

Ενδεικτικές λύσεις των σχολικών ασκήσεων

Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ (εκπαιδευτικός)

Τάξη: Β Λυκείου Κοινού Κορμού

Ενότητα 1 - Τριγωνομετρία (μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο)

Στόχος Ενότητας:

Σε προηγούμενες τάξεις μάθαμε να βρίσκουμε το **εμβαδόν** και το **μήκος** των πλευρών του **ορθογωνίου τριγώνου**. Το μεν εμβαδόν βρίσκεται από το γνωστό μας τύπο $E = \frac{\text{βάση} \times \text{ύψος}}{2}$ ενώ οι πλευρές ανάλογα με τα δεδομένα που έχουμε στο τρίγωνο (με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών ή/και του Πυθαγορείου Θεωρήματος).

Στην ενότητα αυτή θα μάθουμε εργαλεία (τύπους/νόμους) τα οποία μας βοηθούν να υπολογίζουμε τις γωνίες και τις πλευρές **τυχαίου** τριγώνου αλλά και το εμβαδόν, **όχι κατ'ανάγκην ορθογωνίου**.

- **Υπενθύμιση:** Με τον όρο **επίλυση τριγώνου** εννοούμε τον προσδιορισμό των μηκών των πλευρών του και των μέτρων των γωνιών του (σε μοίρες ή σε ακτίνια).

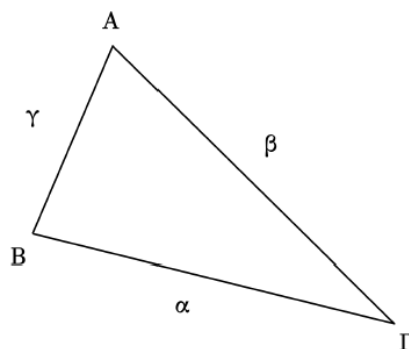
- Οι κορυφές ενός τριγώνου συμβολίζονται (συνήθως) με τα Ελληνικά γράμματα A, B και Γ .

- Η απέναντι πλευρά μιας γωνίας του τριγώνου συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό γράμμα που αναπαριστά τη γωνία:

Η πλευρά AB με γ ,

Η πλευρά $A\Gamma$ με β ,

Η πλευρά ΓB με α .



- Η πρόκληση στο κεφάλαιο αυτό είναι να αναγνωρίζουμε πότε πρέπει να χρησιμοποιούμε τον κάθε ένα από τους νόμους (Θεωρήματα) για την επίλυση του τριγώνου, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος. Ιδιαίτερα, σε ορισμένες περιπτώσεις, μπορεί να χρειαστεί συνδυασμός των νόμων.

- Δύο **παραπληρωματικές** γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο, δηλαδή αν $\omega < 90^\circ$, τότε $\eta\mu\omega = \eta\mu(180^\circ - \omega)$.

Για παράδειγμα, $\eta\mu 35^\circ = \eta\mu 145^\circ$.

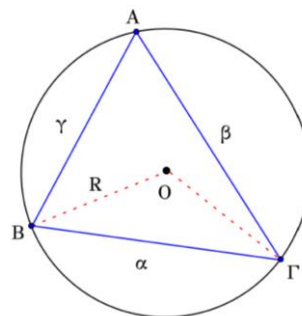
A. Ο νόμος των ημιτόνων

Θεώρημα (ο νόμος των ημιτόνων)

Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$, τα μήκη των πλευρών του είναι ανάλογα προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του και ο λόγος αυτός είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας R του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου.

Δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$



Παρατήρηση

Ο πιο πάνω τύπος αποτελεί μια **αναλογία**. Αυτό μεταφράζεται, ανάμεσα σε άλλα, στο ότι μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε από τις πιο κάτω ισότητες:

$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$	$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$
$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Leftrightarrow \alpha = 2R\eta\mu A$	$\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \Leftrightarrow \beta = 2R\eta\mu B$	$\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R \Leftrightarrow \gamma = 2R\eta\mu \Gamma$

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 30^\circ$ και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $R = 4\text{ cm}$.

(Ποια ισότητα θα πάρετε;)

Απάντηση

$$\alpha = 2R\eta\mu A \Rightarrow \alpha = 2 \cdot 4 \cdot \eta\mu 30^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4\text{ cm}$$

■

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$ σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\gamma = 6\text{ cm}$ και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $R = 3\text{ cm}$.

Απάντηση

$$\frac{\gamma}{\eta\mu \hat{\Gamma}} = 2R \Rightarrow \eta\mu \hat{\Gamma} = \frac{\gamma}{2R} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$$

■

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το μέτρο της **οξείας** γωνίας $\hat{B}$ σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\beta = 10\text{ cm}$ και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου $R = 10\text{ cm}$.

Απάντηση

$$\frac{\beta}{\eta\mu \hat{B}} = 2R \Rightarrow \eta\mu \hat{B} = \frac{\beta}{2R} = \frac{10}{2 \cdot 10} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{B} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

Αλλά $\hat{B} < 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$

■

Παράδειγμα 4, σελ. 10 του βιβλίου

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 1\text{ cm}$, $\gamma = \sqrt{3}\text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Απάντηση

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} \Rightarrow \eta\mu A = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

και άρα $\hat{A} = 30^\circ$ ή $\hat{A} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Αλλά, αν $\hat{A} = 150^\circ$, τότε θα έχουμε $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ > 180^\circ$ και αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει σε ένα τρίγωνο. Άρα, $\hat{A} = 30^\circ$.

Ακολουθώντας, αφού γνωρίζουμε τις δύο από τις τρεις γωνίες του τριγώνου, μπορούμε να βρούμε την τρίτη γωνία του με άθροισμα γωνιών τριγώνου:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + \hat{B} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

Άρα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Για να βρούμε την πλευρά β , χρησιμοποιούμε είτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα, είτε το νόμο των ημιτόνων είτε κάνουμε χρήση τριγωνομετρικών αριθμών:

Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = (\sqrt{3})^2 + 1 \Rightarrow \beta^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{\beta = 2 \text{ cm}}$$

Με χρήση του νόμου των ημιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 90^\circ} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\eta\mu 90^\circ}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ cm}}$$

Με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών:

$$\eta\mu A = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \boxed{\beta = 2 \text{ cm}}$$

Άσκηση

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 6 \text{ cm}$ και γωνιά $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, αν $\hat{A} < 90^\circ$.

Λύση

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\alpha = 6\sqrt{3} \text{ cm}$	$\beta = ;$	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{6}{\eta\mu 30^\circ}$
$\gamma = 6 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	Έχουμε:
$\hat{\Gamma} = 30^\circ$	$\hat{B} = ;$	$\frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu A} = \frac{6}{\eta\mu 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu A} = \frac{1}{\eta\mu 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu A} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
		$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu A} = 2$

$$\Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ \text{ ή } \hat{A} = 120^\circ$$

Αλλά, $\hat{A} < 90^\circ$, άρα $\boxed{\hat{A} = 60^\circ}$

(άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 90^\circ}$$

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Θα υπολογίσουμε την πλευρά β του τριγώνου:

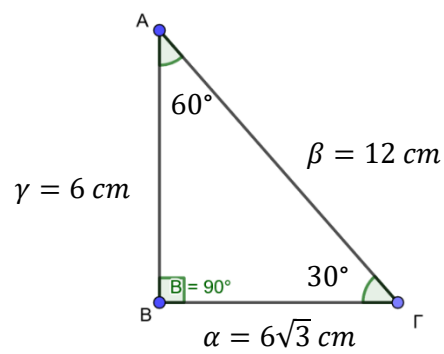
Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 \Rightarrow \beta^2 = (6\sqrt{3})^2 + 6^2 \Rightarrow \beta^2 = 36 \cdot 3 + 36 = 4 \cdot 36 \Rightarrow \boxed{\beta = 12 \text{ cm}}$$

Με χρήση του νόμου των ημιτόνων:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 90^\circ} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\beta}{1} \Rightarrow \boxed{\beta = 12 \text{ cm}}$$

■



Λύσεις των σχολικών δραστηριοτήτων

➤ Δραστηριότητες σελ. 12 (Ο νόμος των ημιτόνων)

Δραστηριότητα 1

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\hat{B} = 150^\circ$	$\beta = ;$
$R = 2 \text{ cm}$	

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} &= 2R \Leftrightarrow \beta = 2R\eta\mu\hat{B} \\ \Leftrightarrow \beta &= 2 \cdot 2 \cdot \eta\mu 150^\circ \Leftrightarrow \beta = 4 \cdot \eta\mu 30^\circ \\ \Leftrightarrow \beta &= 4 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 2 \text{ cm}}\end{aligned}$$

Δραστηριότητα 2

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\gamma = 7 \text{ cm}$	$\eta\mu\hat{\Gamma} = ;$
$R = 21 \text{ cm}$	

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} &= 2R \Leftrightarrow \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\gamma}{2R} \\ \Leftrightarrow \eta\mu\hat{\Gamma} &= \frac{7}{2 \cdot 21} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{1}{6}}\end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\hat{A} = 30^\circ$	$\alpha = ;$
$\hat{B} = 45^\circ$	$\beta = ;$
$R = 3 \text{ cm}$	$\gamma = ;$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 45^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 105^\circ$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} &= \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = 2R \\ \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 30^\circ} &= \frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 105^\circ} = \underbrace{2 \cdot 3}_{=6}\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 30^\circ} = 6 \Leftrightarrow \alpha = 6 \cdot \eta\mu 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu 45^\circ} = 6 \Leftrightarrow \beta = 6 \cdot \eta\mu 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

και

$$\frac{\gamma}{\eta\mu 105^\circ} = 6 \Leftrightarrow \gamma = 6 \cdot \eta\mu 105^\circ = 6 \cdot \eta\mu 75^\circ = 6 \cdot 0,966 \approx 5.8 \text{ cm}$$

Δραστηριότητα 4

(α)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\gamma = 5 \text{ cm}$	$\beta = ;$	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{7}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{5}{\eta\mu 45^\circ}$
	$\alpha = 7 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	Άρα,
	$\hat{\Gamma} = 45^\circ$	$\hat{B} = ;$	$\frac{7}{\eta\mu A} = \frac{5}{\eta\mu 45^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{7\eta\mu 45^\circ}{5} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$
			$\Leftrightarrow \boxed{\hat{A} = 81.9^\circ \text{ ή } \hat{A} = 180^\circ - 81.9^\circ = 98.1^\circ}$

1^η περίπτωση

$\hat{A} = 81.9^\circ$. Τότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 81.9^\circ + \hat{B} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 53.1^\circ}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu 53.1^\circ} = \frac{5}{\eta\mu 45^\circ} \Leftrightarrow \beta = \frac{5\eta\mu 53.1^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{5 \cdot 0.78}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 5.65 \text{ cm}$$

2^η περίπτωση

$\hat{A} = 98.1^\circ$. Τότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 98.1^\circ + \hat{B} + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B} = 36.9^\circ}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu 36.9^\circ} = \frac{5}{\eta\mu 45^\circ} \Leftrightarrow \beta = \frac{5\eta\mu 36.9^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{5 \cdot 0.6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 4.24 \text{ cm}$$

(β)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\hat{\Delta} = 100^\circ$	$\hat{Z} = ;$	$\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + 37^\circ + \hat{Z} = 180^\circ$
	$\hat{E} = 37^\circ$	$\delta = ;$	$\Rightarrow \boxed{\hat{Z} = 43^\circ}$
	$\zeta = 4 \text{ cm}$	$\varepsilon = ;$	$\frac{\delta}{\eta\mu \Delta} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} = \frac{\zeta}{\eta\mu Z} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\eta\mu 100^\circ} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu 37^\circ}$
			$= \frac{4}{\eta\mu 43^\circ}$
			Άρα,
			$\frac{\delta}{\eta\mu 100^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \delta = \frac{4\eta\mu 100^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \approx 5.78 \text{ cm}$
			$\frac{\varepsilon}{\eta\mu 37^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{4\eta\mu 37^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \approx 3.53 \text{ cm}$

(γ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
			$\frac{\mu}{\eta\mu M} = \frac{\lambda}{\eta\mu \Lambda} = \frac{\kappa}{\eta\mu K} \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{8}{\eta\mu \Lambda} = \frac{\kappa}{\eta\mu K}$
			Άρα,

$\mu = 8\sqrt{3} \text{ m}$	$\hat{K} =;$	$\frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{8}{\eta\mu \lambda} \Leftrightarrow \eta\mu \lambda = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \hat{\lambda} = 30^\circ \text{ ή } \hat{\lambda} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$
$\hat{M} = 60^\circ$	$\hat{\lambda} =;$	
$\lambda = 8 \text{ m}$	$\kappa =;$	

Αν $\hat{\lambda}^\circ = 150^\circ$, τότε $\hat{M} + \hat{\lambda} = 210^\circ > 180^\circ$, άτοπο. Άρα, $\boxed{\hat{\lambda} = 30^\circ}$.

Τώρα,

$$\hat{K} + \hat{\lambda} + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow \hat{K} + 30^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{K} = 90^\circ}$$

Συνεπώς, το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ορθογώνιο. Θα υπολογίσουμε το μήκος της πλευράς κ .

Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος:

$$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 \Rightarrow \kappa^2 = 8^2 + (8\sqrt{3})^2 \Rightarrow \kappa^2 = 64 + 64 \cdot 3 + 36 = 4 \cdot 64$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa = 16 \text{ m}}$$

Με χρήση του νόμου των ημιτόνων:

$$\frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\kappa}{\eta\mu 90^\circ} \Rightarrow \kappa = \frac{8\sqrt{3}\eta\mu 90^\circ}{\eta\mu 60^\circ} \Rightarrow \kappa = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \boxed{\kappa = 16 \text{ m}}$$

(δ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	$\alpha = \beta \Rightarrow AB\Gamma \text{ ισοσκελές} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$
	$\gamma = 6\sqrt{3} \text{ cm}$	$\hat{A} =;$	Άρα,
	$\hat{\Gamma} = 120^\circ$	$\hat{B} =;$	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
	$\alpha = \beta$	$\alpha, \beta =;$	$\Rightarrow 2\hat{A} + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$ $= \hat{B}$

$$\frac{\alpha}{\eta\mu \hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu \hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu \hat{\Gamma}} \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu 120^\circ}$$

Άρα,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu 120^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{6\sqrt{3}\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{6\sqrt{3}\eta\mu 30^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3} \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \text{ cm}$$

$$\alpha = \beta = 6 \text{ cm}$$

Δραστηριότητα 5

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\hat{A} = 30^\circ$	$R = ;$
$\alpha = 3 \text{ cm}$	

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{\alpha}{2\eta\mu A} = \frac{3}{2\eta\mu 30^\circ} = \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3 \text{ cm}$$

Δραστηριότητα 6

$$A \text{ μέλος} = \eta\mu A + \eta\mu B = \frac{\alpha}{2R} + \frac{\beta}{2R} = \frac{\alpha + \beta}{2R} = B \text{ μέλος}$$

Δραστηριότητα 7

Δεδομένα	Ζητούμενα
$\hat{B} = 30^\circ$	$\hat{A} = ;$
$\alpha = 4 \text{ cm}$	$\hat{\Gamma} = ;$
$\beta = 2\sqrt{2} \text{ cm}$	$\gamma = ;$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} &\Leftrightarrow \frac{4}{\eta\mu A} = \frac{2\sqrt{2}}{\eta\mu 30^\circ} \Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2}}{\eta\mu 30^\circ} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu A} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Άρα, $\hat{A} = 45^\circ$ ή $\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

1^η περίπτωση

$\hat{A} = 45^\circ$. Τότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 105^\circ$$

και άρα

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A} = \frac{4 \eta\mu 105^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = 5.46 \text{ cm}$$

2^η περίπτωση

$\hat{A} = 135^\circ$. Τότε

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 135^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 15^\circ$$

και άρα

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha \eta\mu \Gamma}{\eta\mu A} = \frac{4 \eta\mu 15^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = 1.46 \text{ cm}$$

Δραστηριότητα 8

$$\begin{aligned} \text{Α μέλος} &= \beta(\eta\mu A - \eta\mu B) + \alpha(\eta\mu \Gamma - \eta\mu B) + \gamma(\eta\mu B - \eta\mu A) \\ &= \beta\left(\frac{\alpha}{2R} - \frac{\beta}{2R}\right) + \alpha\left(\frac{\gamma}{2R} - \frac{\beta}{2R}\right) + \gamma\left(\frac{\beta}{2R} - \frac{\alpha}{2R}\right) \\ &= \beta\frac{\alpha - \beta}{2R} + \alpha\frac{\gamma - \beta}{2R} + \gamma\frac{\beta - \alpha}{2R} \\ &= \frac{\beta(\alpha - \gamma) + \alpha(\gamma - \beta) + \gamma(\beta - \alpha)}{2R} \\ &= \frac{\beta\alpha - \beta\gamma + \alpha\gamma - \alpha\beta + \gamma\beta - \alpha\gamma}{2R} \\ &= 0 = \text{Β μέλος} \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 9

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Sigma} &= 180^\circ \Rightarrow 75^\circ + 64^\circ + \hat{\Sigma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Sigma} = 41^\circ \\ \frac{\alpha}{\eta\mu A} &= \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\sigma}{\eta\mu \Sigma} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 64^\circ} = \frac{500}{\eta\mu 41^\circ} \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{500\eta\mu 64^\circ}{\eta\mu 41^\circ} \approx 685 \text{ m} \end{aligned}$$

Β. Ο νόμος των συνημιτόνων

Θεώρημα (ο νόμος των συνημιτόνων)

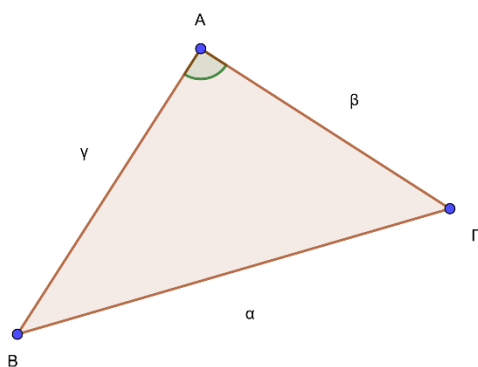
Το τετράγωνο του μήκους μιας πλευράς τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του μήκους των δύο άλλων πλευρών συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές αυτές (η γωνία αυτή λέγεται η περιεχόμενη γωνία).

Δηλαδή σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A} \\ \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos\hat{B} \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\hat{\Gamma} \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$\cos\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \cos\hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}, \quad \cos\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$



(στο αριστερά σχήμα)

Η γωνία $\hat{A}$ είναι η περιεχόμενη των πλευρών β και γ .

Συμπληρώστε:

Η γωνία $\hat{B}$ είναι η περιεχόμενη των πλευρών ... και

Η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι η περιεχόμενη των πλευρών ... και

Πότε χρησιμοποιούμε το νόμο των συνημιτόνων;

- Όταν μας δίνονται οι 3 πλευρές του τριγώνου
- Όταν μας δίνονται οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη τους γωνία

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α τριγώνου $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $\beta = 4\text{ cm}$, $\gamma = 2\text{ cm}$.

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι η περιεχόμενη των πλευρών β και γ . Εφαρμόζουμε λοιπόν το νόμο των συνημιτόνων:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A} = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 16 + 4 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\text{ cm},$$

αφού $\alpha > 0$.

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{A}$ σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 3\text{ cm}$, $\beta = 5\text{ cm}$ $\gamma = 6\text{ cm}$.

Απάντηση

$$\text{συν}\hat{B} = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \frac{3^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{9 + 36 - 25}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

Άσκηση 3

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 2\sqrt{3}\text{ cm}$, $\beta = 2\text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Απάντηση

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\hat{\Gamma} = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\text{συν}30^\circ = 12 + 4 - 8\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 16 - 4 \cdot 3 = 4 \Rightarrow \gamma = \sqrt{4} = 2\text{ cm},\end{aligned}$$

αφού $\gamma > 0$.

Παρατηρούμε ότι $\beta = \gamma = 2\text{ cm}$ και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Τέλος,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 30^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ.$$

Λύσεις των σχολικών δραστηριοτήτων

➤ **Δραστηριότητες σελ. 17 (Ο νόμος των συνημιτόνων)**

Δραστηριότητα 1

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς α του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\beta = 3\text{ cm}$, $\gamma = 6\text{ cm}$ και $\hat{A} = 120^\circ$.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\hat{A} = 120^\circ$	$\alpha = ;$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A} = 3^2 + 6^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A}$
$\beta = 3\text{ cm}$		$= 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \text{συν}120^\circ$
$\gamma = 6\text{ cm}$		$= 45 - 36(-\text{συν}60^\circ) = 45 + 36 \cdot \frac{1}{2} = 45 + 18$
		$= 63$
		$\Rightarrow \alpha = \sqrt{63} = \sqrt{7 \cdot 9} = 3\sqrt{7}\text{ cm},$
		αφού $\alpha > 0$.

Δραστηριότητα 2

Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνιάς $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 2\text{ cm}$, $\beta = 4\text{ cm}$ και $\gamma = 5\text{ cm}$.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\alpha = 2\text{ cm}$	$\text{συν}\hat{\Gamma} = ;$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A} = 3^2 + 6^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A}$
$\beta = 4\text{ cm}$		$= 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \text{συν}120^\circ$
$\gamma = 5\text{ cm}$		$= 45 - 36(-\text{συν}60^\circ) = 45 + 36 \cdot \frac{1}{2} = 45 + 18$
		$= 63$
		$\Rightarrow \alpha = \sqrt{63} = \sqrt{7 \cdot 9} = 3\sqrt{7}\text{ cm},$
		αφού $\alpha > 0$.

Δραστηριότητα 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το συνημίτονο της γωνιάς $\hat{A}$ είναι $\text{συν}\hat{A} = \frac{1}{2}$. Να αποδείξετε ότι

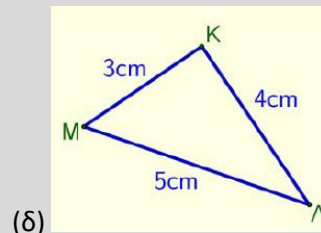
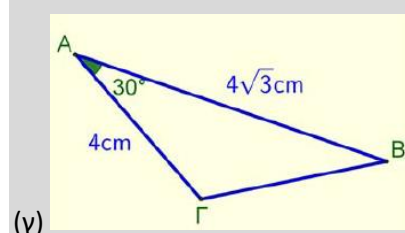
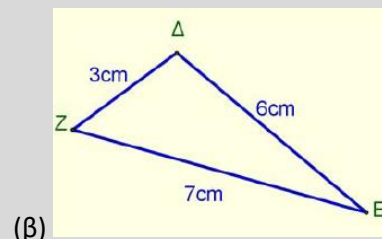
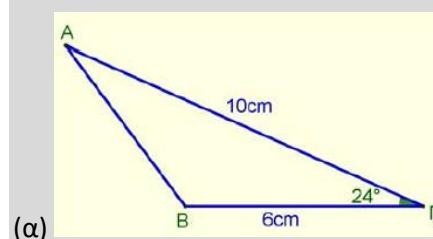
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$$

$\text{συν}\hat{A} = \frac{1}{2}$. Τότε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \frac{1}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$$

Δραστηριότητα 4

Να επιλύσετε τα πιο κάτω τρίγωνα:



(α)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\beta = 10 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\hat{\Gamma}$
			$= 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10\text{συν}24^\circ$
			$= 136 - 120 \cdot 0.92 = 26.37$
	$\alpha = 6 \text{ cm}$	$\hat{B} = ;$	$\Rightarrow \gamma = \sqrt{26.37} \approx 5.14 \text{ cm},$
			αφού $\gamma > 0$.
	$\hat{\Gamma} = 24^\circ$	$\gamma = ;$	Τώρα,
			$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{6}{\eta\mu A} = \frac{10}{\eta\mu B} = \frac{5.14}{\eta\mu 24^\circ}$
	$\hat{A} < 90^\circ$		Άρα,
			$\frac{6}{\eta\mu A} = \frac{5.14}{\eta\mu 24^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{6\eta\mu 24^\circ}{5.14} = 0.47 \Rightarrow \hat{A} \approx 28^\circ$

Αφού $\hat{A} < 90^\circ$. Τέλος,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 28^\circ + \hat{B} + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 128^\circ$$

(β)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\varepsilon = 3 \text{ cm}$	$\hat{\Delta} = ;$	$\text{συν}\hat{E} = \frac{\delta^2 + \zeta^2 - \varepsilon^2}{2\delta\zeta} = \frac{7^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{76}{84}$
			$= 0.905$
			$\Rightarrow \hat{E} = 25.27^\circ \approx 25.3^\circ$
	$\zeta = 6 \text{ cm}$	$\hat{E} = ;$	Τώρα,
			$\frac{\delta}{\eta\mu \Delta} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu E} = \frac{\zeta}{\eta\mu Z} \Leftrightarrow \frac{7}{\eta\mu \Delta} = \frac{3}{\eta\mu 25.3^\circ} = \frac{6}{\eta\mu Z}$
	$\delta = 7 \text{ cm}$	$\hat{Z} = ;$	Άρα,
			$\frac{7}{\eta\mu \Delta} = \frac{3}{\eta\mu 25.3^\circ} \Rightarrow \eta\mu \Delta = \frac{7\eta\mu 25.3^\circ}{3} = 0.99$
	$\hat{\Delta} > 90^\circ$		$\Rightarrow \hat{\Delta} \approx 96.6^\circ$

Αφού $\hat{\Delta} > 90^\circ$. Τέλος,

$$\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^\circ \Rightarrow 96.6^\circ + 25.3^\circ + \hat{Z} = 180^\circ \Rightarrow \hat{Z} = 58.2^\circ$$

(γ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\beta = 4 \text{ cm}$	$\hat{B} = ;$	$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}\hat{A}$
			$= 4^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}\text{συν}30^\circ$
	$\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$	$\hat{\Gamma} = ;$	$= 16 + 3 \cdot 16 - 32\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 64 - 48 = 16$
			$\Rightarrow \alpha = \sqrt{16} = 4 \text{ cm},$
	$\hat{A} = 30^\circ$	$\alpha = ;$	αφού $\alpha > 0$.
	$\hat{B} < 90^\circ$		Παρατηρούμε ότι $\alpha = \beta = 4 \text{ cm}$ και άρα το
			τρίγωνο είναι ισοσκελές. Συνεπώς, $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$. Τότε,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 120^\circ.$$

Διαφορετικά,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{4}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{4}{\eta\mu B} = \frac{4\sqrt{3}}{\eta\mu \Gamma}$$

Άρα,

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 30^\circ \text{ ή } \hat{B} = 120^\circ$$

Αλλά, $\hat{B} < 90^\circ$ και άρα $\hat{B} = 30^\circ$.

(δ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\kappa = 5 \text{ cm}$	$\hat{K} = ;$	$\kappa^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu\text{syn}\hat{K}$
	$\lambda = 3 \text{ cm}$	$\hat{\Lambda} = ;$	$\Rightarrow \text{syn}\hat{K} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - \kappa^2}{2\lambda\mu} = \frac{16 + 9 - 25}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$
	$\mu = 4 \text{ cm}$	$\hat{M} = ;$	$\Rightarrow \hat{K} = 90^\circ$
			και άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
			Χρησιμοποιούμε το νόμο των ημιτόνων:
			$\frac{\kappa}{\eta\mu K} = \frac{\lambda}{\eta\mu \Lambda} = \frac{\mu}{\eta\mu M} \Leftrightarrow \frac{5}{\underbrace{\eta\mu 90^\circ}_{=1}} = \frac{3}{\eta\mu \Lambda} = \frac{4}{\eta\mu M}$

Άρα,

$$5 = \frac{3}{\eta\mu \Lambda} \Leftrightarrow \eta\mu \Lambda = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \hat{\Lambda} = 36.869^\circ \approx 36.9^\circ$$

Τώρα,

$$\hat{K} + \hat{\Lambda} + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 36.9^\circ + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 53.1^\circ.$$

Δραστηριότητα 5

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha\text{syn}B + \beta\text{syn}A = \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{Α' μέλος} &= \alpha\text{syn}B + \beta\text{syn}A = \alpha \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} + \beta \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} = \frac{2\gamma^2}{2\gamma} = \gamma = \text{Β' μέλος} \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 6

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha \sin B = \beta \sin A$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

$$\alpha \sin B = \beta \sin A \Leftrightarrow \alpha \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} = \beta \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta \text{ ή } \alpha = \beta$$

Αλλά, $\alpha, \beta > 0$ και άρα η περίπτωση $\alpha = -\beta$ απορρίπτεται. Συνεπώς, $\alpha = \beta$ και άρα **το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.**

Δραστηριότητα 7

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha = \beta \sin \Gamma$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

$$\alpha = \beta \sin \Gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2$$

Η τελευταία σχέση είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Συνεπώς, το τρίγωνο **$AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$).**

Δραστηριότητα 8

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\beta} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}$$

$$\begin{aligned}\text{Α' μέλος} &= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\beta} \\&= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2 \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha\beta}}{\alpha\beta} \\&= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2\beta^2}\end{aligned}$$

(ομώνυμα)

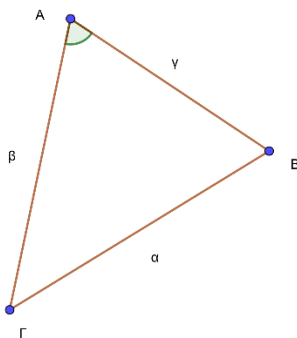
$$\begin{aligned}&= \frac{\beta^2 + \alpha^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2\beta^2} \\&= \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2} = \text{Β' μέλος}\end{aligned}$$

Γ. Υπολογισμός εμβαδού τριγώνου

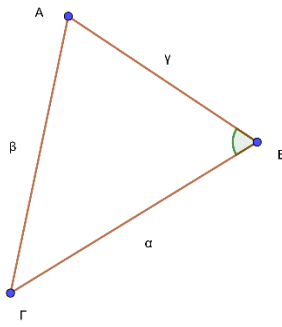
Θεώρημα

Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με το ημιγινόμενο δύο των μηκών των πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης σε αυτές γωνίας. Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

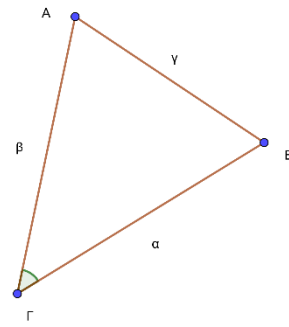
$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}, \quad E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}, \quad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$



$$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}$$



$$E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2}$$

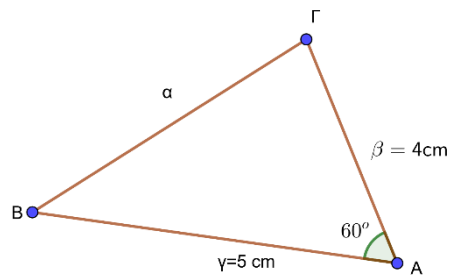


$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 5 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \eta\mu 60^\circ}{2} \\ &= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$



Παράδειγμα 2

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εμβαδόν $E = 5\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\alpha = 4 \text{ cm}$ και $\gamma = 5 \text{ cm}$. Αν $\hat{B} < 90^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}$ και την πλευρά β .

$$E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2} \Leftrightarrow 5\sqrt{3} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \eta\mu B}{2} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{B} = 120^\circ$$

Αλλά, $\hat{B} < 90^\circ$ και άρα $\boxed{\hat{B} = 60^\circ}$.

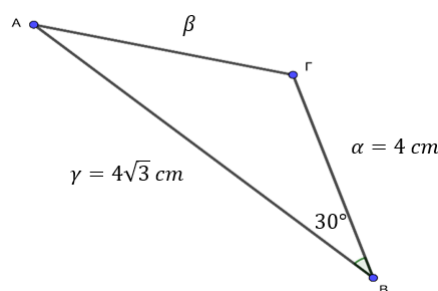
Από το νόμο των συνημιτόνων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \beta^2 &= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sin\hat{B} &= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5\sin 60^\circ \\
 &= 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 41 - 20 = 21
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \sqrt{21} \text{ cm}} \quad (\beta > 0)$$

Παράδειγμα 3

Να επιλύσετε το πιο κάτω τρίγωνο (υποθέστε ότι $\hat{A} < 90^\circ$):



Δεδομένα	Ζητούμενα	$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sin\hat{B}$
$\alpha = 4 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	$= 4^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3}\sin 30^\circ$
$\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$	$\hat{\Gamma} = ;$	$= 16 + 3 \cdot 16 - 32 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 64 - 48 = 16$
$\hat{B} = 30^\circ$	$\beta = ;$	$\Rightarrow \beta = \sqrt{16} = 4 \text{ cm},$

αφού $\beta > 0$.

Παρατηρούμε ότι $\alpha = \beta = 4 \text{ cm}$ και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Συνεπώς, $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$. Τότε,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 120^\circ.$$

Διαφορετικά,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \boxed{\frac{4}{\eta\mu A} = \frac{4}{\eta\mu 30^\circ}} = \frac{4\sqrt{3}}{\eta\mu \Gamma}$$

Άρα,

$$\frac{4}{\eta\mu A} = \frac{4}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \eta\mu A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 30^\circ \text{ ή } \hat{A} = 120^\circ$$

Αλλά, $\hat{A} < 90^\circ$ και άρα $\hat{A} = 30^\circ$.

Ασκήσεις του σχολικού βιβλίου

➤ Δραστηριότητες σελ. 20 (Υπολογισμός εμβαδού)

Δραστηριότητα 1

Να υπολογιστεί το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ με $\alpha = 4\text{ cm}$, $\gamma = 3\text{ cm}$ και $\hat{B} = 30^\circ$.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\hat{B} = 30^\circ$ $\alpha = 4\text{ cm}$ $\gamma = 3\text{ cm}$	$E = ;$	$E = \frac{\alpha\gamma\eta\mu B}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \eta\mu 30^\circ}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\text{ cm}^2$

Δραστηριότητα 2

Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς β του τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 3\sqrt{2}\text{ cm}^2$, $\gamma = 3\text{ cm}$ και $\hat{A} = 45^\circ$.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\hat{A} = 45^\circ$ $E = 3\sqrt{2}\text{ cm}^2$ $\gamma = 3\text{ cm}$	$\beta = ;$	$E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{2} = \frac{\beta \cdot 3 \cdot \eta\mu 45^\circ}{2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\beta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 4\text{ cm}}$

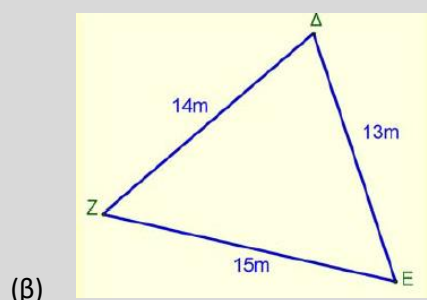
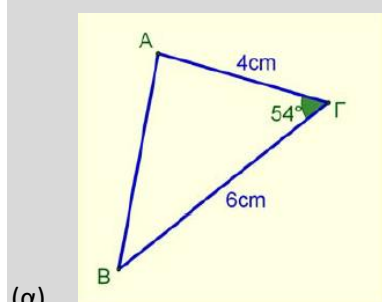
Δραστηριότητα 3

Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ με $E = 5\text{ cm}^2$, $\alpha = 4\text{ cm}$ και $\beta = 10\text{ cm}$.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\alpha = 4\text{ cm}$ $E = 5\text{ cm}^2$ $\beta = 10\text{ cm}$	$\eta\mu\Gamma = ;$	$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} \Leftrightarrow 5 = \frac{4 \cdot 10 \cdot \eta\mu\Gamma}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu\Gamma = \frac{1}{4}}$

Δραστηριότητα 4

Να υπολογίσετε το εμβαδόν των πιο κάτω τριγώνων:



(α)	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\alpha = 6 \text{ cm}$	$E = ;$
	$\beta = 4 \text{ cm}$	
	$\hat{\Gamma} = 54^\circ$	

$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma}}{2} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \eta\mu 54^\circ}{2}$$
$$= 12 \cdot \eta\mu 54^\circ = 12 \cdot 0.809 \approx 9.71 \text{ cm}^2$$

(β)	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\varepsilon = 14 \text{ m}$	$E = ;$
	$\zeta = 13 \text{ m}$	
	$\delta = 15 \text{ m}$	

$$\cos \hat{E} = \frac{\zeta^2 + \delta^2 - \varepsilon^2}{2\zeta\delta} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 14 \cdot 13}$$

$$= \frac{198}{364} = 0.5439 \Rightarrow \hat{E} \approx 57^\circ$$

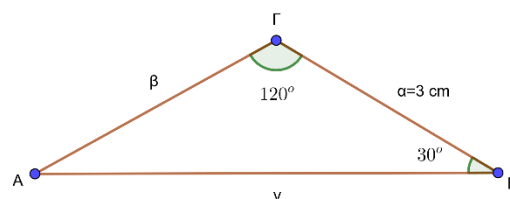
Άρα,

$$E = \frac{\delta \cdot \zeta \cdot \eta\mu \hat{E}}{2} = \frac{15 \cdot 13 \cdot \eta\mu 57^\circ}{2} = 81.77 \text{ m}^2$$

Δραστηριότητα 5

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ με $\alpha = 3 \text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$
 $\Rightarrow \hat{A} + 30^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$
και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
Συνεπώς, $\beta = \alpha = 3 \text{ cm}$.
Έτσι,



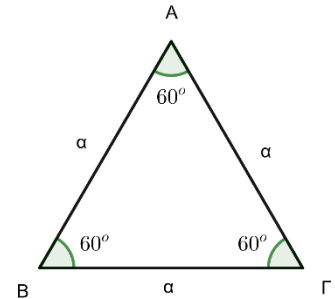
$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{3 \cdot 3\eta\mu 120^\circ}{2} = \frac{9}{2} \cdot \eta\mu 60^\circ$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

Δραστηριότητα 6

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



$$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot \eta\mu 60^\circ}{2} = \frac{\alpha^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

Δραστηριότητα 7

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $\alpha = 2 \text{ cm}$ και $\beta = 4 \text{ cm}$. Να επιλύσετε το τρίγωνο.

Δεδομένα	Ζητούμενα	
$\alpha = 2 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	$E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \eta\mu\Gamma}{2} \Leftrightarrow \boxed{\eta\mu\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ Άρα, είτε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ είτε $\hat{\Gamma} = 120^\circ$. Αν $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, τότε, από το νόμο των συνημιτόνων, $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\hat{\Gamma} = 4 + 16 - 16\cos 60^\circ$ $= 20 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$ $\Rightarrow \gamma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$
	$\hat{B} = ;$	
$E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$\hat{\Gamma} = ;$	
	$\gamma = ;$	
$\beta = 4 \text{ cm}$		

Από το νόμο των ημιτόνων,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu A} = \boxed{\frac{4}{\eta\mu B} = \frac{2\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ}}$$

$$\frac{4}{\eta\mu B} = \frac{2\sqrt{3}}{\eta\mu 60^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{4\eta\mu 60^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 90^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$$

Αν $\hat{\Gamma} = 120^\circ$, τότε, από το νόμο των συνημιτόνων,

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\hat{\Gamma} = 4 + 16 - 16\cos 120^\circ = 4 + 16 + 16\cos 60^\circ \\ &= 20 + 16 \cdot \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow \gamma = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm}\end{aligned}$$

Από το νόμο των ημιτόνων,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{2}{\eta\mu A} = \boxed{\frac{4}{\eta\mu B} = \frac{2\sqrt{7}}{\eta\mu 120^\circ}}$$

$$\frac{4}{\eta\mu B} = \frac{2\sqrt{7}}{\eta\mu 120^\circ} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{4\eta\mu 120^\circ}{2\sqrt{7}} = \frac{4\eta\mu 60^\circ}{2\sqrt{7}} = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \hat{B} = 40.89^\circ \approx 40.9^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 40.9^\circ + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 19.1^\circ$$

Σημείωση: Στις απαντήσεις του σχολικού βιβλίου υπάρχει μόνο η πρώτη περίπτωση, όπου $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Δραστηριότητα 8

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\phi A$$

$$\text{B' μέλος} = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\sigma\phi A$$

$$\left(E = \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2}\right) = \beta^2 + \gamma^2 - 4 \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A}$$

$$= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

$$\begin{array}{lll} \text{(νόμος των} & & \\ \text{συνημιτόνων)} & = \alpha^2 & = \text{A' μέλος} \end{array}$$

Δραστηριότητα 9

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσο με $E = \alpha R \eta\mu \Gamma \eta\mu B$.

Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (από το νόμο των ημιτόνων)

$$\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{2R} \quad \text{και} \quad \eta\mu B = \frac{\beta}{2R}$$

και έχουμε:

$$\beta R \eta \mu \Gamma \eta \mu B = \alpha R \cdot \frac{\gamma}{2R} \cdot \eta \mu B = \frac{\alpha \gamma \eta \mu B}{2} = E$$

Σημείωση: Η εκφώνηση στην άσκηση στο σχολικό βιβλίο είναι $E = \beta R \eta \mu \Gamma \eta \mu B$.

Μπορεί να λυθεί και με $E = \beta R \eta \mu \Gamma \eta \mu A$.

➤ Δραστηριότητες σελ. 21-22 (Ενότητας)

Δραστηριότητα 1

Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$, όταν

(α) $\alpha = 3 \text{ m}$, $\hat{B} = 120^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

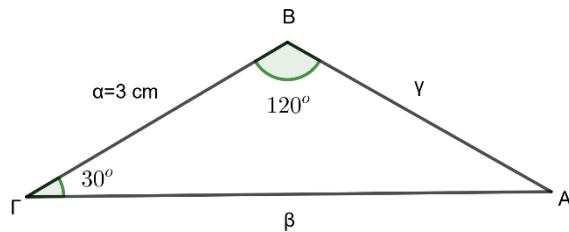
(β) $\beta = 5 \text{ cm}$, $\gamma = 5\sqrt{3} \text{ cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$

(γ) $\alpha = 4 \text{ cm}$, $\beta = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 4 \text{ cm}$

(δ) $E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$, $\beta = 3\sqrt{3} \text{ m}$, $\gamma = 6 \text{ m}$

(ε) $R = 2 \text{ cm}$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$

(α)	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\alpha = 3 \text{ m}$	$\beta = ;$
	$\hat{B} = 120^\circ$	$\gamma = ;$
	$\hat{\Gamma} = 30^\circ$	$\hat{A} = ;$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$$

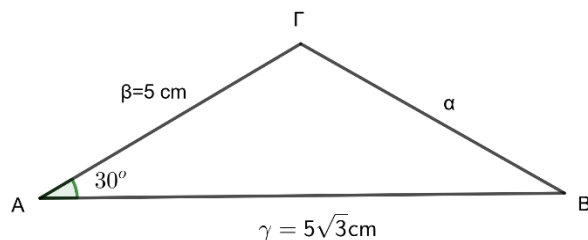
και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές $\Rightarrow \gamma = \alpha = 3 \text{ m}$

Από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{3}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 120^\circ} \Leftrightarrow \frac{3}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 60^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \beta = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

(β)	Δεδομένα	Ζητούμενα
	$\beta = 5 \text{ cm}$	$\alpha = ;$
	$\gamma = 5\sqrt{3} \text{ cm}$	$\hat{B} = ;$
	$\hat{A} = 30^\circ$	$\hat{\Gamma} = ;$



Ξέρουμε δύο πλευρές (τη β και τη γ) και την περιεχόμενη τους γωνία (την $\hat{A}$). Χρησιμοποιούμε λοιπόν το νόμο των συνημιτόνων:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos\hat{A} = 5^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3}\cos 30^\circ$$

$$= 25 + 75 - 50\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 - 25 \cdot 3 = 25$$

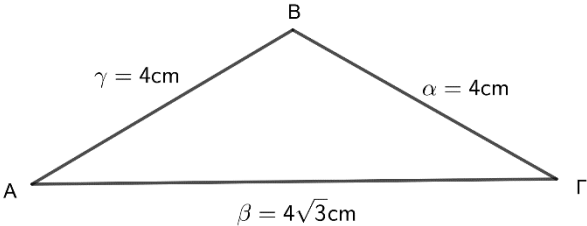
$\Rightarrow \alpha = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$ ($\alpha > 0$) και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές $\Rightarrow \beta = \alpha = 5 \text{ cm}$.

Συνεπώς,

$$\hat{B} = \hat{A} = 30^\circ$$

Τέλος

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + 30^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 120^\circ$$

(γ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$\alpha = 4 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	
	$\beta = 4\sqrt{3} \text{ cm}$	$\hat{B} = ;$	
	$\gamma = 4 \text{ cm}$	$\hat{\Gamma} = ;$	

$\alpha = \gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές $\Rightarrow \hat{A} = \hat{\Gamma}$.

Ξέρουμε μόνο (όλες) τις πλευρές του τριγώνου. Άρα, χρησιμοποιούμε το νόμο των συνημιτόνων:

$$\begin{aligned} \cos \hat{A} &= \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{(4\sqrt{3})^2 + 4^2 - 4^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4} = \frac{16 \cdot 3}{16 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \cos \hat{A} &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \end{aligned}$$

και από πριν, $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 30^\circ$.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 30^\circ + \hat{B} + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ$$

(δ)	Δεδομένα	Ζητούμενα	
	$E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$	$a = ;$	$E = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\beta\gamma\eta\mu A}{2} = 9\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \eta\mu A}{2} = 9\sqrt{3}$ $\Leftrightarrow \eta\mu A = 1 \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$
	$\beta = 3\sqrt{3} \text{ m}$	$\hat{A} = ;$	
	$\gamma = 6 \text{ m}$	$\hat{B} = ;$	
		$\hat{\Gamma} = ;$	και άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Rightarrow \alpha^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 27 + 36 = 63 \Rightarrow \alpha = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \text{ m}$$

Σημείωση: Στις απαντήσεις στο σχολικό εγχειρίδιο η απάντηση δίνεται σε cm και όχι σε m.

Από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{7}}{\eta\mu 90^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta\mu B} = \frac{6}{\eta\mu \Gamma} \Leftrightarrow 3\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta\mu B} = \frac{6}{\eta\mu \Gamma}$$

Έχουμε:

$$3\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta\mu B} \Leftrightarrow \eta\mu B = \sqrt{\frac{3}{7}} \Leftrightarrow \hat{B} = 40.89^\circ \approx 40.9^\circ$$

ή $\hat{B} = 180^\circ - 40.9^\circ = 139.1^\circ$ η οποία περίπτωση απορρίπτεται διότι τότε $\hat{A} + \hat{B} = 229.1^\circ$. Τέλος,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 40.9^\circ + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 49.1^\circ$$

(ε)	Δεδομένα	Ζητούμενα	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 60^\circ + 40^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$
	$R = 2 \text{ cm}$	$\hat{A} = ;$	
	$\hat{B} = 60^\circ$	$a = ;$	Από το νόμο των ημιτόνων, έχουμε:
	$\hat{\Gamma} = 40^\circ$	$\beta = ;$	$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$
		$\gamma = ;$	$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 80^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 40^\circ} = 4$
			$\Leftrightarrow 3\sqrt{7} = \frac{3\sqrt{3}}{\eta\mu B} = \frac{6}{\eta\mu \Gamma}$

Άρα,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 80^\circ} = 4 \Leftrightarrow \alpha = 4\eta\mu 80^\circ = 3.939 \approx 3,74 \text{ cm}$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu 60^\circ} = 4 \Leftrightarrow \beta = 4\eta\mu 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\frac{\gamma}{\eta\mu 40^\circ} = 4 \Leftrightarrow \gamma = 4\eta\mu 40^\circ = 2,571 \approx 2,57 \text{ cm}.$$

Δραστηριότητα 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 12R^2$. Να αποδείξετε ότι:

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 3.$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 12R^2 \Leftrightarrow (2R\eta\mu A)^2 + (2R\eta\mu B)^2 + (2R\eta\mu\Gamma)^2 = 12R^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2\eta\mu^2 A + 4R^2\eta\mu^2 B + 4R^2\eta\mu^2\Gamma = 12R^2$$

$$\Leftrightarrow 4R^2(\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma) = 12R^2$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = \frac{12R^2}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 3$$

Δραστηριότητα 3

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = \beta\gamma$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$.

Είναι

$$\sigmaυν\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2\beta\gamma\sigmaυν\hat{A}$$

και άρα

$$\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = \beta\gamma \Leftrightarrow 2\beta\gamma\sigmaυν\hat{A} = \beta\gamma$$

$$\Leftrightarrow 2\sigmaυν\hat{A} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigmaυν\hat{A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ.$$

Δραστηριότητα 4

Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$(\alpha) \alpha\eta\mu A + \beta\eta\mu B + \gamma\eta\mu\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2R}$$

$$(\beta) \frac{3\alpha + 2\beta}{2R} = 3\eta\mu A + 2\eta\mu B$$

$$(\gamma) \alpha\sigmaυν B - \beta\sigmaυν A = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma}$$

$$(\delta) \frac{2\alpha - \gamma}{3\beta + \gamma} = \frac{2\eta\mu A - \eta\mu\Gamma}{3\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}$$

$$(\epsilon) E = \frac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu A}$$

$$(\sigma\tau) \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2} = \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi\Gamma}$$

$$(\zeta) \frac{\alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\eta\mu(B + \Gamma)}{\eta\mu B - \eta\mu\Gamma}$$

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \alpha\eta\mu A + \beta\eta\mu B + \gamma\eta\mu\Gamma &= \alpha \frac{\alpha}{2R} + \beta \frac{\beta}{2R} + \gamma \frac{\gamma}{2R} \\ &= \frac{\alpha^2}{2R} + \frac{\beta^2}{2R} + \frac{\gamma^2}{2R} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\beta) \quad 3\eta\mu A + 2\eta\mu B &= 3 \frac{\alpha}{2R} + 2 \frac{\beta}{2R} \\ &= \frac{3\alpha}{2R} + \frac{2\beta}{2R} \\ &= \frac{3\alpha + 2\beta}{2R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\gamma) \quad \alpha\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu A &= \alpha \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} - \beta \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} \\ &= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \alpha^2}{2\gamma} \\ &= \frac{2\alpha^2 - 2\beta^2}{2\gamma} = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{2\gamma} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\delta) \quad \frac{2\eta\mu A - \eta\mu\Gamma}{3\eta\mu B + \eta\mu\Gamma} &= \frac{2 \frac{\alpha}{2R} - \frac{\gamma}{2R}}{3 \frac{\beta}{2R} + \frac{\gamma}{2R}} = \frac{\frac{2\alpha - \gamma}{2R}}{\frac{3\beta + \gamma}{2R}} = \frac{2\alpha - \gamma}{3\beta + \gamma} \\ &= \frac{2\alpha^2 - 2\beta^2}{2\gamma} = \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{2\gamma} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\epsilon) \quad \frac{\alpha^2 \eta \mu B \eta \mu \Gamma}{2 \eta \mu A} &= \frac{\alpha^2 \frac{\beta}{2R} \eta \mu \Gamma}{2 \frac{\alpha}{2R}} = \frac{\frac{\alpha^2 \beta \eta \mu \Gamma}{2R}}{\frac{\alpha}{R}} = \frac{\alpha^2 \beta R \eta \mu \Gamma}{2 \alpha R} \\
 &= \frac{\alpha \beta \eta \mu \Gamma}{2} = E.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma) \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2} &= \frac{2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma\sigma\upsilon\nu B} = \frac{2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{2R\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B} \\
 &= \frac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}}{\frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}} = \frac{\epsilon\phi B}{\epsilon\phi\Gamma}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\zeta) \quad \frac{\alpha}{\beta - \gamma} &= \frac{2R\eta\mu A}{2R\eta\mu B - 2R\eta\mu\Gamma} = \frac{2R\eta\mu A}{2R(\eta\mu B - \eta\mu\Gamma)} \\
 &= \frac{\eta\mu A}{\eta\mu B - \eta\mu\Gamma}
 \end{aligned}$$

Αλλά,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma}) \Rightarrow \eta\mu\hat{A} = \eta\mu(180^\circ - (\hat{B} + \hat{\Gamma})) = \eta\mu(\hat{B} + \hat{\Gamma})$$

και άρα

$$\frac{\eta\mu A}{\eta\mu B - \eta\mu\Gamma} = \frac{\eta\mu(B + \Gamma)}{\eta\mu B - \eta\mu\Gamma}$$

Δραστηριότητα 5

Αν σε τριγώνο $AB\Gamma$ ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές:

(α) $\alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B$

(β) $\eta\mu A = 2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

$$(\alpha) \quad \alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \frac{\alpha}{2R} = \beta \frac{\beta}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta \text{ (απορρίπτεται)}$$

(αφού $\alpha, \beta > 0$) $\Leftrightarrow$ το τρίγωνο **ABΓ** είναι ισοσκελές (**ΑΓ** = **ΒΓ**)
 Διαφορετικά,

$$\alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta = 0) \text{ ή } (\alpha + \beta = 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

(αφού $\alpha, \beta > 0$)

$$(β) \quad \eta\mu A = 2\eta\mu B \sin \Gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2R} = 2 \frac{\beta}{2R} \cdot \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \gamma^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = \gamma^2$$

$$\Leftrightarrow \beta = \gamma \text{ ή } \beta = -\gamma \text{ (απορρίπτεται)}$$

(αφού $\beta, \gamma > 0$) $\Leftrightarrow$ το τρίγωνο **ABΓ** είναι ισοσκελές (**AB** = **ΑΓ**).

Διαφορετικά,

$$\beta^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow (\beta - \gamma)(\beta + \gamma) = 0 \Leftrightarrow (\beta - \gamma = 0) \text{ ή } (\beta + \gamma = 0) \Leftrightarrow \beta = \gamma$$

(αφού $\alpha, \beta > 0$).

Δραστηριότητα 6

Αν σε τρίγωνο **ABΓ** ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο:

(α) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B = \eta\mu^2 \Gamma$

(β) $\gamma \sin B - \beta \sin \Gamma = \alpha$

(γ) $\sin B + \sin \Gamma = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$

(α) Έχουμε

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2R} = \eta\mu A \\ \frac{\beta}{2R} = \eta\mu B \\ \frac{\gamma}{2R} = \eta\mu\Gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^2}{4R^2} = \eta\mu^2 A \\ \frac{\beta^2}{4R^2} = \eta\mu^2 B \\ \frac{\gamma^2}{4R^2} = \eta\mu^2 \Gamma \end{cases}$$

και άρα

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B &= \eta\mu^2 \Gamma & \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2}{4R^2} + \frac{\beta^2}{4R^2} = \frac{\gamma^2}{4R^2} \\ & & \Leftrightarrow & \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \end{aligned}$$

το οποίο είναι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Άρα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$).

$$\begin{aligned} (\beta) \quad \gamma \sigma\upsilon\nu B - \beta \sigma\upsilon\nu\Gamma &= \alpha & \Leftrightarrow & \gamma \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} - \beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \alpha \\ & & \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \alpha \\ & & \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha} = \alpha \\ & & \Leftrightarrow & \frac{2\gamma^2 - 2\beta^2}{2\alpha} = \alpha \\ & & \Leftrightarrow & \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha} = \alpha \\ & & \Leftrightarrow & \gamma^2 - \beta^2 = \alpha^2 \\ & & \Leftrightarrow & \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \end{aligned}$$

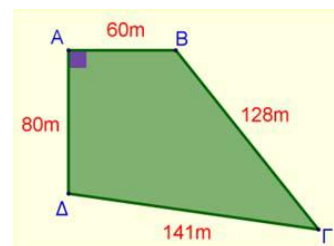
το οποίο είναι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Άρα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$).

$$\begin{aligned}
(\gamma) \quad \sigma_{\nu\beta} + \sigma_{\nu\gamma} &= \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) + \gamma(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta\alpha^2 + \beta\gamma^2 - \beta^3 + \gamma\alpha^2 + \gamma\beta^2 - \gamma^3}{2\alpha\beta\gamma} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \beta\alpha^2 + \beta\gamma^2 - \beta^3 + \gamma\alpha^2 + \gamma\beta^2 - \gamma^3 = 2\beta\gamma(\beta + \gamma) \\
&\Leftrightarrow \begin{aligned} &\beta\alpha^2 + \beta\gamma^2 - \beta^3 + \gamma\alpha^2 + \beta^2\gamma - \gamma^3 \\ &= 2\beta^2\gamma + 2\beta\gamma^2 \end{aligned} \\
&\Leftrightarrow \beta\alpha^2 - \beta^3 + \gamma\alpha^2 - \gamma^3 = \beta^2\gamma + \beta\gamma^2 \\
&\Leftrightarrow \alpha^2(\beta + \gamma) - (\beta^3 + \gamma^3) = \beta\gamma(\beta + \gamma) \\
&\Leftrightarrow \alpha^2(\beta + \gamma) - (\beta + \gamma)(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2) = \beta\gamma(\beta + \gamma) \\
&\Leftrightarrow \begin{aligned} &\alpha^2(\beta + \gamma) - (\beta + \gamma)(\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2) - \beta\gamma(\beta + \gamma) \\ &= 0 \end{aligned} \\
&\Leftrightarrow (\beta + \gamma)[\alpha^2 - (\beta^2 + \beta\gamma - \gamma^2) - \beta\gamma] = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta + \gamma)(\alpha^2 - \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - \beta\gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\beta + \gamma)(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) = 0 \\
&\beta + \gamma = 0 \text{ (απορρίπτεται) ή } \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 = 0, \\
&\text{δηλαδή } \alpha^2 + \gamma^2 = \beta^2,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Άρα, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$).

Δραστηριότητα 7

Ο ιδιοκτήτης του διπλανού τεμαχίου γης υποστηρίζει ότι το εμβαδόν του τεμαχίου είναι 8700 m^2 . Η Άρτεμις θέλει να αγοράσει το τεμάχιο και υποστηρίζει ότι ο ιδιοκτήτης δε λέει την αλήθεια. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο;



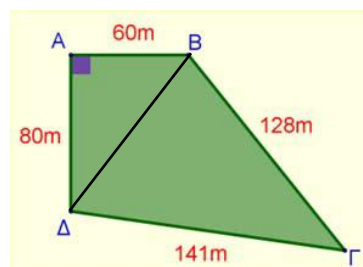
Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του τεμαχίου γης.
Αρχικά φέρουμε τη διαγώνιο BD .

Το τρίγωνο ABD είναι ορθογώνιο. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$\begin{aligned}(BD)^2 &= (60)^2 + (80)^2 \\ \Rightarrow (BD)^2 &= 3600 + 6400 = 10000 \\ \Rightarrow (BD) &= 100 \text{ m}\end{aligned}$$

Είναι

$$E_{ABD} = \frac{(AD)(AB)}{2} = \frac{60 \cdot 80}{2} = 2400 \text{ m}^2$$



Υπολογίζουμε το εμβαδόν του τριγώνου BDC .

Έχουμε:

$$\beta = 141 \text{ m}, \quad \gamma = 100 \text{ m}, \quad \delta = 128 \text{ m}$$

Ξέρουμε μόνο (όλες) τις πλευρές του τριγώνου. Άρα, χρησιμοποιούμε το νόμο των συνημιτόνων:

$$\begin{aligned}\cos \hat{\Gamma} &= \frac{\beta^2 + \delta^2 - \gamma^2}{2\beta\delta} = \frac{(141)^2 + (128)^2 - (100)^2}{2 \cdot 141 \cdot 128} = \frac{6265}{36096} = 0.1735 \\ \Rightarrow \hat{\Gamma} &\approx 80^\circ\end{aligned}$$

Άρα,

$$E = \frac{\beta\delta\eta\mu\hat{\Gamma}}{2} = \frac{(141) \cdot (128)\eta\mu 80^\circ}{2} = 8886.9 \text{ m}^2 > 8700 \text{ m}^2$$

και συνεπώς, η Άρτεμις έχει δίκαιο.

➤ Δραστηριότητες σελ. 23 (Εμπλουτισμού)

Δραστηριότητα 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = 3\beta^2$.

$\hat{A} = 120^\circ$ και αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές, έχουμε ότι $\beta = \gamma$.

Έτσι,

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin\hat{A} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin 120^\circ \\ &= \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \quad (\beta = \gamma) = 3\beta^2\end{aligned}$$

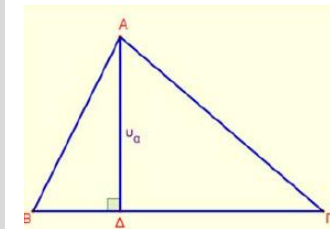
Δραστηριότητα 2

Στο διπλανό σχήμα φέρουμε το ύψος v_α στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $v_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$

(β) $E_{AB\Gamma} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$



(α)

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{A\Delta}{AB} \Rightarrow \frac{\beta}{2R} = \frac{v_\alpha}{\gamma} \Rightarrow v_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R}$$

(β)

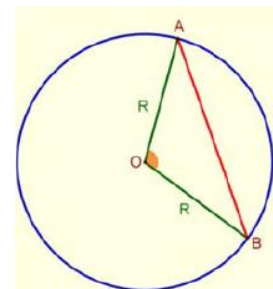
$$\left\{ \begin{array}{l} E_{AB\Gamma} = \frac{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta) \times (\acute{\upsilon}\psi\omicron\varsigma)}{2} = \frac{(B\Gamma) \times v_\alpha}{2} \\ B\Gamma = \alpha \\ v_\alpha = \frac{\beta\gamma}{2R} \end{array} \right. \Rightarrow E_{AB\Gamma} = \frac{\alpha \times \frac{\beta\gamma}{2R}}{2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Δραστηριότητα 3

Στο διπλανό σχήμα φέρουμε χορδή AB σε κύκλο $K(O, R)$.

Να αποδείξετε ότι:

$$AB = R\sqrt{2 - 2\sin(\hat{A}\hat{O}\hat{B})}$$



Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sin\hat{A}\hat{O}\hat{B}$$

δηλαδή $(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \sin A \hat{O} B$, δηλ. $(AB)^2 = 2R^2 - 2R^2 \sin A \hat{O} B$, δηλαδή

$$(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \sin A \hat{O} B$$

δηλαδή

$$(AB)^2 = 2R^2(1 - \sin A \hat{O} B)$$

και αφού $(AB) > 0$,

$$(AB) = \sqrt{2R^2(1 - \sin A \hat{O} B)} = R\sqrt{2 - 2\sin A \hat{O} B}$$

Δραστηριότητα 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 5\sqrt{3}$ και $\hat{A} = 30^\circ$, Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} &= \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{5}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \\ &\Leftrightarrow 2 = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \end{aligned}$$

Έτσι,

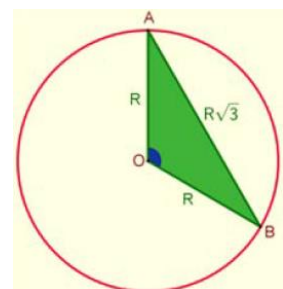
$$2 = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ \text{ ή } 120^\circ$$

Αν $\hat{B} = 60^\circ$, τότε, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Αν $\hat{B} = 120^\circ$, τότε από την ίδια σχέση βρίσκουμε ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ = \hat{A}$ και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Δραστηριότητα 5

Σε κύκλο $K(O, R)$ γράφουμε χορδή κύκλο $AB = R\sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι

$$E = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$



Είναι $(OA) = (OB) = R$. Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές. Φέρνουμε το ύψος (το οποίο είναι και διάμεσος και διχοτόμος) (OG) . Είναι $AG = \frac{(AB)}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο αυτό,

$$(OA)^2 = (AG)^2 + (OG)^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (OG)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{3R^2}{4} + (OG)^2 \Rightarrow (OG) = \frac{R}{2}$$

Έτσι,

$$\mathbf{E}_{AO\Gamma} = \frac{(AG)(OG)}{2} = \frac{\frac{R}{2} \times \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$$

και αφού $\mathbf{E}_{AO\Gamma} = \mathbf{E}_{BO\Gamma}$,

$$\mathbf{E}_{AOB} = 2 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$