

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ: Ηλεκτρικές Εγκαταστάσεις & Αυτοματισμοί (ELEC 0101)

ΔΙΔΑΣΚΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Γιάννης Ιωακείμ

ΜΑΘΗΜΑ - Μαθηματικά

2^η Εργασία (Ενότητες: 6 – Εξισώσεις Β' βαθμού/Ενότητα 7-8: Παραλληλία, Θεώρημα Θαλή)

Παράδοση: Παρασκευή 22 Νοε. 2024

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.



ΛΥΣΕΙΣ

Ερώτηση 1

A. Να επιλύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

(β) $x^2 - 8x + 16 = 0$

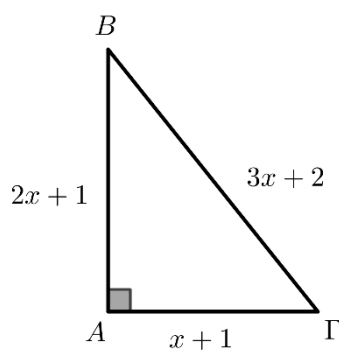
(γ) $x^2 - 3x = 0$

(δ) $(4x - 5)(x + 2) = 0$

(ε) $x^2 - 2x + 3 = 0$

(Μονάδες: 5)

B. Να υπολογίσετε την τιμή του x :



(Μονάδες: 5)

Απάντηση

A. (α) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

και άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(β) $x^2 - 8x + 16 = 0$

1^{ος} τρόπος

$$\alpha = 1, \beta = -8, \gamma = 16 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$$

και άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και ίσες λύσεις, τις:

$$x_1 = x_2 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4.$$

2^{ος} τρόπος

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ (διπλή ρίζα).}$$

(γ) $x^2 - 3x = 0$

1^{ος} τρόπος

$$\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 0 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9 > 0$$

και άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{3-3}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

2^{ος} τρόπος

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \quad x = 3.$$

(δ) $(4x - 5)(x + 2) = 0$

1^{ος} τρόπος

$$(4x - 5)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\alpha = 4, \beta = 3, \gamma = -10 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10) = 9 + 160$$

$$= 169 > 0$$

και άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm 13}{8}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3+13}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad x_2 = \frac{-3-13}{8} = \frac{-16}{8} = -2.$$

2^{ος} τρόπος

$$(4x - 5)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5 = 0, \quad x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = 5, \quad x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{4}, \quad x = -2.$$

(ε) $x^2 - 2x + 3 = 0$

$$\alpha = 1, \beta = -2, \gamma = 3 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$$

και άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις.

B. Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο:

$$(AB)^2 + (AG)^2 = (BG)^2$$

$$\Rightarrow (2x + 1)^2 + (x + 1)^2 = (3x + 2)^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1 + x^2 + 2x \cdot 1 + 1 = 9x^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2 + 4$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 9x^2 + 12x + 4$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 5x^2 + 6x + 2$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 5x^2 + 12x - 6x + 4 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 6x + 2 = 0$$

(διαιρώ με το 2)

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

Θα λύσουμε την πιο πάνω εξίσωση:

$$\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 1 \Rightarrow \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

και άρα η εξίσωση έχει 2 πραγματικές και άνισες λύσεις, τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - 1}{4} = \frac{-4}{4} = -1.$$

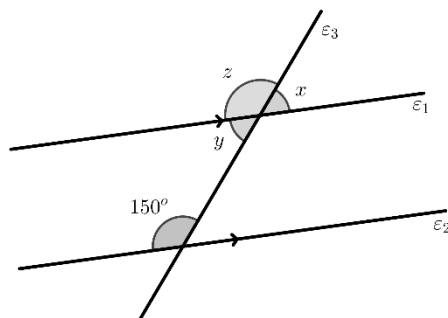


Ερώτηση 2

Να υπολογίσετε το μέτρο των x , y , z και w στα πιο κάτω σχήματα, με χρήση εξισώσεων, δικαιολογώντας τα επιχειρήματά σας:

(Μονάδες: 3/3/3/6)

(α)



Απάντηση

$150^\circ + y = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες)

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

$x = y = 30^\circ$ (κατά κορυφήν γωνίες)

$z + x = 180^\circ$ (ευθεία)

$$\Rightarrow z = 180^\circ - x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

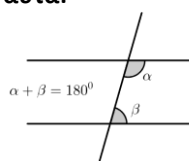
Εναλλακτικά: $z = 150^\circ$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες)



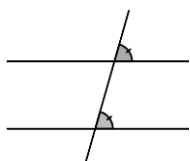
Εντός εναλλάξ:



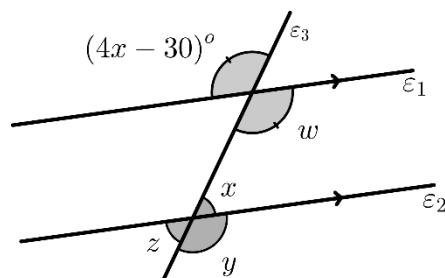
Εντός & επί τα αυτά:



Εντός, εκτός & επί τα αυτά:



(β)



Απάντηση

$w = 4x - 30^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$w + x = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες)

$$\Rightarrow 4x - 30^\circ + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 180^\circ + 30^\circ \Rightarrow 5x = 210^\circ$$

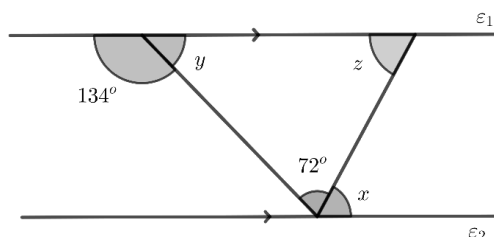
$$\Rightarrow x = \frac{210^\circ}{5} = 42^\circ.$$

Άρα, $w = 4x - 30^\circ = 4 \cdot 42^\circ - 30^\circ = 138^\circ$.

$y = w = 138^\circ$ (εντός, εκτός και επί τα αυτά γωνίες).

$z = x = 42^\circ$ (κατά κορυφήν γωνίες).

(γ)



Απάντηση

$134^\circ + y = 180^\circ$ (ευθεία)

$$\Rightarrow y = 180^\circ - 134^\circ = 46^\circ$$

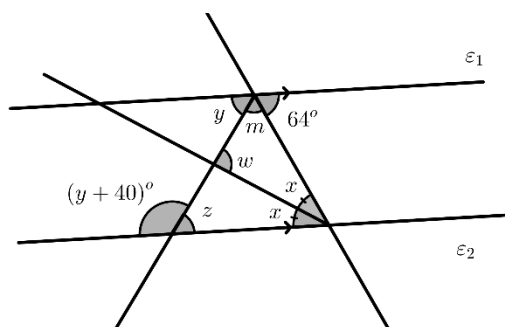
$y + z + 72^\circ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\Rightarrow 46^\circ + z + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow z = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$$

$x = z = 62^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

Εναλλακτικά: $x + 72^\circ = 134^\circ \Rightarrow x = 134^\circ - 72^\circ = 62^\circ$

(δ)



Απάντηση

$y + 40^\circ + y = 180^\circ$ (εντός και επί τα αυτά γωνίες)

$$\Rightarrow 2y = 180^\circ - 40^\circ$$

$$\Rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

$z = y = 70^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$$2x = 64^\circ \text{ (εντός εναλλάξ γωνίες)} \Rightarrow x = \frac{64^\circ}{2} = 32^\circ.$$

$$y + m + 64^\circ = 180^\circ \text{ (ευθεία)} \Rightarrow 70^\circ + m + 64^\circ = 180^\circ \Rightarrow m = 46^\circ$$

Άρα,

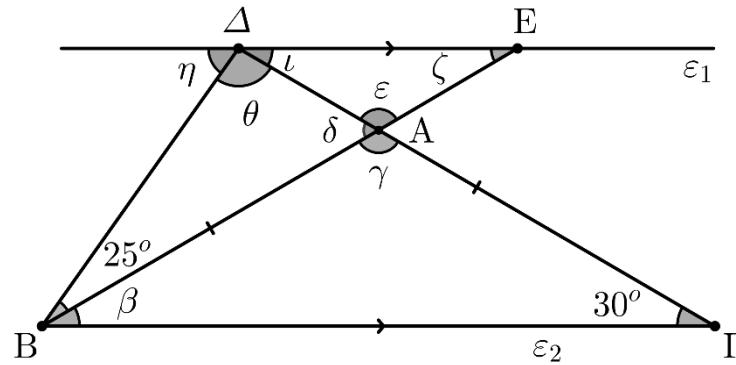
$m + w + x = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)

$$\Rightarrow 46^\circ + w + 32^\circ = 180^\circ \Rightarrow w = 102^\circ. \quad \blacksquare$$



Ερώτηση 3

Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($(AB) = (A\Gamma)$), και το μέτρο της γωνίας $\Delta\hat{B}A$ είναι 25° . Η προέκταση της BA τέμνει την ευθεία ε_1 στο σημείο E . Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ και ι .



(Μονάδες: 10)

Απάντηση

$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AGB}$ (παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου) $\Rightarrow \beta = 30^\circ$

$\widehat{A} + \beta + \gamma = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)
 $\Rightarrow 30^\circ + 30^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$\varepsilon = \gamma = 120^\circ$ (κατά κορυφήν γωνίες)

$\zeta = \beta = 30^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$\iota + \varepsilon + \zeta = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)
 $\Rightarrow \iota + 120^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \iota = 30^\circ$

Εναλλακτικά: $\iota = 30^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες)

$\gamma + \delta = 180^\circ$ (ευθεία) $\Rightarrow \delta = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\delta + \theta + 25^\circ = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών τριγώνου)
 $\Rightarrow 60^\circ + \theta + 25^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 95^\circ$

$\eta + \theta + \iota = 180^\circ$ (ευθεία) $\Rightarrow \eta + 95^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \eta = 55^\circ$.

Εναλλακτικά: $\eta = \widehat{AB\Gamma} = \beta + 25^\circ = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ$ (εντός εναλλάξ γωνίες).

■

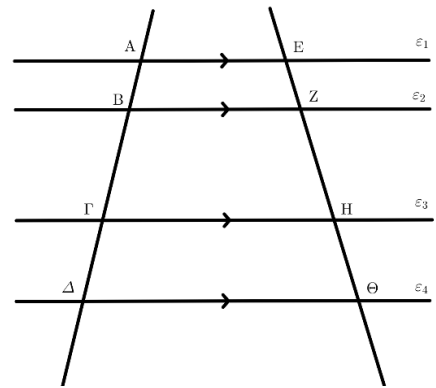


Ερώτηση 4

Στο διπλανό σχήμα, $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$ και
 $(AB) = 4 \text{ cm}$, $(B\Delta) = 18 \text{ cm}$, $(H\Theta) =$
 15 cm , $(EZ) = 6 \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων
 $Z\Theta$, $\Gamma\Delta$ και ZH .

(Μονάδες: 10)



Απάντηση

Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{AB}{B\Delta} = \frac{EZ}{Z\Theta} \Leftrightarrow \frac{4}{18} = \frac{6}{Z\Theta} \Leftrightarrow (Z\Theta) = \frac{6}{4} \cdot 18 = 27 \text{ cm}$$

και

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \Leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{\Gamma\Delta}{15} \Leftrightarrow (\Gamma\Delta) = \frac{4}{6} \cdot 15 = 10 \text{ cm}.$$

Επίσης,

$$(ZH) = (Z\Theta) - (H\Theta) = 27 - 15 = 12 \text{ cm}.$$

■



Ερώτηση 5

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του x :

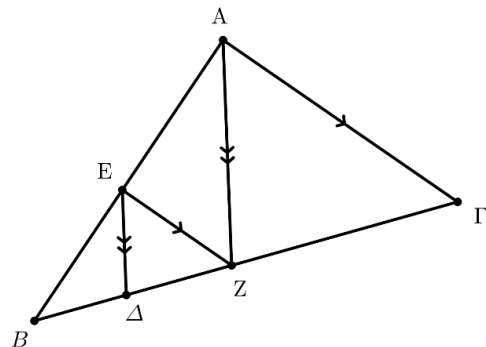
$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \quad (x \neq -2, 2)$$

(Μονάδες: 4)

(β) Στο διπλανό σχήμα, $EZ \parallel A\Gamma$ και $E\Delta \parallel$
 AZ . Να αποδείξετε ότι:

$$(BZ)^2 = (B\Gamma)(B\Delta).$$

(Μονάδες: 6)



Απάντηση

(α) Έχουμε για $x \neq -2, 2$:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2} \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = (x-2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = x^2 - 3x - 2x + 6$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = -5x + 6 \Leftrightarrow x + 5x = 6 + 2 \Leftrightarrow 6x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

(β)

$$ED \parallel AZ \Rightarrow (\text{Θεώρημα Θαλή}) \quad \frac{BD}{BZ} = \frac{BE}{BA}$$

$$EZ \parallel AG \Rightarrow (\text{Θεώρημα Θαλή}) \quad \frac{BZ}{BF} = \frac{BE}{BA}$$

Συνεπώς,

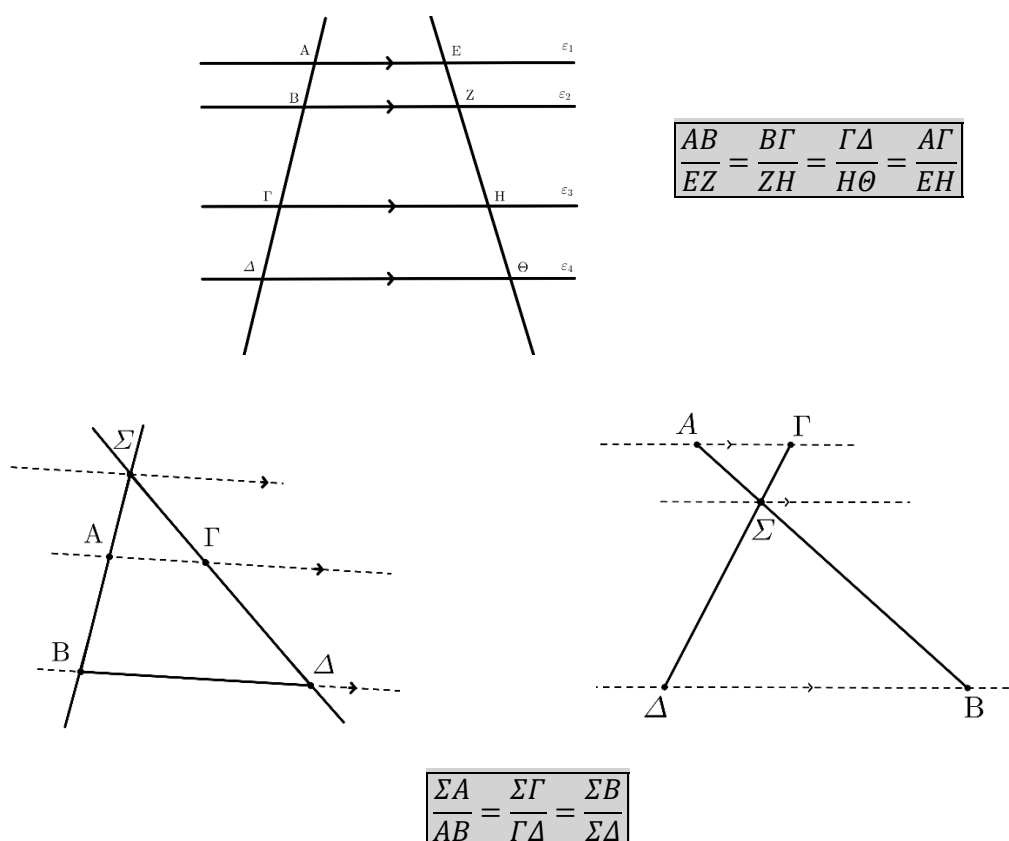
$$\frac{BD}{BZ} = \frac{BZ}{BF} \Rightarrow (BD)(BF) = (BZ)(BZ) \Rightarrow (BZ)^2 = (BF)(BD)$$

■

Υπόμνημα: Το Θεώρημα του Θαλή¹

Θεώρημα

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα αποκτόμενα τμήματα πάνω στη μια ευθεία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που αποκόπτονται από την άλλη ευθεία (δες εικόνα 1).



Εικόνα 1: Το Θεώρημα του Θαλή

¹ Το θεώρημα παραδοσιακά αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό Θαλή. Η πρώτη γνωστή απόδειξη βρίσκεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (Πρόταση 17 Βιβλίο 11). Το θεώρημα είναι ισοδύναμο με αυτό περί των αναλογιών σε όμοια τρίγωνα. (πηγή: <https://el.wikipedia.org/>)

Αντίστροφο του Θεωρήματος του Θαλή:

Αν δύο ευθείες (λ) και (μ) τέμνονται από δύο παράλληλες ευθείες (ε_1) και (ε_2) στα σημεία A, B και Δ, E αντίστοιχα και Γ, Z είναι σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΔE

αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{A\Gamma}{\Delta Z} = \frac{B\Gamma}{ZE}$, τότε η ευθεία (ε_3) στην οποία ανήκουν τα σημεία Γ και Z είναι παράλληλη προς τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και οι ευθείες δ και ζ τέμνουν τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία A, B, Γ, Δ, E και Z .

Αν $AB = 5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 15 \text{ cm}$ και $EZ = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΔE .

Απάντηση

Αφού $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$, από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{AB}{\Delta E} &= \frac{B\Gamma}{EZ} \Leftrightarrow \frac{5}{\Delta E} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow 15(\Delta E) = 5 \cdot 12 \\ \Leftrightarrow 15 \cdot (\Delta E) &= 60 \Leftrightarrow \frac{15 \cdot (\Delta E)}{15} = \frac{60}{15} \\ \Leftrightarrow \boxed{(\Delta E) = 4 \text{ cm}}\end{aligned}$$

