. Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Στη συνέχεια, μα συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$.

Απάντηση

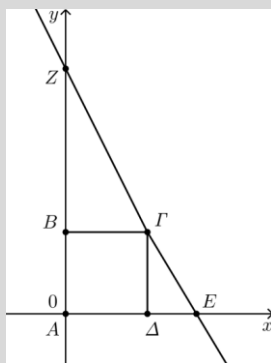
$$30 < 64 \Rightarrow \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{64} = 4 \Rightarrow \sqrt[3]{30} < 4 \text{ και } 27 < 30 \Rightarrow \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{30} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{30}$$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$. Τώρα,

$$3 < \sqrt[3]{30} < 4 \Rightarrow -4 < -\sqrt[3]{30} < -3 \Rightarrow 6 - 4 < 6 - \sqrt[3]{30} < 6 - 3 \Rightarrow 2 < 6 - \sqrt[3]{30} < 3$$

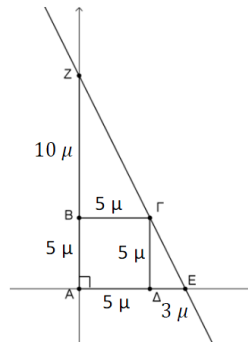
και άρα $6 - \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{30}$.

16. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 5 cm . Πάνω στις ημιευθείες AB και $A\Delta$ παίρνουμε σημεία Z και E , τέτοια ώστε $\Delta E = 3 \text{ cm}$ και $BZ = 10 \text{ cm}$, αντίστοιχα. Να εξετάσετε κατά πόσο τα σημεία Z, Γ και E είναι συνευθειακά, υπολογίζοντας και συγκρίνοντας τα μήκη των πλευρών $Z\Gamma, \Gamma E$ και ZE .



Απάντηση

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στα εμπλεκόμενα (ορθογώνια) τρίγωνα του σχήματος, έχουμε ότι $Z\Gamma = \sqrt{125}$, $\Gamma E = \sqrt{34}$ και $ZE = \sqrt{159}$. Τότε $\Gamma E < Z\Gamma < ZE$ και αρα τα σημεία είναι συνευθειακά.





Δραστηριότητες σελ. 56-59 (Δραστηριότητες Ενότητας)

1. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε την απάντησή σας στη μορφή $\alpha + \beta\sqrt{3}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(α) $(8 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ (β) $\frac{26}{4 + \sqrt{3}}$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad (8 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) &= 16 - 8\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 \\ &= 16 - 6\sqrt{3} - 3 = 13 - 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β)} \quad \frac{26}{4 + \sqrt{3}} &= \frac{26}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} = \frac{26(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{26(4 - \sqrt{3})}{4^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{26(4 - \sqrt{3})}{16 - 3} \\ &= \frac{26}{13}(4 - \sqrt{3}) = 2(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$6\sqrt{81} - 3\sqrt[3]{27} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{16}$$

Απάντηση

$$6\sqrt{81} - 3\sqrt[3]{27} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{16} = 6\sqrt{9^2} - 3\sqrt[3]{3^3} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{2^4}$$

$$6 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 54 - 9 + 1 = 46$$

3. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\sqrt{200} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 4\sqrt{50}$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} \sqrt{200} - 2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + 4\sqrt{50} &= \sqrt{100 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 2} - 3\sqrt{16 \cdot 2} + 4\sqrt{2 \cdot 25} \\ &= \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{9} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{16} \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{25} \\ &= 10\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} + 20\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

(δ) $\frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{9}{\sqrt{5}}$

$$(\beta) \quad \sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[36]{K}}}$$

(β) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{k^{36}}}} = \sqrt[3]{\sqrt{k^9}} = \sqrt[6]{k^9} = \sqrt{k^3} = \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{k} = k\sqrt{k} = k^{\frac{3}{2}}$

6. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ (β) $5 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{5}$ (γ) $\sqrt{10 + 2\sqrt{15}}, \sqrt{5} + \sqrt{3}$

Απάντηση

(α) $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

και

$(\sqrt[3]{3})^6 = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$

Συνεπώς, αφού $9 > 8$, έχουμε ότι:

$\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}.$

(β) $\begin{cases} 5 = 5^1 > \sqrt{5} \\ 3 = 3^1 > \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} 5 - 3 > \sqrt{5} - \sqrt{3} \Rightarrow 5 + \sqrt{3} > 3 + \sqrt{5}$

(γ) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2 \underbrace{\sqrt{5}\sqrt{3}}_{\sqrt{15}} + 3 = 8 + 2\sqrt{15} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}.$

Αλλά, $8 + 2\sqrt{15} < 10 + 2\sqrt{15} \Rightarrow \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} < \sqrt{10 + 2\sqrt{15}}$
και συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε:

$\sqrt{10 + 2\sqrt{15}} > \sqrt{5} + \sqrt{3}$

7. Αν $A = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $B = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, τότε να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $A - B$ (β) $A^2 - B^2$ (γ) $A^2 + B^2$

Απάντηση

(α) $A - B = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(β) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$
 $= [(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})][(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})]$
 $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})$
 $= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{2 \cdot 3} = 4\sqrt{6}$

(γ) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
 $\Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = A^2 + 2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + B^2$

$$\Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = A^2 + 2 \cdot [(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2] + B^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 3 = A^2 + 2 \cdot (3 - 2) + B^2$$

$$\Rightarrow 12 = A^2 + 2 + B^2$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 = 12 - 2 = 10$$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x} = 9, x \geq 0$

(β) $\sqrt{x-2} = 5, x \geq 2$

(γ) $\sqrt{4-x^2} = 2, x \in [-2,2]$

(δ) $\sqrt{x-5} = -2$

Απάντηση

(α) $\sqrt{x} = 9 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 9^2 \Leftrightarrow x = 81, \text{ δεκτή.}$

(β) $\sqrt{x-2} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{x-2})^2 = 5^2 \Leftrightarrow x-2 = 25 \Leftrightarrow x = 27,$

δεκτή.

(γ) $\sqrt{4-x^2} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4-x^2})^2 = 2^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \text{ δεκτή.}$

(δ) Η $\sqrt{x-5} = -2$ δεν έχει πραγματικές λύσεις (είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$) αφού $\sqrt{x-5} \geq 0$.

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt[3]{5-x} = 3, x \leq 5$

(β) $\sqrt[4]{x-1} = 1, x \geq 1$

Απάντηση

(α) $\sqrt[3]{5-x} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5-x})^3 = 3^3 \Leftrightarrow 5-x = 27$

$\Leftrightarrow x = -22, \text{ δεκτή.}$

(β) $\sqrt[4]{x-1} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x-1})^4 = 1^4 \Leftrightarrow x-1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 2, \text{ δεκτή.}$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^4 - 81 = 0$

(β) $2x^3 + 16 = 0$

(γ) $x^3 - 4x = 0$

Απάντηση

(α) $x^4 - 81 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 81 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{81} = \pm 3$

(β) $2x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = -16 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$

(γ) $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$

11. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\sqrt{x+10} = 2-x$

(β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0, \quad x \geq 0$

(γ) $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x-2} = 0, \quad x \in [-2,2]$

(δ) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt{x+1}, \quad x \geq -1$

Απάντηση

(α) Περιορισμοί:

$x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -10$ και $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

(πρέπει το υπόριζο να είναι ≥ 0 , όπως επίσης και το δεξί μέλος)

Άρα, $\boxed{-10 \leq x \leq 2}$.

$\sqrt{x+10} = 2-x \Leftrightarrow (\sqrt{x+10})^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x+10 = 4-4x+x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ (δεκτή) και $x = 6$ (απορρίπτεται).

(β) $\sqrt{3x} - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x} = x - 6$

Περιορισμοί:

$x \geq 0$ και $x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$.

(πρέπει το υπόριζο να είναι ≥ 0 , όπως επίσης και το δεξί μέλος)

$\sqrt{3x} = x-6 \Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2 = (x-6)^2$

$\Leftrightarrow 3x = x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x^2 - 15x + 36 = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (απορρίπτεται) και $x = 12$ (δεκτή).

(γ) Αφού $\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$ και $\sqrt{x - 2} \geq 0$, τότε

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = 0 \text{ ΚΑΙ } \sqrt{x - 2} = 0$$

Έχουμε:

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0, \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

και

$$\sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Η τιμή $x = 2$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

2^{ος} τρόπος:

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = -\sqrt{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 4})^2 = (-\sqrt{x - 2})^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ (απορρίπτεται) και } x = 2 \in [-2, 2] \text{ (δεκτή)}$$

(δ) $\sqrt[4]{x + 3} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x + 3})^4 = (\sqrt{x + 1})^4$

$$\Leftrightarrow x + 3 = (x + 1)^2 \Leftrightarrow x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ (απορρίπτεται) και } x = 1 \text{ (δεκτή).}$$

12. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $100^{\frac{1}{2}}$

(β) $25^{\frac{3}{2}}$

(γ) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}}$

(δ) $\sqrt{3} \cdot 12^{\frac{1}{2}}$

Απάντηση

(α) $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

(β) $25^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$

(γ) $9^{-\frac{1}{2}} - 27^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

(δ) $\sqrt{3} \cdot 12^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

13. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

(β) $(81k^8)^{\frac{1}{4}}, k \geq 0$

(γ) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}$

(δ) $(100x^4)^{\frac{1}{2}}, x \geq 0$

Απάντηση

(α) $4^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

(β) $(81k^8)^{\frac{1}{4}} = 81^{\frac{1}{4}} \cdot (k^8)^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} \cdot k^2 = 3k^2$

ή

$(81k^8)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81k^8} = \sqrt[4]{(3k^2)^4} = 3k^2$

(γ) $3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 3$

ή

$3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

(δ) $(100x^4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100x^4} = \sqrt{(10x^2)^2} = 10x^2$

14. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

(β) $\frac{3}{2 - \sqrt{3}}$

(γ) $\frac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

(δ) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

(ε) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}}$

Απάντηση

(α) $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

(β) $\frac{3}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{3(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 3(2 + \sqrt{3})$

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad \frac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} &= \frac{12}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{12(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \\
 &= \frac{12(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{12(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} \\
 &= \frac{12(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2} = 6(\sqrt{7} - \sqrt{5})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta) \quad \frac{5}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^2}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{4^2}}{4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^4}}{4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 2^3}}{4} \\
 &= \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^3}}{4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 2}{4} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\epsilon) \quad \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}} &= \frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[10]{x^7}} \cdot \frac{\sqrt[10]{x^3}}{\sqrt[10]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x^3}}{\sqrt[10]{x^{10}}} = \frac{\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x^3}}{x} \\
 &= \frac{\sqrt[10]{x^4} \cdot \sqrt[10]{x^3}}{x} = \frac{\sqrt[10]{x^7}}{x}
 \end{aligned}$$

15. Αν $3 < x < 8$, τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

(α) $2x$ (β) $-3x + 10$ (γ) $x^2 + 1$

(δ) $\frac{1}{x}$ (ε) $-\frac{36}{x+1}$ (στ) $\frac{1}{x^2 - 2}$

Απάντηση

(α) $3 < x < 8 \Rightarrow 2 \cdot 3 < 2x < 2 \cdot 8 \Rightarrow 6 < x < 16$

Το διάστημα είναι το $(6, 16)$.

(β) $3 < x < 8 \Rightarrow -3 \cdot 8 < -3x < -3 \cdot 3 \Rightarrow -24 < -3x < -9$

$\Rightarrow -24 + 10 < -3x + 10 < -9 + 10$

$\Rightarrow -14 < -3x + 10 < 1$

Το διάστημα είναι το $(-14, 1)$.

(γ) $\begin{cases} 0 < 3 < x < 8 \\ 0 < 3 < x < 8 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 3 < x \cdot x < 8 \cdot 8 \Rightarrow 9 < x^2 < 64$

$\Rightarrow 9 + 1 < x^2 + 1 < 64 + 1 \Rightarrow 10 < x^2 + 1 < 65$

Το διάστημα είναι το $(10, 65)$.

$$(δ) \quad 0 < 3 < x < 8 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$$

Το διάστημα είναι το $(\frac{1}{8}, \frac{1}{3})$.

$$(ε) \quad 3 < x < 8 \Rightarrow 3 + 1 < x + 1 < 8 + 1 \Rightarrow 4 < x + 1 < 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{36}{9} < \frac{36}{x+1} < \frac{36}{4}$$

$$\Rightarrow 4 < \frac{36}{x+1} < 9 \Rightarrow -9 < -\frac{36}{x+1} < -4$$

Το διάστημα είναι το $(-9, -4)$.

$$(στ) \quad \begin{cases} 0 < 3 < x < 8 \\ 0 < 3 < x < 8 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 3 < x \cdot x < 8 \cdot 8 \Rightarrow 9 < x^2 < 64$$

$$\Rightarrow 9 + 2 < x^2 + 2 < 64 + 2 \Rightarrow 1 < 7 < x^2 - 2 < 64$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64} < \frac{1}{x^2 - 2} < \frac{1}{7}$$

Το διάστημα είναι το $(\frac{1}{64}, \frac{1}{7})$.

16. Αν μ και ν φυσικοί αριθμοί με $\mu < \nu$, τότε να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

$$(α) \quad A = -3\mu + 10, \quad B = -3\nu + 10$$

$$(β) \quad \Gamma = 2\mu^2 + 1, \quad \Delta = 2\nu^2 + 1$$

$$(γ) \quad E = \frac{3}{8 - \mu^3}, \quad Z = \frac{3}{8 - \nu^3}$$

Απάντηση

$$(α) \quad \mu < \nu \Rightarrow -3\mu > -3\nu \Rightarrow -3\mu + 10 > -3\nu + 10 \\ \Rightarrow A > B$$

$$(β) \quad 1 < \mu < \nu \Rightarrow \mu^2 < \nu^2 \Rightarrow 2\mu^2 < 2\nu^2 \Rightarrow 2\mu^2 + 1 < 2\nu^2 + 1 \\ \Rightarrow \Delta > \Gamma$$

$$\begin{aligned}
 (\gamma) \quad 1 < \mu < \nu &\Rightarrow \mu^3 < \nu^3 \Rightarrow -\nu^3 < \mu^3 \Rightarrow 8 - \nu^3 < 8 - \mu^3 \\
 &\Rightarrow \frac{3}{8 - \mu^3} < \frac{3}{8 - \nu^3} \\
 &\Rightarrow E < Z
 \end{aligned}$$

17. Αν $\alpha_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ και $\alpha_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \quad \alpha_1 > \alpha_2 \qquad (\beta) \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$$

$$(\gamma) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = 6$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = (3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$$

$$(\beta) \quad \alpha_1 \cdot \alpha_2 = (3 + 2\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$(\gamma) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\underbrace{\alpha_1 \cdot \alpha_2}_1} = \alpha_1 + \alpha_2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 6$$

18. Αν $4 \leq x \leq 6$ και $-8 \leq y \leq -4$ τότε να βρείτε το μικρότερο διάστημα στο οποίο ανήκουν οι πιο κάτω αριθμοί:

$$(\alpha) \quad x + y$$

$$(\beta) \quad x - 2y$$

$$(\gamma) \quad xy$$

$$(\delta) \quad \frac{x}{y}$$

$$(\epsilon) \quad 2x - 3y + 5$$

$$(\sigma\tau) \quad x^2 + 4y^2 - 4xy + 10$$

Απάντηση

$$(\alpha) \quad \begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ -8 \leq y \leq -4 \end{cases} \Rightarrow 4 - 8 \leq x + y \leq 6 - 4 \Rightarrow -4 \leq x + y \leq 2$$

Το διάστημα είναι το $[-4, 2]$.

$$(\beta) \quad -8 \leq y \leq -4 \Rightarrow 4 \cdot 2 \leq -2y \leq 8 \cdot 2 \Rightarrow 8 \leq -2y \leq 16$$

Άρα,

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ 8 \leq -2y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow 8 + 4 \leq x - 2y \leq 16 + 6$$

$$\Rightarrow 12 \leq x - 2y \leq 22$$

Το διάστημα είναι το $[12, 22]$.

$$(γ) \quad -8 \leq y \leq -4 \Rightarrow 4 \leq -y \leq 8$$

Άρα,

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ 4 \leq -y \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 4 \cdot 4 \leq -xy \leq 6 \cdot 8 \Rightarrow 16 \leq -xy \leq 48$$

$$\Rightarrow -48 \leq xy \leq -16$$

Το διάστημα είναι το $[-48, -16]$.

$$(δ) \quad -8 \leq y \leq -4 \Rightarrow 4 \leq -y \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{4}$$

Άρα,

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{1}{8} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{8} \leq -x \cdot \frac{1}{y} \leq \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{x}{y} \leq -\frac{1}{2}$$

Το διάστημα είναι το $\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

(ε) Άρα,

$$\begin{cases} 8 \leq 2x \leq 12 \\ 12 \leq -3y \leq 24 \end{cases} \Rightarrow 8 + 12 \leq 2x - 3y \leq 12 + 24$$

$$\Rightarrow 20 \leq 2x - 3y \leq 36 \Rightarrow 25 \leq 2x - 3y + 5 \leq 41$$

Το διάστημα είναι το $[25, 41]$.

$$(στ) \quad x^2 + 4y^2 - 4xy + 10 = x^2 - 2 \cdot 2xy + (2y)^2 + 10 = (x - 2y)^2 + 10$$

Από το ερώτημα (β) έχουμε:

$$\begin{cases} 12 \leq x - 2y \leq 22 \\ 12 \leq x - 2y \leq 22 \end{cases} \Rightarrow 12 \cdot 12 \leq (x - 2y)^2 \leq 22 \cdot 22$$

$$\Rightarrow 144 \leq (x - 2y)^2 \leq 484 \Rightarrow 154 \leq (x - 2y)^2 + 10 \leq 494$$

Το διάστημα είναι το $[154, 494]$.

19. Αν $4 < x < 6$ και $-3 < y < -1$, τότε να αποδείξετε ότι:

(α) $-1 < 2x + 3y < 9$

(β) $6 < x - 2y < 12$

(γ) $1 < y - xy < 17$

(δ) $40 < x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 < 148$

(ε) $-18 < \frac{3x}{y} < -4$

Απάντηση

(α) $4 < x < 6 \Rightarrow 8 < 2x < 12$

$-3 < y < -1 \Rightarrow -9 < 3y < -3$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$-1 < 2x + 3y < 9$$

(β) $4 < x < 6$

$-3 < y < -1 \Rightarrow 2 < -2y < 6$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$6 < x - 2y < 12$$

(γ) $\begin{cases} 4 < x < 6 \\ 1 < -y < 3 \end{cases} \Rightarrow 4 < -xy < 18$

και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\begin{cases} 4 < -xy < 18 \\ -3 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow 1 < y - xy < 17$$

(δ) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = x^2 - 2 \cdot 2xy + (2y)^2 + 4 = (x - 2y)^2 + 4$

Από το ερώτημα (β) έχουμε:

$$\begin{cases} 6 < x - 2y < 12 \\ 6 < x - 2y < 12 \end{cases} \Rightarrow 6 \cdot 6 < (x - 2y)^2 < 12 \cdot 12$$

$$\Rightarrow 36 < (x - 2y)^2 < 144 \Rightarrow 40 < (x - 2y)^2 + 4 < 148$$

(ε) $1 < -y < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1$

$4 < x < 6 \Rightarrow 12 < 3x < 18$

$$\begin{cases} \frac{1}{3} < -\frac{1}{y} < 1 \\ 12 < 3x < 18 \end{cases} \Rightarrow 4 < -\frac{3x}{y} < 18 \Rightarrow -18 < \frac{3x}{y} < -4$$

20. Δίνονται οι πραγματικοί θετικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς:

(α) $3\kappa - 8, 3\lambda - 8$

(β) $4 - \frac{1}{2}\kappa, 4 - \frac{1}{2}\lambda$

(γ) $5\kappa^2 + 7, 5\lambda^2 + 7$

(δ) $\frac{3}{8 - \kappa^3}, \frac{3}{8 - \lambda^3}$

Να συγκρίνετε όλους τους πιο πάνω αριθμούς σε όλες τις περιπτώσεις, όταν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ είναι αρνητικοί.

Απάντηση

Υποθέτω ότι $0 < \kappa < \lambda$

(α) $\kappa < \lambda \Rightarrow 3\kappa < 3\lambda \Rightarrow \boxed{3\kappa + 8 < 3\lambda + 8}$

(β) $\kappa < \lambda \Rightarrow -\frac{1}{2}\lambda < -\frac{1}{2}\kappa \Rightarrow \boxed{4 - \frac{1}{2}\lambda < 4 - \frac{1}{2}\kappa}$

(γ) $1 < \kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^2 < \lambda^2 \Rightarrow 5\kappa^2 < 5\lambda^2 \Rightarrow \boxed{5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7}$

(δ) $1 < \kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^3 < \lambda^3 \Rightarrow -\lambda^3 < -\kappa^3 \Rightarrow 8 - \lambda^3 < 8 - \kappa^3$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{8 - \kappa^3} < \frac{1}{8 - \lambda^3}}$

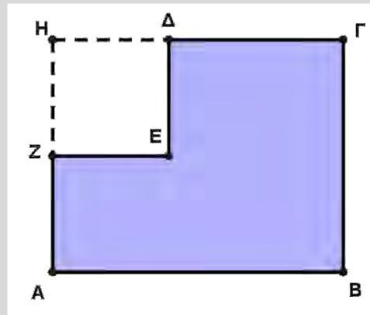
Υποθέτω ότι $\kappa < \lambda < 0$. Τότε, όπως πριν,
 $3\kappa + 8 < 3\lambda + 8,$

$4 - \frac{1}{2}\lambda < 4 - \frac{1}{2}\kappa,$

$5\kappa^2 + 7 < 5\lambda^2 + 7,$

$\frac{1}{8 - \kappa^3} < \frac{1}{8 - \lambda^3}$

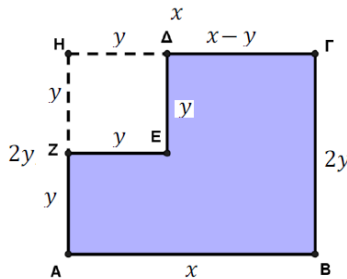
21. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο $ABΓΔ$ με διαστάσεις $AB = x$ και $BΓ = 2y$, από το οποίο έχουμε αφαιρέσει το τετράγωνο $ΔΕΖΗ$ με πλευρά y .



- (α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του σκιασμένου εμβαδού $ABΓΔΕΖ$ δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 4y$.
- (β) Αν ισχύει ότι $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Απάντηση

- (α) $\Pi_{ABΓΔΕΖ} = (AB) + (BΓ) + (ΓΔ) + (ΔΕ) + (ΕΖ) + (ΖΑ)$
 $= x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y$
- (β) $\begin{cases} 5 < x < 8 \\ 1 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 < 2x < 16 \\ 4 < 4y < 8 \end{cases} \Rightarrow 14 < \underbrace{2x + 4y}_{\Pi_{ABΓΔΕΖ}} < 24$



22. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$, $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$.

- (α) Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$.
- (β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{6}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση

- (α) $A + B + \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt[3]{3})^6 + (\sqrt[6]{6})^6$
 $= 2^{\frac{6}{2}} + 3^{\frac{6}{3}} + 6^{\frac{6}{6}} = 2^3 + 3^2 + 3 = 8 + 9 + 6 = 23$
- (β) $9 > 6 \xrightarrow{\text{ιδιότητα 2}} \sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{6}$.

23. Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$.

(α) Να δείξετε ότι $A - B = 4$.

(β) Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $\sqrt{2}, \quad 1, \quad \sqrt[3]{2}.$

Απάντηση

$$(α) \quad A - B = (\sqrt{2})^6 - (\sqrt[3]{2})^6 = 2^{\frac{6}{2}} - 2^{\frac{6}{3}} = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$$

(β) $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$ από την ιδιότητα 9. Επίσης, $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{2}$.
 Άρα,

$$1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

25. Να αποδείξετε ότι ο $(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2$ είναι ρητός, αν ο αριθμός α είναι θετικός ρητός.

Απάντηση

$$\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = (\sqrt{\alpha})^2 - 2\sqrt{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \alpha - 2 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha - 2) + 1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$$

26. Να διατάξετε τους αριθμούς α, β, γ από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, αν ισχύει ότι:

$$2016\alpha = 2017\beta = 2018\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$$

Απάντηση

$$2016\alpha = 2017\beta \Rightarrow 2016\alpha = 2016\beta + \beta \Rightarrow 2016\alpha - 2016\beta = \beta$$

$$\Rightarrow 2016(\alpha - \beta) = \beta > 0 \Rightarrow \alpha - \beta > 0 \Rightarrow \alpha > \beta$$

Ομοίως,

$$2017\beta = 2018\gamma \Rightarrow 2017\beta = 2017\gamma + \gamma \Rightarrow 2017\beta - 2017\gamma = \gamma$$

$$\Rightarrow 2017(\beta - \gamma) = \gamma > 0 \Rightarrow \beta > \gamma.$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω

$$\alpha > \beta > \gamma.$$

27. Αν $\alpha > \beta$, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $3\alpha - 4\gamma$ και $3\beta - 4\gamma$.

Απάντηση

$$\alpha > \beta \Rightarrow 3\alpha > 3\beta \Rightarrow 3\alpha - 4\gamma > 3\beta - 4\gamma$$

28. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$, $\sqrt{6 - \sqrt{11}}$.
Αν $\kappa = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}}$, τότε:

(α) να αποδείξετε ότι $\kappa^2 = 2$

(β) να υπολογίσετε τα $(\kappa + \sqrt{2})^{106}$, $(\kappa - \sqrt{2})^{106}$.

Απάντηση

$$\sqrt{11} > -\sqrt{11} \Rightarrow 6 + \sqrt{11} > 6 - \sqrt{11}$$

$$6 = \sqrt{36} > \sqrt{11} \text{ και αρα } 6 - \sqrt{11} > 0.$$

$$\text{Έτσι, } 6 + \sqrt{11} > 6 - \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{6 + \sqrt{11}} > \sqrt{6 - \sqrt{11}}$$

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \kappa^2 &= \left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} \right)^2 - 2\sqrt{6 + \sqrt{11}}\sqrt{6 - \sqrt{11}} + \left(\sqrt{6 - \sqrt{11}} \right)^2 \\ &= 6 + \sqrt{11} - 2\sqrt{(6 + \sqrt{11})(6 - \sqrt{11})} + (6 - \sqrt{11}) \\ &= 6 + \sqrt{11} - 2\sqrt{(6 + \sqrt{11})(6 - \sqrt{11})} + 6 - \sqrt{11} \\ &= 12 - 2\sqrt{6^2 - \sqrt{11}^2} = 12 - 2\sqrt{6^2 - 11} = 12 - 2\sqrt{36 - 11} \\ &= 12 - 2\sqrt{25} = 12 - 10 = 2 \end{aligned}$$

(β) Από τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε ότι

$$\kappa = \sqrt{6 + \sqrt{11}} - \sqrt{6 - \sqrt{11}} > 0 \text{ και}$$

$$\kappa^2 = 2 \Rightarrow \kappa^2 - 2 = 0 \Rightarrow \kappa = \pm\sqrt{2} \text{ και αφού } \kappa > 0,$$

$$\kappa = \sqrt{2} \Rightarrow \kappa - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow (\kappa - \sqrt{2})^{106} = 0$$

Επίσης,

$$(\kappa + \sqrt{2})^{106} = (\sqrt{2} + \sqrt{2})^{106} = (2\sqrt{2})^{106} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{106} = 2^{3 \cdot 53} = 2^{159}$$

και

$$(\kappa - \sqrt{2})^{106} = (\sqrt{2} - \sqrt{2})^{106} = 0$$