



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



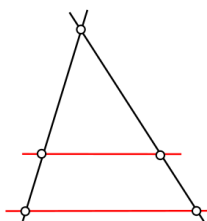
Κυπριακή Δημοκρατία

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: Ηλεκτρικές Εγκαταστάσεις & Αυτοματισμοί (ELEC 0101)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γιάννης Ιωακείμ

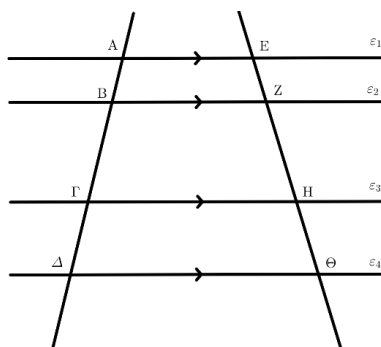
ΜΑΘΗΜΑ - Μαθηματικά

• Το Θεώρημα του Θαλή¹ •



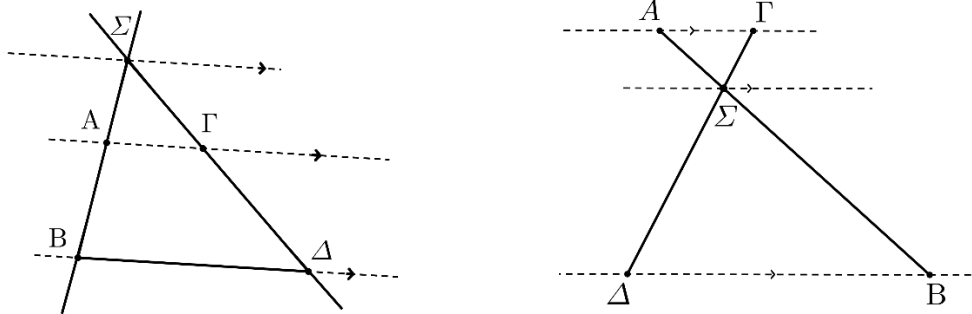
Θεώρημα

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα αποκτόμενα τμήματα πάνω στη μια ευθεία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που αποκόπτονται από την άλλη ευθεία (δες εικόνα 1).



$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

¹ Το θεώρημα παραδοσιακά αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό Θαλή. Η πρώτη γνωστή απόδειξη βρίσκεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (Πρόταση 17 Βιβλίο 11). Το θεώρημα είναι ισοδύναμο με αυτό περί των αναλογιών σε όμοια τρίγωνα. (πηγή: <https://el.wikipedia.org/>)



$$\frac{SA}{AB} = \frac{SG}{\Gamma\Delta} = \frac{SB}{\Sigma\Delta}$$

Εικόνα 1: Το Θεώρημα του Θαλή

Πόρισμα 1

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, αν Δ μέσο της (AB) και $(\Delta E) \parallel (B\Gamma)$ τότε το E είναι το μέσον της $(A\Gamma)$.

Απόδειξη

Φέρουμε ευθεία (ε) η οποία περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη προς την πλευρά $(B\Gamma)$. Τότε, $(\varepsilon) \parallel (B\Gamma) \parallel (\Delta E)$ και αφού $AD = \Delta B$, από το Θεώρημα του Θαλή έπεται ότι $AE = E\Gamma$, δηλ. το E είναι το μέσον της $(A\Gamma)$.

Ισχύει και το αντίστροφο του πιο πάνω Πορίσματος.

Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή:

Αν δύο ευθείες (λ) και (μ) τέμνονται από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία A, B και Δ, E αντίστοιχα και Γ, Z είναι σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΔE αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE}$, τότε η ευθεία (ε_3) στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ και Z είναι παράλληλη προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

Παράδειγμα

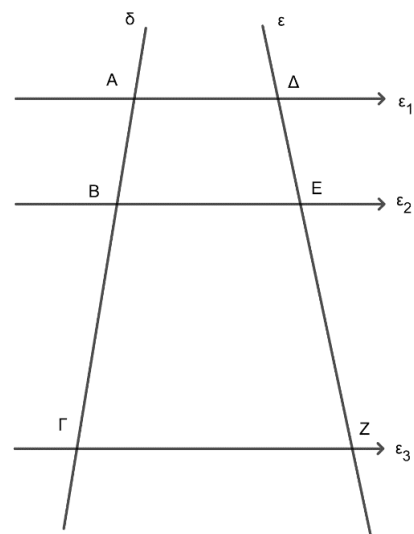
Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και οι ευθείες δ και ζ τέμνουν τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z .

Αν $AB = 5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 15 \text{ cm}$ και $EZ = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE .

Απάντηση

Αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\Delta E} &= \frac{B\Gamma}{EZ} \Leftrightarrow \frac{5}{\Delta E} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow 15(\Delta E) = 5 \cdot 12 \\ &\Leftrightarrow 15 \cdot (\Delta E) = 60 \Leftrightarrow \frac{15 \cdot (\Delta E)}{15} = \frac{60}{15} \\ &\Leftrightarrow \boxed{(\Delta E) = 4 \text{ cm}} \end{aligned}$$



Πόρισμα 2

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισούται με το μέσον αυτής.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ μέσον της (AB) και E μέσον της $(A\Gamma)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$(\Delta E) \parallel \frac{(B\Gamma)}{2}.$$

Προς τούτο, προεκτείνουμε την πλευρά (ΔE) κατά τμήμα $(EZ) = (\Delta E)$. Τότε, το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, δηλαδή

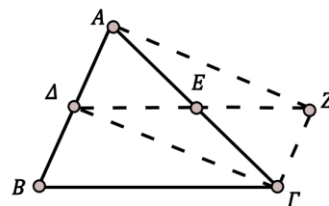
$$(\Delta\Delta) \parallel \frac{(\Gamma Z)}{2}$$

και έτσι (αφού $(\Delta\Delta) = (B\Delta)$), έχουμε

$$(\Delta B) \parallel (\Gamma Z)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι το τετράπλευρο $B\Delta Z\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $(\Delta Z) \parallel (B\Gamma) \Rightarrow (\Delta E) \parallel (B\Gamma)$, δηλαδή

$$(\Delta E) \parallel \frac{(B\Gamma)}{2}.$$



Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα είναι $(AB) \parallel (\Gamma\Delta) \parallel (EZ)$ και να $(A\Gamma) = 5\text{cm}$, $(AE) = 15\text{cm}$ και $(BZ) = 12\text{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της $(B\Delta)$ και της (ΓE) .

Απάντηση

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \xrightarrow{\text{θ.θαλή}} \frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{\Gamma E}{\Delta Z} = \frac{AE}{BZ}$$

δηλαδή

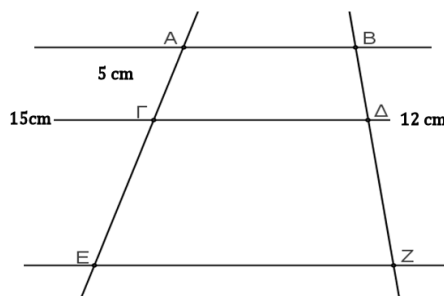
$$\frac{5}{B\Delta} = \frac{\Gamma E}{\Delta Z} = \frac{15}{12}$$

και άρα

$$\frac{5}{B\Delta} = \frac{15}{12} \Rightarrow B\Delta = 4\text{ cm}$$

Επίσης,

$$(\Gamma E) = (AE) - (A\Gamma) = 15 - 5 = 10\text{ cm}$$



Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα είναι

$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4)$$

και $(AB) = 4\text{cm}$, $(B\Gamma) = 8\text{cm}$, $(\Gamma\Delta) = 2\text{cm}$, $(ZH) = 12\text{cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της (EZ) και της $(Z\Theta)$.

Απάντηση

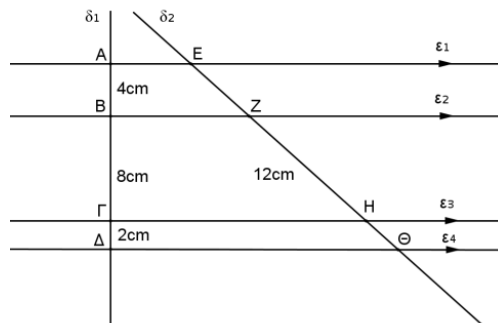
$$(\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \xrightarrow{\text{θ.θαλή}} \frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$$

δηλ.

$$\frac{4}{EZ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

και άρα

$$EZ = 6\text{ cm}$$



Επίσης,

$$(\varepsilon_2) \parallel (\varepsilon_3) \parallel (\varepsilon_4) \xrightarrow{\text{Θ.Θαλή}} \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} = \frac{B\Delta}{Z\Theta}$$

δηλαδή

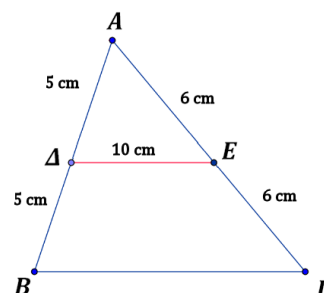
$$\frac{8}{12} = \frac{2}{H\Theta} = \frac{10}{Z\Theta}$$

και αρα

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{Z\Theta} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{10}{Z\Theta} \Rightarrow (Z\Theta) = 15 \text{ cm}$$

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα είναι $(AD) = (DB) = 5 \text{ cm}$, $(AE) = (EG) = 6 \text{ cm}$ και $(B\Gamma) = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της (ΔE) .



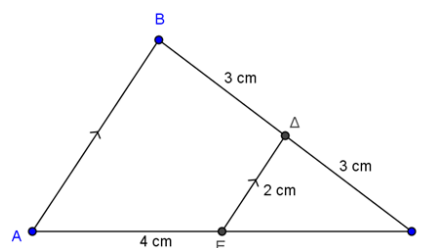
Απάντηση

Αφού Δ μέσον της (AB) και E μέσον της (AG) , τότε από το Πόρισμα 2, $(\Delta E) \parallel (B\Gamma)$ και

$$(\Delta E) = \frac{(B\Gamma)}{2} = 5 \text{ cm}$$

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα, $(AE) = 4 \text{ cm}$, $(B\Delta) = (\Delta\Gamma) = 3 \text{ cm}$ και $(\Delta E) = 3 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος της $(E\Gamma)$, και της (AB) .



Απάντηση

Αφού $(AB) \parallel (E\Delta)$ και Δ το μέσον του $(B\Gamma)$, έπεται ότι E το μέσον του (AG) και αρα $(E\Gamma) = (AE) = 4 \text{ cm}$. Επίσης,

$$(\Delta E) \parallel = \frac{(AB)}{2}$$

και έτσι, $(AB) = 2(\Delta E) = 4 \text{ cm}$.

Θεώρημα του Θαλή (ειδική περίπτωση)

Αν ευθείες παράλληλες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν ίσα τμήματα πάνω στη μία, τότε θα ορίζουν και ίσα τμήματα πάνω στην άλλη.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) οι οποίες τέμνουν τις ευθείες δ_1 και δ_2 στα σημεία A, B, Γ και Δ, E, Z αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $(\Delta E) = (EZ)$. Προς τούτο, φέρνουμε ευθεία $(AK) \parallel (\Delta Z)$. Τότε, τα τετράπλευρα $A\Delta EH$ και $EZKH$ είναι παραλληλόγραμμα, $(AH) \parallel = (\Delta E)$ και $(HK) \parallel = (EZ)$. Τότε $(\Delta E) = (EZ)$.

