



Με τη συγχρηματοδότηση
της Ευρωπαϊκής Ένωσης



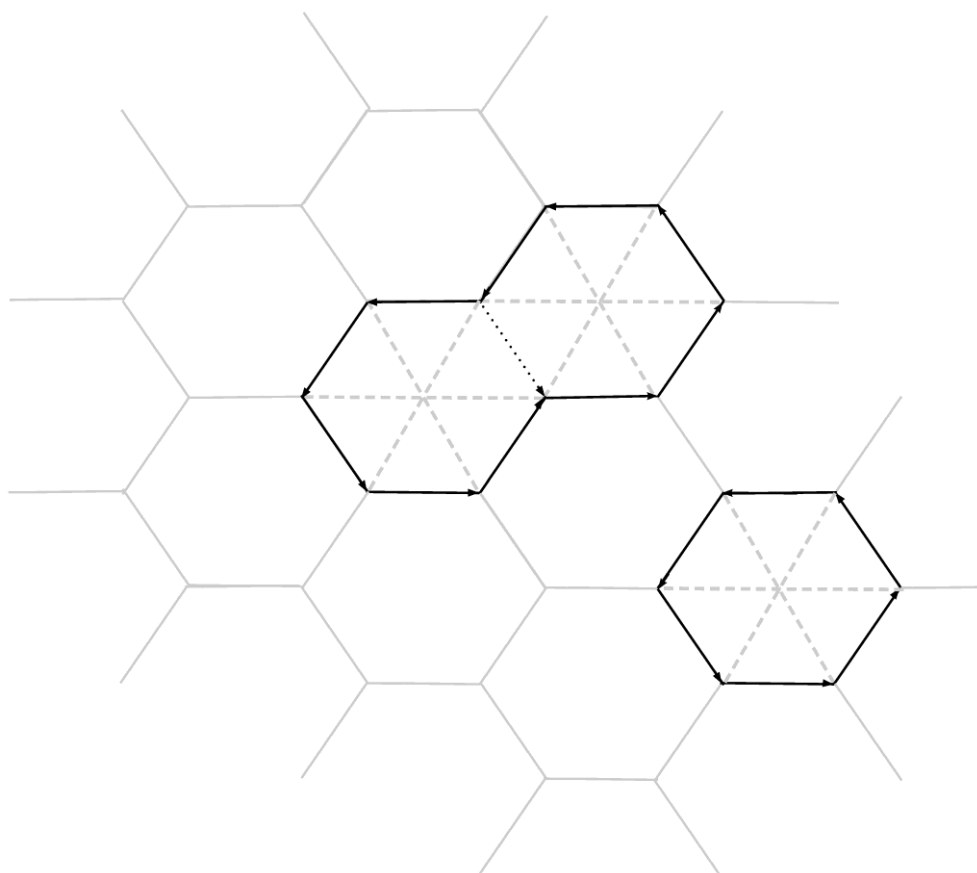
Κυπριακή Δημοκρατία

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: Ηλεκτρικές Εγκαταστάσεις & Αυτοματισμοί (ELEC 0101)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γιάννης Ιωακείμ

ΜΑΘΗΜΑ - Μαθηματικά

• Διανύσματα •



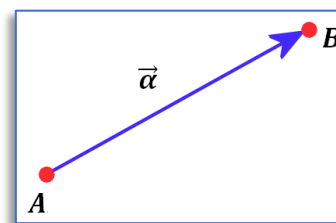
Μονόμετρα ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία για τον προσδιορισμό τους αρκεί μόνο το **μέτρο** τους.

Διανυσματικά ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία για τον προσδιορισμό τους, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειάζονται και τη **διεύθυνση** και τη **φορά** τους.

Μονόμετρα μεγέθη	Διανυσματικά μεγέθη
➤ ο χρόνος	➤ η μετατόπιση ενός κινητού
➤ η μάζα ενός σώματος	➤ η ταχύτητα ενός κινητού
➤ η κινητική ενέργεια	➤ η μεταβολή της ταχύτητας ενός κινητού
➤ η μηχανική ενέργεια	

Τα διανυσματικά μεγέθη παριστάνονται με **διανύσματα**, τα οποία αναπαρίστανται με βέλη, έχοντας ένα σημείο A (που είναι η αρχή του) και λέγεται **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, και ένα σημείο B (τέλος) που είναι το **πέρας** του διανύσματος.

Το διάνυσμα με αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο B , συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ ή με $\vec{a}$ όταν γνωρίζουμε την αρχή και το πέρας αυτού.



Ένα διάνυσμα καθορίζεται πλήρως από τα εξής στοιχεία:

(α) Μέτρο, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , το οποίο συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.

(β) Διεύθυνση, την ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα A, B ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή.

(γ) Φορά, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το A και πέρας το B (συμβολικά με $\overrightarrow{AB}$) ή αρχή το B και πέρας το A (συμβολικά με $\overrightarrow{BA}$)

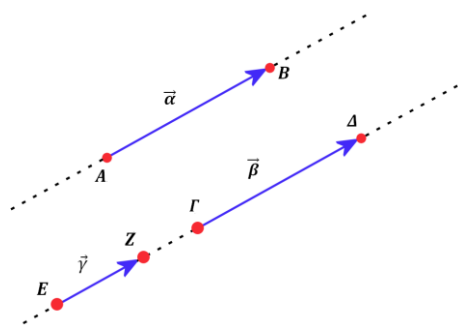
► **Διεύθυνση + φορά = κατεύθυνση**

Μηδενικό λέγεται το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν και το οποίο συμβολίζουμε με $\vec{0}$. Με άλλα λόγια, το μηδενικό διάνυσμα είναι ένα εκφυλισμένο σε σημείο διάνυσμα.

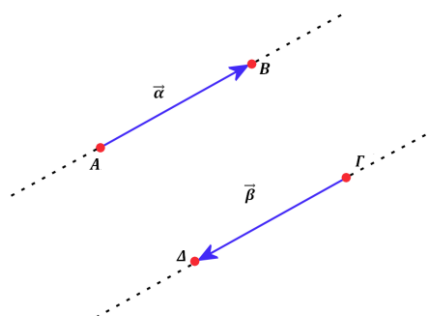
Παράλληλα ή συγγραμμικά ονομάζονται τα μη-μηδενικά διανύσματα τα οποία έχουν την ίδια διεύθυνση.

Τα παράλληλα διανύσματα διακρίνονται σε:

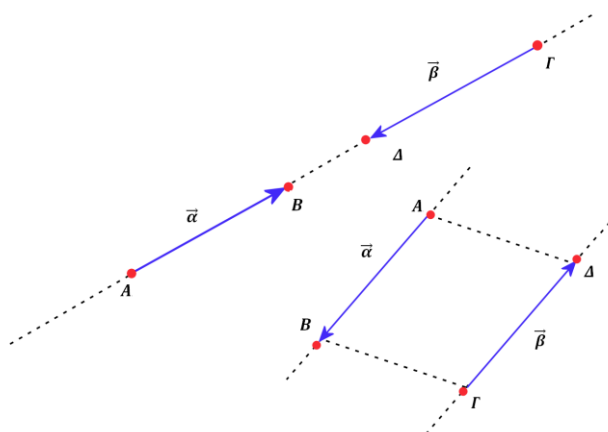
- **Ομόρροπα**¹ αν έχουν την ίδια φορά.
- **Αντίρροπα**² αν έχουν αντίθετη φορά.



$\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{\gamma}$ όλα **ομόρροπα** μεταξύ τους



$\vec{a}$ και $\vec{b}$ **αντίρροπα**



Ζεύγη **αντίρροπων** διανυσμάτων

Παρατήρηση: Αν M είναι το μέσο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Ίσα λέγονται τα διανύσματα τα οποία έχουν *ίδιο μέτρο*, *ίδια διεύθυνση* και *ίδια φορά*. Αν δυο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ίσα, γράφουμε $\vec{a} = \vec{b}$.

Αντίθετα, λέγονται δύο διανύσματα που έχουν *ίδια διεύθυνση*, *ίδιο μέτρο* και *αντίθετη φορά*. Αν $\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα, τότε με $-\vec{a}$ συμβολίζουμε το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{a}$.

¹ ρέπουν προς την ίδια κατεύθυνση, έχουν την ίδια ροπή.

² ρέπουν προς την αντίθετη κατεύθυνση, έχουν την αντίθετη ροπή.

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$\vec{\alpha}$ και $\vec{\theta}$ αντίθετα,

$\vec{\eta}$ και $\vec{\delta}$ αντίθετα,

$\vec{\epsilon}$ και $\vec{\kappa}$ αντίθετα,

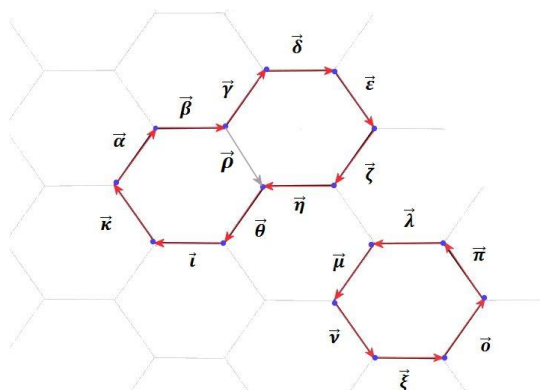
$\vec{\kappa}, \vec{\mu}$ και $\vec{\theta}$ ίσα,

$\vec{\pi}$ και $\vec{\kappa}$ ίσα,

$\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ ίσα,

$\vec{\rho}, \vec{\epsilon}$ και $\vec{\nu}$ ίσα

κ.ο.κ..



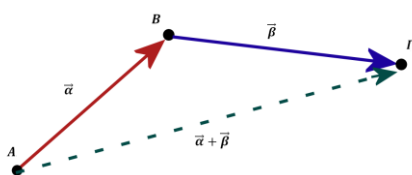
Πράξεις με διανύσματα

Δυο διανύσματα λέγονται **διαδοχικά** αν το πέρας του ενός διανύσματος συμπίπτει με την αρχή του άλλου διανύσματος και **άθροισμα** δυο διαδοχικών διανυσμάτων είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και ως πέρας το πέρας του δεύτερου.

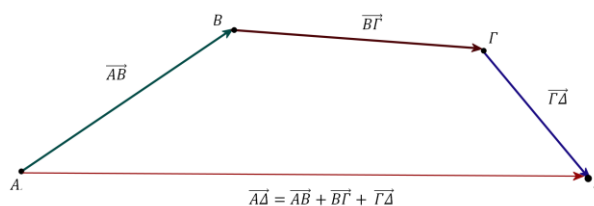
Η διαδικασία πρόσθεσης δυο διαδοχικών διανυσμάτων γενικεύεται και για περισσότερα από δυο διαδοχικά ανά δύο διανύσματα (προσθέτοντας ανά δυο τα διανύσματα αυτά). Στην περίπτωση αυτή, το άθροισμά τους είναι το **διάνυσμα** το οποίο έχει αρχή την αρχή του πρώτου διανύσματος και πέρας το πέρας του τελευταίου διανύσματος.

Συμβολικά, η πρόσθεση των (διαδοχικών) διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ γράφεται:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B\Gamma}$$



άθροισμα δυο διαδοχικών
διανυσμάτων



άθροισμα τριών διαδοχικών διανυσμάτων

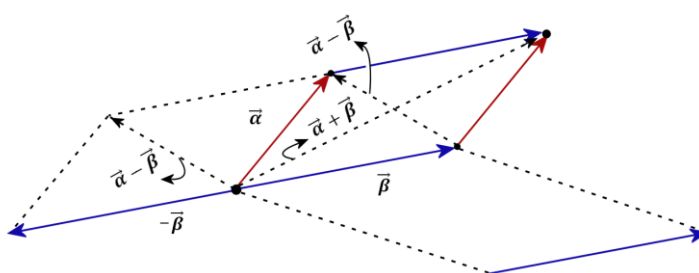
Η **διαφορά** δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\beta}$, δηλαδή με το $-\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, δηλαδή:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}).$$

Η μέθοδος του παραλληλογράμμου

Έστω $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δύο ελεύθερα διανύσματα στο επίπεδο.

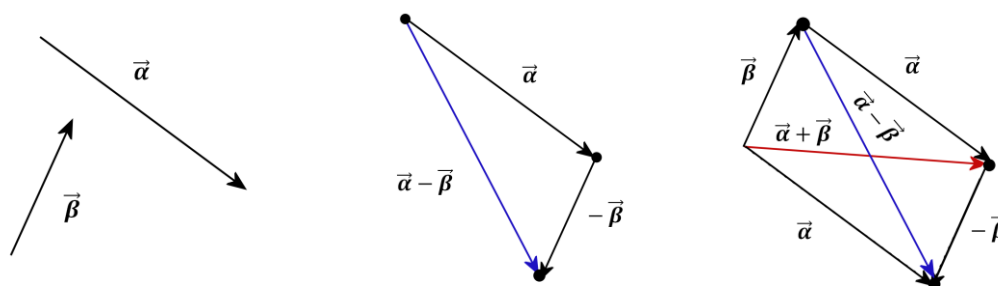
Στην περίπτωση που τα διανύσματα αυτά δεν είναι διαδοχικά, για τα να προσθέσουμε, εκτελούμε παράλληλη μεταφορά έτσι ώστε το πέρας του ενός να συμπίπτει με την αρχή του άλλου.



Διαφορετικά, αν επιλέξουμε να μεταφέρουμε τα διανύσματα έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή, η **συμμετρία** που εμπεριέχει το παραλληλόγραμμο μας επιτρέπει να τα προσθέτουμε εύκολα.

Διαδικασία πρόσθεσης ή αφαίρεσης δύο (ελεύθερων) διανυσμάτων

1. Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα έτσι ώστε οι αρχές τους να συμπίπτουν
2. Το διάνυσμα το οποίο έχει ως αρχή την κοινή αρχή των δύο διανυσμάτων και ως τέλος την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου, είναι το **άθροισμα** των δύο διανυσμάτων. Δηλαδή το άθροισμα των δυο διανυσμάτων είναι ομόρροπο με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου. Συγκεκριμένα, έχει μέτρο ίσο με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου η οποία έχει απέναντι κορυφή την κοινή αρχή των δυο διανυσμάτων και φορά από την αυτή αρχή και πέρας την απέναντι κορυφή.
3. Η **διαφορά** των δυο διανυσμάτων είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή το πέρας του ενός διανύσματος και ως πέρας την απέναντι κορυφή του παραλληλογράμμου και καθορίζεται όπως και πριν.



Σχήμα: Πρόσθεση και αφαίρεση (ελεύθερων) διανυσμάτων (ο κανόνας του παραλληλογράμμου)

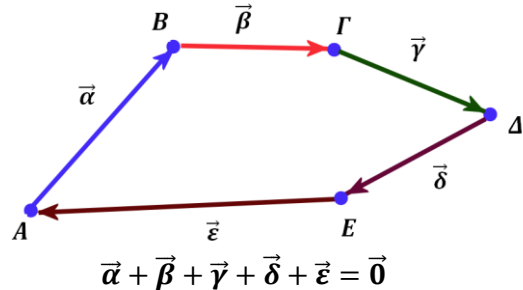
Αν $\vec{a}$ είναι ένα διάνυσμα, τότε είναι φανερό ότι $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ αφού η αρχή και το πέρας των δυο διανυσμάτων συμπίπτουν. Επίσης, σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, αν $\vec{a}$ και $\vec{b}$ δυο οποιαδήποτε διανύσματα του επιπέδου, τότε υπάρχει **μοναδικό** διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο ώστε $\vec{b} + \vec{x} = \vec{a}$.

Πράγματι,

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow \underbrace{(-\vec{\beta}) + \vec{\beta}}_{\vec{0}} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}.$$

Παρατηρήσεις

1. Η (διανυσματική) πρόσθεση πεπερασμένου το πλήθος διαδοχικών ανά δύο διανυσμάτων στα οποία η αρχή του πρώτου διανύσματος της αυτής διαδοχής συμπίπτει με το τέλος του τελευταίου διανύσματος ισούται με το μηδενικό διάνυσμα.



2. Στην περίπτωση των διαδοχικών διανυσμάτων, μπορούμε εύκολα να βρούμε την αρχή και το τέλος ενός διανύσματος που προκύπτει από προσθαφαίρεση των διανυσμάτων αυτών (χωρίς να χρειαστεί να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο). Για παράδειγμα, έχουμε:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{B\Gamma}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma},$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

Αν λ ένας μη μηδενικός πραγματικός αριθμός και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα, ονομάζουμε **γινόμενο του λ επί το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το διάνυσμα το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:

► Είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$ αν $\lambda < 0$

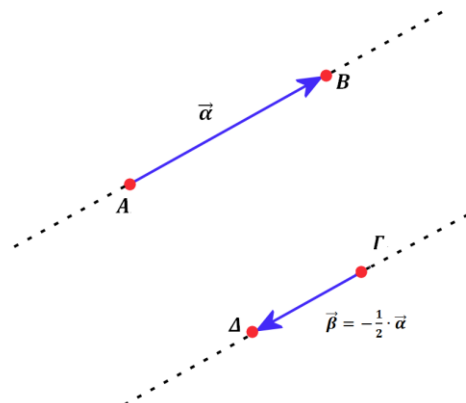
► Έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

Έπεται ότι:

■ Για κάθε τιμή του μη μηδενικού πραγματικού αριθμού λ , το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ είναι παράλληλο (συγγραμμικό) με το ίδιο το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

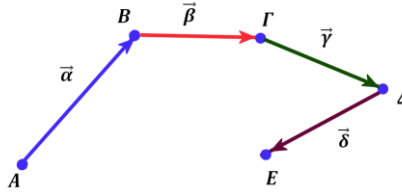
■ Αν $\lambda = 0$, τότε ορίζουμε ως διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα.

■ Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι παράλληλο (συγγραμμικό) με το (μη μηδενικό) διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αν υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\beta} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$.



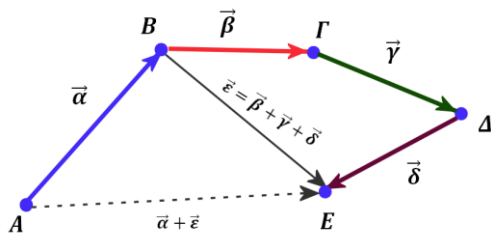
Παραδείγματα και εφαρμογές

1. Σύμφωνα με τα δεδομένα του πιο κάτω σχήματος, να εκφράσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους το άθροισμα $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta}$.



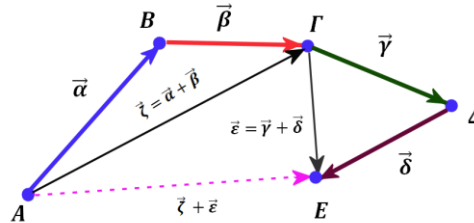
1ος τρόπος

Προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ και ακολούθως προσθέτουμε το διάνυσμα $\vec{a}$ που προκύπτει στο $\vec{a}$. Έτσι, $\vec{AE} = \vec{a} + \vec{\epsilon}$



2ος τρόπος

Προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$: $\vec{a} + \vec{\beta} = \vec{\zeta}$. Προσθέτουμε τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$: $\vec{\gamma} + \vec{\delta} = \vec{\epsilon}$. Τέλος, προσθέτουμε τα (διαδοχικά) αυτά διανύσματα που βρήκαμε: $\vec{AE} = \vec{\zeta} + \vec{\epsilon}$



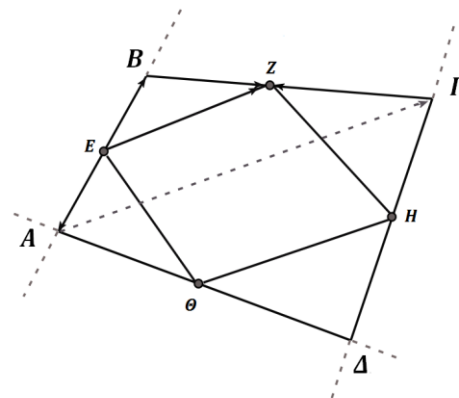
2. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z, H, Θ τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\vec{EZ} = \vec{EB} + \vec{BZ}$ και $\vec{EZ} = \vec{EA} + \vec{AG} + \vec{GZ}$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο πάνω ισότητες:

$$\begin{aligned} \vec{EZ} + \vec{EZ} &= \vec{EB} + \vec{BZ} + \vec{EA} + \vec{AG} + \vec{GZ} \\ \text{βαθμωτό πολλαπλάσιο} &= 2\vec{EZ} \\ &= \vec{EB} + \vec{BZ} + \vec{EA} + \vec{AG} + \vec{GZ} \end{aligned}$$

Αλλά, αφού το E είναι το μέσον της πλευράς AB , έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{EB}$ και $\vec{EA}$ είναι αντίρροπα, συνεπώς,



$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}.$$

Επίσης, αφού το Z είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$, έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{BZ}$ και $\overrightarrow{\Gamma Z}$ είναι αντίρροπα, συνεπώς, $\overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Gamma Z} = \vec{0}$. Έτσι, η πιο πάνω σχέση μας δίνει

$$2\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{A\Gamma}, \text{ δηλ. } \overrightarrow{EZ} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

Εντελώς όμοια, δουλεύοντας στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$, έχουμε

$$\overrightarrow{\Theta H} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

Έπεται από τις δυο τελευταίες σχέσεις ότι $\overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Theta H}$ και αρα το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Αν για τα σημεία A, B, Γ, Δ και E του επιπέδου ισχύει ότι $2\overrightarrow{A\Delta} + 3\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\vec{E}} + 2\overrightarrow{B\vec{E}}$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Delta\vec{E}}$ είναι ομόρροπα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Delta\vec{E}}$ είναι ομόρροπα, αρκεί να δείξουμε ότι το ένα διάνυσμα είναι θετικό πολλαπλάσιο του άλλου.

Έχουμε:

$$2\overrightarrow{A\Delta} + 3\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\vec{E}} + 2\overrightarrow{B\vec{E}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\overrightarrow{A\Delta}}_{\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Delta}} + 3\overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} + (-\overrightarrow{A\Gamma}) + (-\overrightarrow{A\vec{E}}) + (-2\overrightarrow{B\vec{E}}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Delta} + (-\overrightarrow{A\Gamma}) + \overrightarrow{A\Delta} + (-\overrightarrow{A\vec{E}}) + \overrightarrow{B\Delta} + 2\overrightarrow{B\Delta} - 2\overrightarrow{B\vec{E}} + \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A\Delta} + (-\overrightarrow{A\Gamma}) &= \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma A} \\ &= \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \overrightarrow{A\Delta} + (-\overrightarrow{A\vec{E}}) &= \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{EA} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{E\Delta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{B\Delta} + 2(\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{B\vec{E}}) + \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{B\vec{E}} &= \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{EB} \\ &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{E\Delta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{B\Delta} + 2\overrightarrow{E\Delta} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{B\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{E\Delta} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + 2\overrightarrow{E\Delta} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Gamma\Delta} + 3\overrightarrow{E\Delta} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -3\overrightarrow{E\Delta} + \vec{0} = -3\overrightarrow{E\Delta}$$

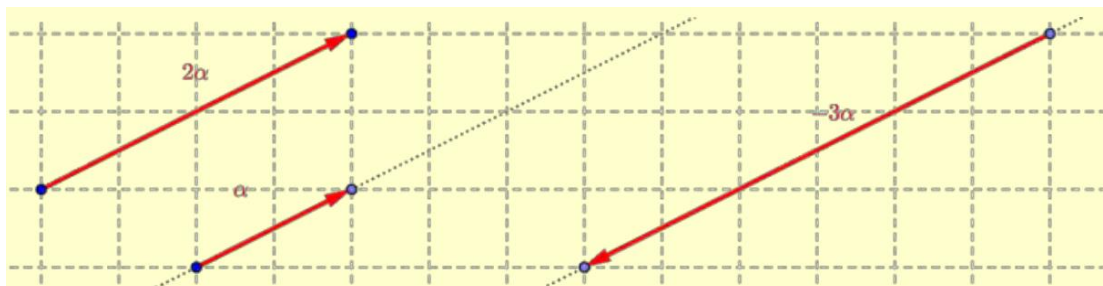
$$-\overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{\Delta\vec{E}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Delta\vec{E}}$$

Πιο κάτω, ακολουθούν προτεινόμενες λύσεις των «δραστηριοτήτων Ενότητας» του σχολικού βιβλίου

Άσκηση 1

Να γράψετε ομοιότητες και διαφορές για τα διανύσματα $\vec{a}$, $2\vec{a}$ και $-3\vec{a}$:



Απάντηση

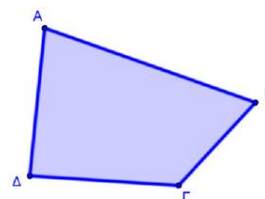
- Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $2\vec{a}$ είναι ομόρροπα και το $2\vec{a}$ έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{a}$.
- Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπα και το $-3\vec{a}$ έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{a}$.
- Τα διανύσματα $2\vec{a}$ και $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπα και το $-3\vec{a}$ έχει μέτρο ίσο με $\frac{3}{2}$ του μέτρου του $\vec{a}$.

Άσκηση 2

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$



Απάντηση

Έχουμε (με βάση το σχήμα)

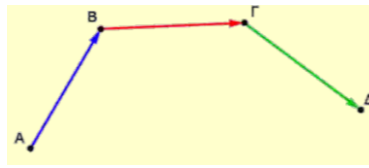
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} \quad \text{και} \quad \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

και αρα

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}.$$

Άσκηση 3

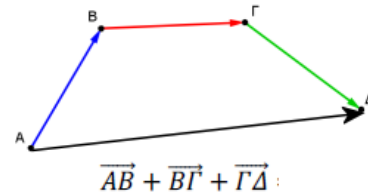
Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$, χρησιμοποιώντας τη διαδικασία υπολογισμού του αθροίσματος δύο διαδοχικών διανυσμάτων.



Απάντηση

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD}$ έχει αρχή το σημείο A και πέρας το σημείο Δ , άρα

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{AD}.$$



Άσκηση 4

Στο πιο κάτω **σχήμα** δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$. Να σχεδιάσετε τα πιο κάτω διανύσματα σε τετραγωνισμένο χαρτί, επεξηγώντας τη μέθοδο που ακολουθήσατε.

(α) $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(β) $\vec{\beta} + \vec{\gamma}$

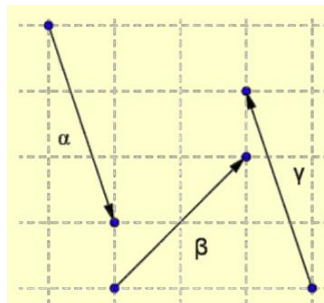
(γ) $\vec{\alpha} + \vec{\alpha} + \vec{\alpha}$

(δ) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

(ε) $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

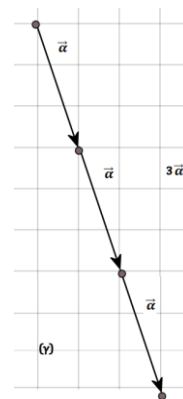
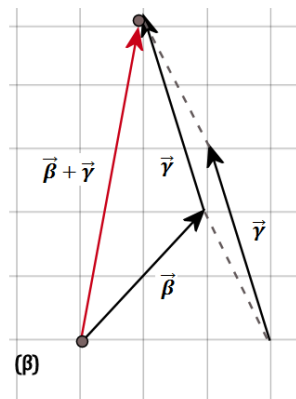
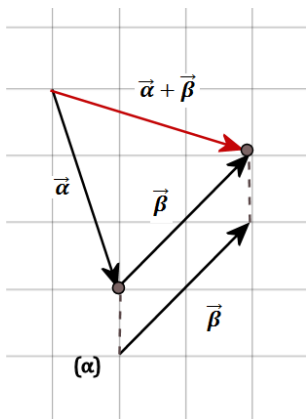
(στ) $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$

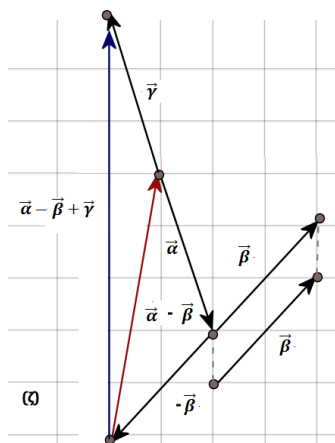
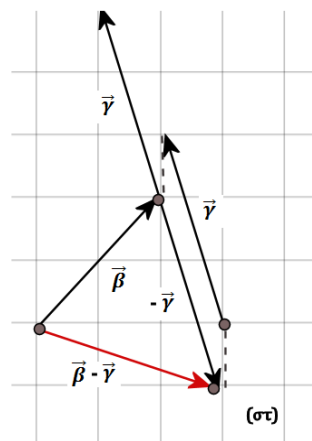
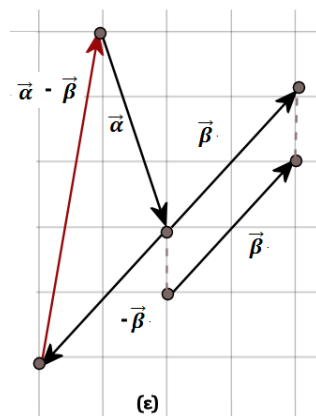
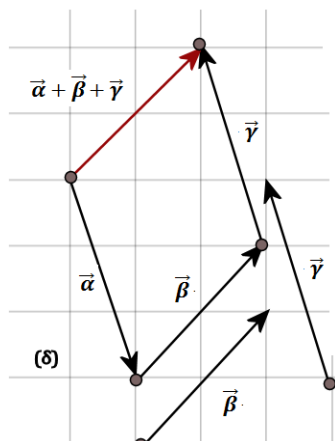
(ζ) $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$



Απάντηση

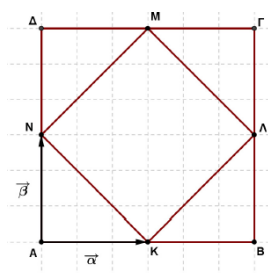
Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου:





Άσκηση 5

Στο διπλανό **σχήμα** δίνονται δύο τετράγωνα, τα $ABΓΔ$ και $ΚΛΜΝ$, όπου $K, Λ, M, N$ είναι τα μέσα των $AB, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ$, αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AK} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AN} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{ML}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$



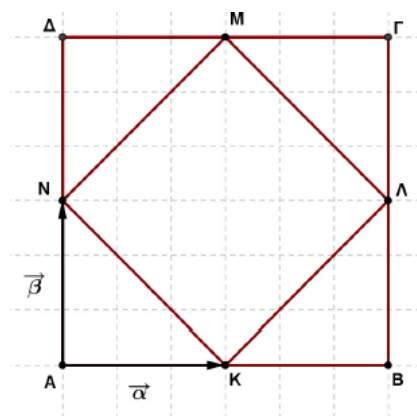
Απάντηση

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \underbrace{\overrightarrow{ND}}_{=\overrightarrow{AK}} = 2 \cdot \overrightarrow{AN} = 2 \cdot \vec{\beta}$$

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\overrightarrow{GD}}_{=\overrightarrow{BA}} = \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{AK} = -\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{NM} = \underbrace{\overrightarrow{ND}}_{=\overrightarrow{AK}} + \underbrace{\overrightarrow{DM}}_{=\overrightarrow{AK}} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{ML} = \underbrace{\overrightarrow{MG}}_{=\overrightarrow{AK}} + \underbrace{\overrightarrow{GL}}_{=-\overrightarrow{NA}} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$$



Άσκηση 6

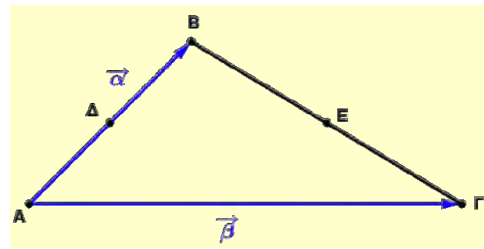
Στο διπλανό **σχήμα** δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και ΓB , αντίστοιχα.

Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$,

(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{\Delta E}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $A\Delta E\Gamma$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Απάντηση

(α) Έχουμε:

$$\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AB} = -\vec{\beta} + \vec{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{\Gamma B}) = \vec{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \vec{\beta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})\end{aligned}$$

και

$$\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\beta} - \vec{\alpha}) = \frac{1}{2} \cdot \vec{\beta}$$

(β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta E$ είναι **τραπέζιο** αφού

$$\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$$

και αρα τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι παράλληλα.