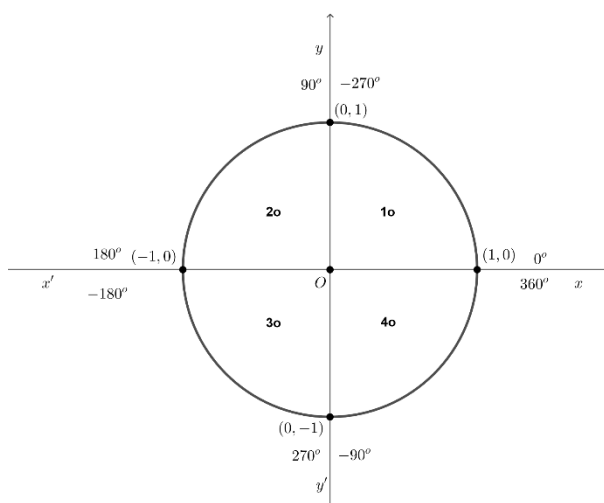


ΕΝΟΤΗΤΑ 02: Τριγωνομετρία¹

2.3 Τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός ονομάζεται ο κύκλος ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων (το σημείο $O(0,0)$) και ακτίνα ίση με μια μονάδα ($\rho = 1$).

Οι άξονες των συντεταγμένων (xx' και yy') χωρίζουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε τέσσερα τμήματα, τα τεταρτημόρια, όπως στο πιο κάτω σχήμα.



Ο άξονας των τετμημένων (ο άξονας xx') ονομάζεται **άξονας των συνημιτόνων** και ο άξονας των τεταγμένων (ο άξονας yy') **άξονας των ημιτόνων**.

Ακολουθώς, θα προσδιορίσουμε το πρόσημο των τεσσάρων τριγωνομετρικών αριθμών (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη) όταν η γωνία (σε κανονική θέση) έχει τελική πλευρά σε κάθε ένα από τα τέσσερα τεταρτημόρια του τριγωνομετρικού κύκλου.

¹ Σχολικό βιβλίο: **Μαθηματικά Α' Λυκείου, Κοινού Κορμού, Β' Έκδοση ΥΑΠ 2020, Τεύχος Α', σελ. 43-80**

1. Η γωνία θ έχει τελική πλευρά στο 1ο τεταρτημόριο

$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

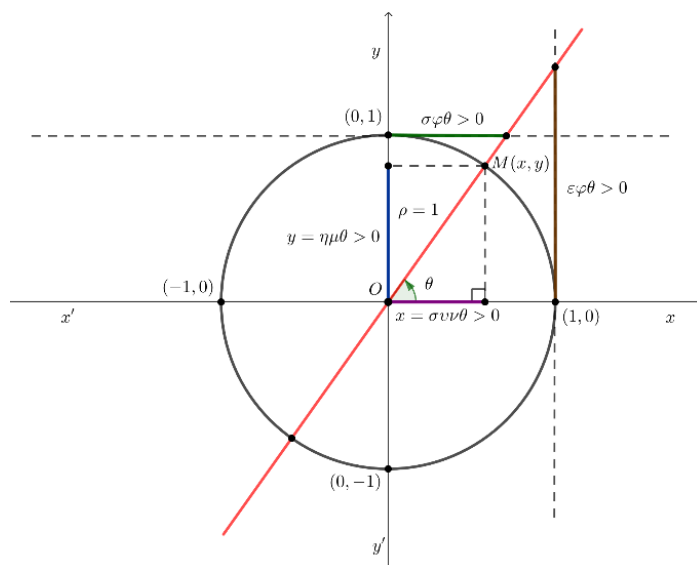
Έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y > 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x > 0$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} > 0$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} > 0$$



2. Η γωνία θ έχει τελική πλευρά στο 2ο τεταρτημόριο

$(90^\circ < \theta < 180^\circ)$

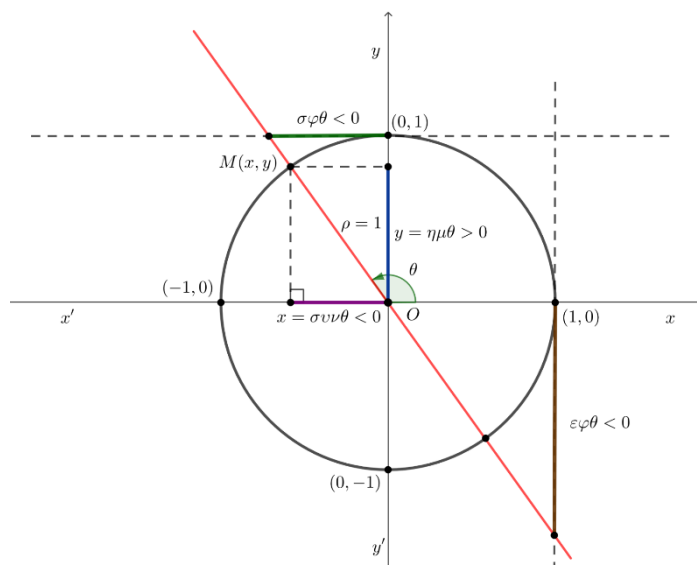
Έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y > 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x < 0$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} < 0$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} < 0$$



3. Η γωνία θ έχει τελική πλευρά στο 3ο τεταρτημόριο

$$(180^\circ < \theta < 270^\circ)$$

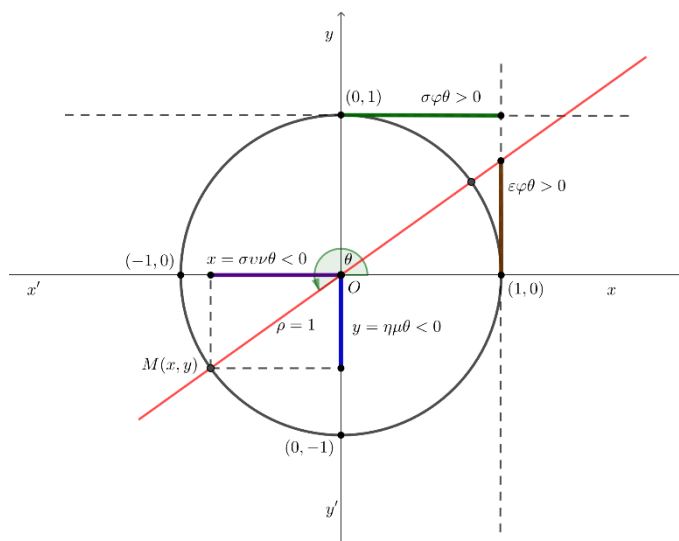
Έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y < 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x < 0$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} > 0$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} > 0$$



4. Η γωνία θ έχει τελική πλευρά στο 4ο τεταρτημόριο

$$(270^\circ < \theta < 360^\circ)$$

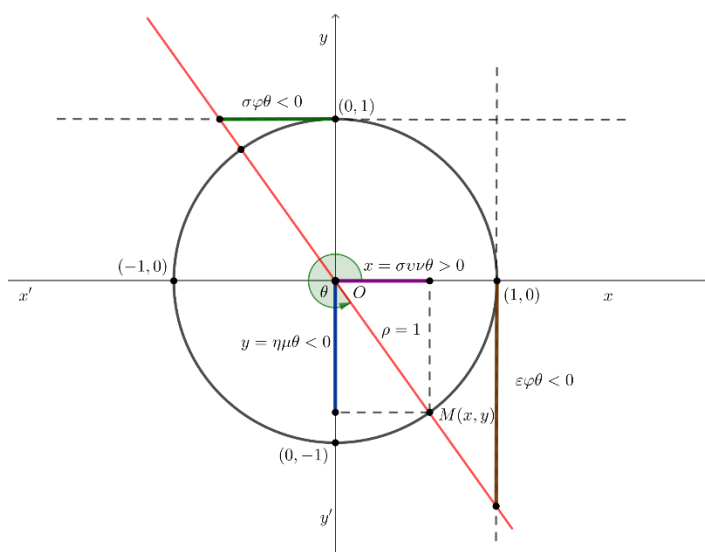
Έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y < 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x > 0$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{y}{x} < 0$$

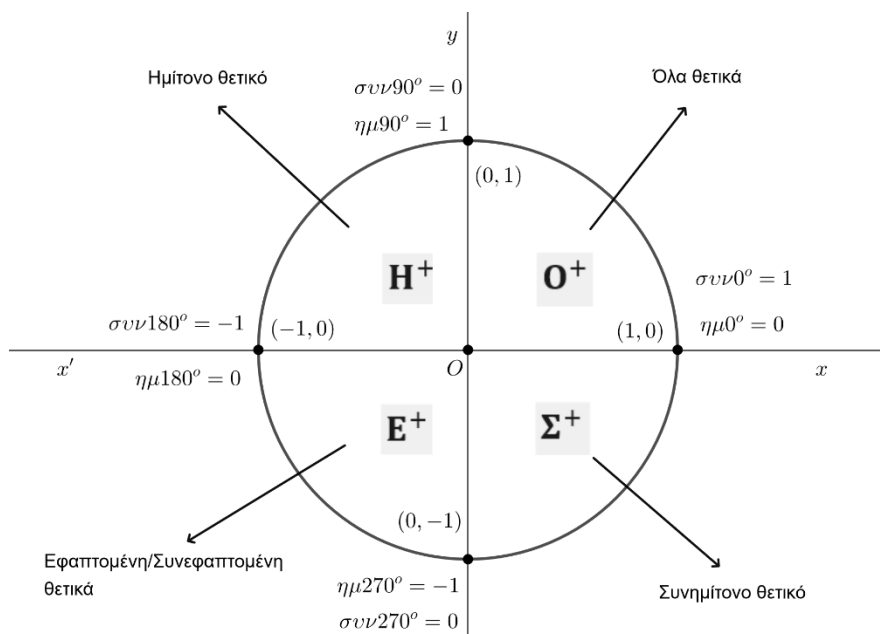
$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{y} < 0$$



➤ Συνοψίζοντας τα πιο πάνω, έχουμε τον πιο κάτω πίνακα:

	1ο τεταρτημόριο	2ο τεταρτημόριο	3ο τεταρτημόριο	4ο τεταρτημόριο
$\eta\mu\theta$	+	+	−	−
$\sigma\upsilon\nu\theta$	+	−	−	+
$\varepsilon\varphi\theta/\sigma\varphi\theta$	+	−	+	−

Μνημονοτεχνικός κανόνας (ΟΗΕΣ)



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο και συνημίτονο παίρνουν τιμές μόνο στο διάστημα $[-1, 1]$, δηλαδή:

$$-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1, \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\theta \leq 1$$

	0°	90°	180°	270°	360°
$\eta\mu\theta$	0	1	0	-1	0
$\sigma\upsilon\nu\theta$	1	0	-1	0	1

Ασκήσεις

1. Να προσδιορίσετε το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών με μέτρο:

$$34^\circ, \quad 115^\circ, \quad 224^\circ, \quad 390^\circ, \quad -24^\circ, \quad -160^\circ.$$

2. Να προσδιορίσετε το πρόσημο των πιο κάτω παραστάσεων:

(α) $\eta\mu 25^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 106^\circ$

(β) $\epsilon\varphi 120^\circ \cdot \eta\mu 46^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-19^\circ)$

(γ) $\sigma\upsilon\nu(-104^\circ) \cdot \epsilon\varphi(210^\circ)$

(δ) $\frac{\epsilon\varphi 220^\circ \cdot \sigma\varphi 18^\circ \cdot \eta\mu(47^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(203^\circ)}$

3. Αφού αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ βρίσκεται πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ , η οποία είναι σε κανονική θέση και η τελική της πλευρά περνά από το σημείο A .

4. Η τελική πλευρά μιας γωνίας, η οποία είναι σε κανονική θέση, τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής.

5. Να προσδιορίσετε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας θ , αν:

(α) $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$.

(β) $\eta\mu\theta < 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta > 0$.

(γ) $\epsilon\varphi\theta > 0$ και $\eta\mu\theta < 0$.

(δ) $\sigma\varphi\theta < 0$ και $\eta\mu\theta < 0$.