

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 16x$. Να βρείτε:
(α) Τις συντεταγμένες της εστία της και την εξίσωση της διευθετούσας της.
(β) Την απόσταση ΑΕ, του σημείου της $A(4t^2, 8t)$ από την εστία της.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$. Να βρείτε:
(α) τις συντεταγμένες των εστιών της
(β) την εξίσωση της διευθετούσας της
(γ) την εξίσωση της κάθετης της παραβολής στο σημείο της $(3, -6)$.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Να βρείτε:
(α) την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $2x+4y-5=0$
(β) τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon : x - y = 0$.
- (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E(1, -1)$ και διευθετούσα $\delta : y = -2x$.
- Η κάθετη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της $A(at^2, 2at)$ τέμνει την παραβολή και στο σημείο $B(ap^2, 2ap)$. Να δείξετε ότι $t^2 + tp + 2 = 0$.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Η εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο $T(2t^2, 4t)$ τέμνει τον άξονα των y στο Α. Αν η ΕΑ τέμνει τη διευθετούσα της στο σημείο Γ, να δείξετε ότι η εξίσωση του Γ. Τ. του μέσου Μ της ΤΓ είναι η $y^2 = 16(x+1)$ όπου Ε η εστία της παραβολής.
- Η εφαπτόμενη και η κάθετη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της $A(at^2, 2at)$ τέμνουν τον άξονα των x στα σημεία Β και Γ αντίστοιχα.
(α) Να δείξετε ότι η εστία Ε είναι το μέσο της ΒΓ.
(β) Από το Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΑΒ και από το Β ευθεία παράλληλη της ΑΓ που τέμνονται στο Μ. Να βρείτε την εξίσωση του Γ.Τ. του σημείου Μ.
- Αν η χορδή ΚΛ όπου $K(at^2, 2at)$ και $L(ap^2, 2ap)$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4ax$ να δείξετε ότι :
(α) $t.p = -1$
(β) αν η ΟΚ τέμνει τη διευθετούσα στο Μ, τότε η ΜΛ είναι παράλληλη με τον άξονα των x , όπου Ο η αρχή των αξόνων.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία της $T(2t^2, 4t)$ και $P(2p^2, 4p)$.
(α) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΤΡ.
(β) Αν η χορδή ΤΡ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2x$, να δείξετε ότι $(t+p)^2 = 16tp$.
(γ) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ. του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΤΡ.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ και τα σημεία της $A(at^2, 2at)$ και $B(ap^2, 2ap)$. Να βρείτε το Γ.Τ. του σημείου τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία Α και Β, αν γνωρίζουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται πάνω στη ευθεία $x - 2y = 0$.

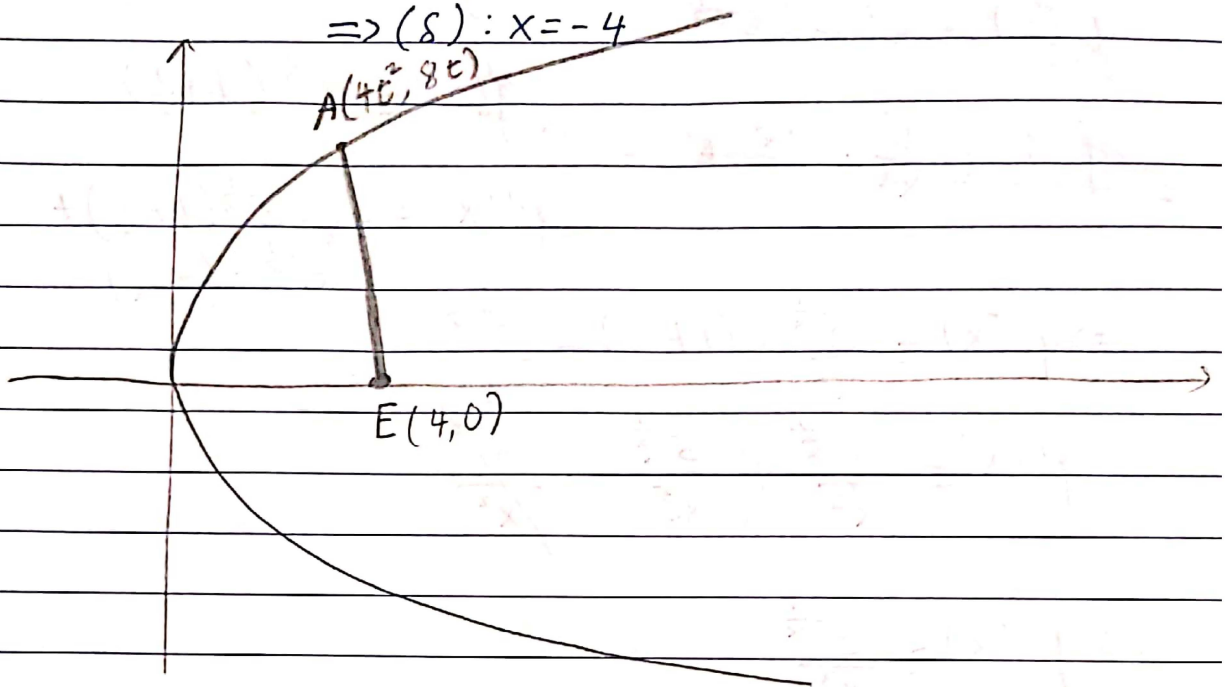
Парабола

зав. 1

$$a) \begin{cases} y^2 = 16x \\ y^2 = 4ax \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

$$E(a, 0) \Rightarrow E(4, 0)$$

$$\Rightarrow (S): x = -4$$



$$B) (AE) = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2}$$

или

$$= \sqrt{(4t^2 - 4)^2 + (8t - 0)^2}$$

$$= \sqrt{16t^4 - 32t^2 + 16 + 64t^2}$$

$$= \sqrt{16t^4 + 32t^2 + 16}$$

$$= 4\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}$$

$$= 4\sqrt{(t^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow (AE) = 4(t^2 + 1) \text{ пов.}$$

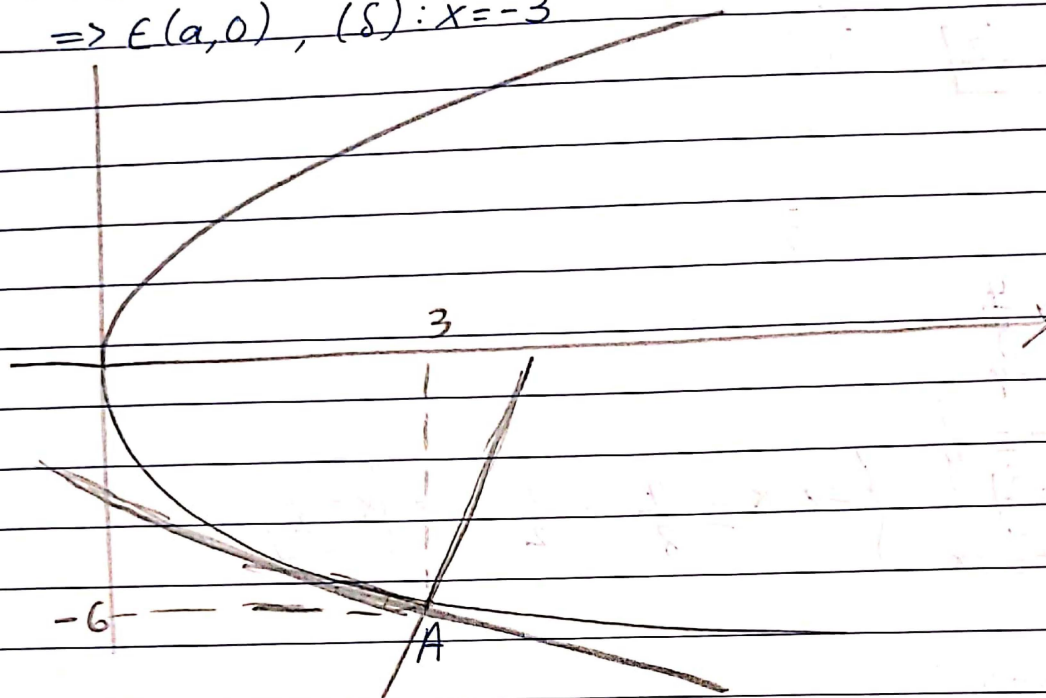
26.2

$$y^2 = 12x$$

$$a) 4a = 12$$

$$\Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \ell(a, 0), (S): x = -3$$



$$y^2 = 12x$$

$$2y y' = 12$$

$$y' = \frac{6}{y}$$

$$\left. \begin{array}{l} y' = \frac{6}{y} \\ A(3, -6) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_{\text{eq}}(A) = \frac{6}{-6} \Rightarrow \lambda_{\text{eq}}(A) = -1$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{rad}}(A) = -\frac{1}{\lambda_{\text{eq}}(A)} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{rad}}(A) = 1}$$

$$y - y_A = \lambda_{\text{rad}}(A)(x - x_A)$$

$$y + 6 = x - 3$$

$$\boxed{(\text{rad}): y = x - 9}$$

26.3

$$y^2 = 8x$$

$$(\varepsilon): 2x + 4y - 5 = 0$$

$$\lambda_{\varepsilon} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_{\varepsilon} \cdot \lambda_{\varepsilon\varphi} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\varepsilon\varphi} = 2}$$

$$y^2 = 8x$$

$$2y \cdot y' = 8$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{y}$$

$$y' = \lambda_{\varepsilon\varphi}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{4}{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$y^2 = 8x$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{2}}$$

$$y - y_0 = \lambda_{\varepsilon\varphi}(x - x_0)$$

$$y - 2 = 2(x - \frac{1}{2})$$

$$y - 2 = 2x - 1$$

$$a) \boxed{(\varepsilon\varphi): y = 2x + 1}$$

$$b) \text{ Set } 2x + 4y - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4(2x + 1) - 5 = 0$$

$$2x + 8x + 4 - 5 = 0$$

$$10x = 1$$

$$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{6}{5}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma(\frac{1}{10}, \frac{6}{5})}$$

αδκ. 4

$$y^2 = x$$

$$(ε): x - y = 0 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \quad (ε) \perp (ε\varphi) \Rightarrow \lambda_{ε\varphi} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{ε\varphi} = 1}$$

$$2y y' = 1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

$$y' = \lambda_{ε\varphi}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2y} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{2}}$$

$$y^2 = x \Rightarrow$$

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{4}}$$

$$y - y_0 = \lambda_{ε\varphi} (x - x_0)$$

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{(ε\varphi): y = x + \frac{1}{4}}$$

αδκ. 5

α) Έστω ένα σταθερό σημείο E

και μία ευθεία

(S)

όε ένα επίπεδο έρει ωςε $E \notin (S)$.

Παραβολή ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που
καπέχουν από το σημείο E και την ευθεία (S) . (συνεχούσα)
(εστία)

αδκ. 6

$$y^2 = 4ax$$

$$A(at^2, 2at)$$

$$A(at^2, 2at)$$

$$t^2 + t\rho + 2 = 0$$

$$B(a\rho^2, 2a\rho)$$

$$y^2 = 4ax$$

$$2y y' = 4a$$

$$y' = \frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{ep}}(A) = \frac{2a}{y} = \frac{2a}{2at} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{ep}}(A) = \frac{1}{t}}$$

$$\lambda_{\text{ep}}(A) \lambda_{\text{rad}}(A) = -1$$

$$\lambda_{\text{rad}}(A) = -\frac{1}{\lambda_{\text{ep}}(A)} = -\frac{1}{\frac{1}{t}} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{rad}}(A) = -t}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2ap - 2at}{ap^2 - at^2} = \frac{2a(\cancel{p-t})}{a(\cancel{p-t})(p+t)}, \quad p \neq t$$

$$\Rightarrow \lambda_{AB} = \frac{2}{p+t}$$

$$\lambda_{AB} = \lambda_{\text{rad}}(A)$$

$$\Leftrightarrow -t = \frac{2}{p+t}$$

$$-t(p+t) = 2$$

$$-t^2 - tp = 2$$

$$\boxed{t^2 + tp + 2 = 0}$$

ax. 7

$$y^2 = 8x$$

$$T(2t^2, 4t)$$

$$T(2t^2, 4t)$$

$$E(2, 0)$$

$$x = -2$$

$$a = 2$$

$$\Rightarrow E(2, 0), (s): x = -2$$

$$y^2 = 8x$$

$$2y y' = 8$$

$$y' = \frac{4}{y}$$

$$T(2t^2, 4t)$$

$$x_A = 0 \Rightarrow y_A = 2t \Rightarrow A(0, 2t)$$

$$2AE = \frac{2t}{-2} = -t \Rightarrow y - y_E = 2AE(x - x_E)$$

$$y = -t(x - 2)$$

$$(AE): y = -tx + 2t$$

$$x_T = -2$$

$$y_T = 2t + 2t$$

$$\Rightarrow y_T = 4t \Rightarrow T(-2, 4t)$$

$$x_M = \frac{-2 + 2t^2}{2} = t^2 - 1$$

$$y_M = \frac{4t + 4t}{2} = 4t$$

$$y_M = 4t$$

$$\Rightarrow t = \frac{y_M}{4} \Rightarrow x_M = \frac{y_M^2}{16} - 1$$

$$y - y_T = \lambda_{ep}(T)(x - x_T)$$

$$y - 4t = \frac{1}{t}(x - 2t^2)$$

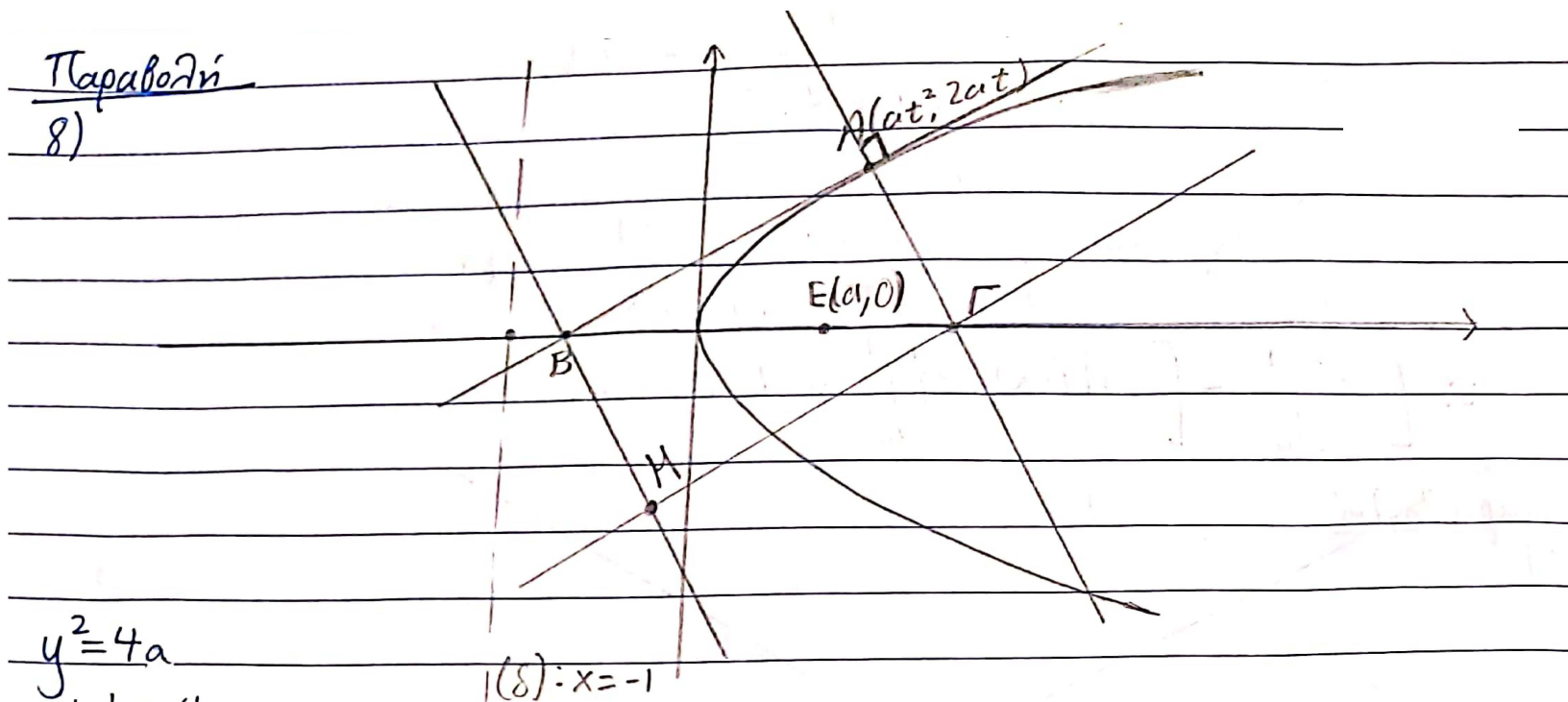
$$ty - 4t^2 = x - 2t^2$$

$$(ep): ty = x + 2t^2$$

$$16x_M = y_M^2 - 16$$

$$y_M^2 = 16(x_M + 1)$$

Παραβολή
8)



$$y^2 = 4a$$

$$2yy' = 4a$$

$$y' = \frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{εφ}}(A) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

$$y - y_A = \lambda_{\text{εφ}}(A)(x - x_A)$$

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

$$yt - 2at^2 = x - at^2$$

$$\boxed{(\text{εφ}): ty = x + at^2}$$

$$y_B = 0$$

$$\Rightarrow x_B = -at^2$$

$$\Rightarrow B(-at^2, 0)$$

$$\lambda_{\text{καθ}}(A) = -t$$

$$y - y_A = \lambda_{\text{καθ}}(A)(x - x_A)$$

$$y - 2at = -t(x - at^2)$$

$$y - 2at = -tx + at^3$$

$$(\text{καθ}): y = -tx + at^3 + 2at$$

$$y_r = 0$$

$$\Rightarrow x_r = a(t^2 + 2)$$

$$\Rightarrow \Gamma(a(t^2 + 2), 0)$$

$$X_H = \frac{X_B + X_r}{2} = \frac{-at^2 + a(t^2 + 2)}{2} = \frac{-at^2 + at^2 + 2a}{2} = a$$

$$y_H = 0 \Rightarrow M(a, 0) \quad a \equiv \epsilon$$

AB // GM

$$\Rightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{GM} \Rightarrow \lambda_{GM} = \frac{1}{t}$$

$$y - y_r = \lambda_{GM} (x - x_r)$$

$$y - 0 = \frac{1}{t} (x - at^2 - 2a)$$

$$(GM): ty = x - a(t^2 + 2)$$

$\lambda_{AG} // \lambda_{BM}$

$$\Rightarrow \lambda_{AG} = \lambda_{BM} = \lambda_{GM}$$

$$\Rightarrow \lambda_{BM} = -t$$

$$y - y_B = \lambda_{BM} (x - x_B)$$

$$y = -t(x + at^2)$$

$$(BM): y = -tx - at^3$$

$$-t^2x - at^4 = x - at^2 - 2a$$

$$x + t^2x = at^2 + 2a - at^4$$

$$x = \frac{a(-t^4 + t^2 + 2)}{1 + t^2}$$

$$x = \frac{-a(t^2 - 2)(t^2 + 1)}{t^2 + 1}$$

$$x_H = -a(t^2 - 2)$$

$$ty = -a(t^2 - 2) - a(t^2 + 2)$$

$$ty = -at^2 + 2a - at^2 - 2a$$

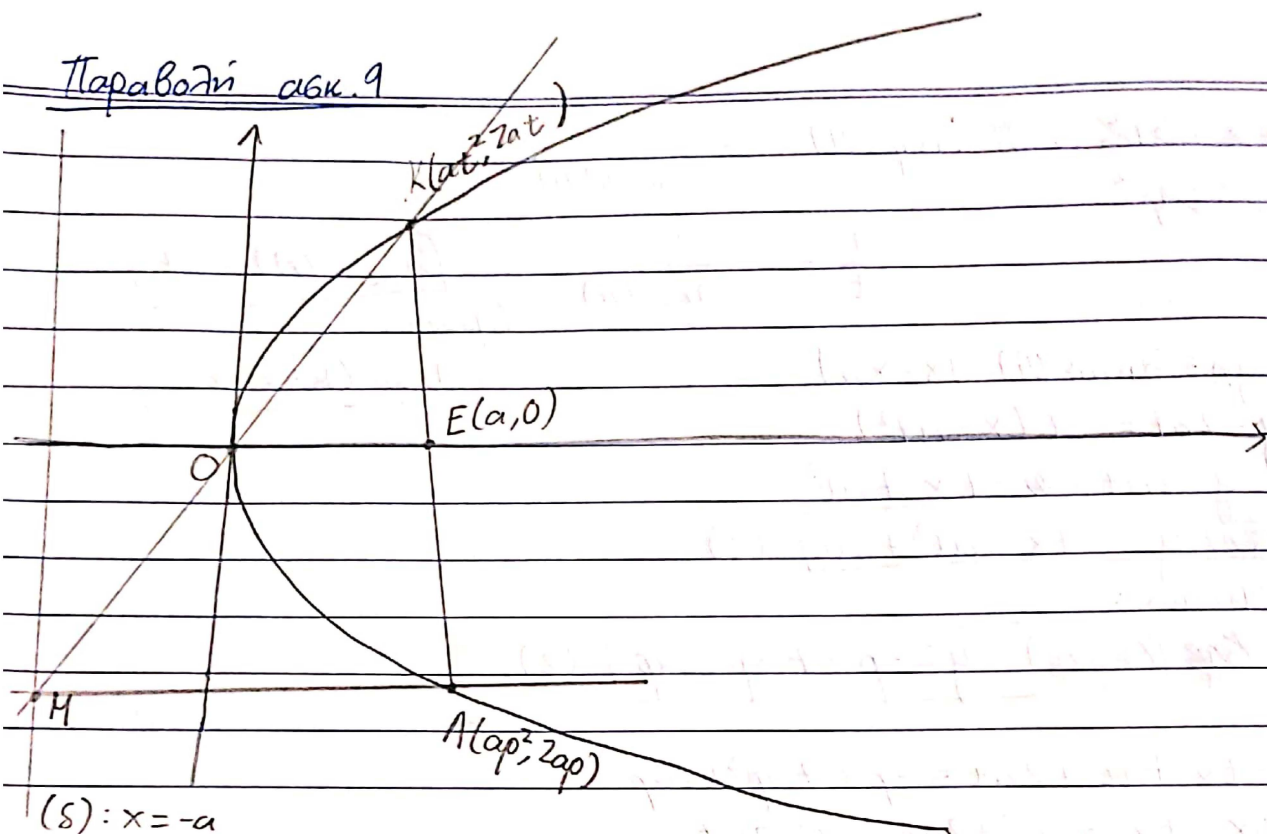
$$y = -2at$$

$$t = -\frac{y}{2a}$$

$$x = -a\left(\frac{y^2}{4a^2} - 2\right)$$

$$x = -\frac{y^2}{4a} + 2a$$

Παραβολή αγκ. 9



a) $\lambda_{KA} = \lambda_{KE}$

$$\frac{2at - 2ap}{at^2 - ap^2} = \frac{2at}{at^2 - a}$$

$$\frac{\cancel{2}t - \cancel{2}p}{(t-p)(t+p)} = \frac{\cancel{2}t}{t^2 - 1}$$

$$\cancel{t} - 1 = \cancel{t} + tp \Rightarrow \boxed{tp = -1}$$

b) $\lambda_{OK} = \frac{2at}{at^2} = \frac{2}{t}$

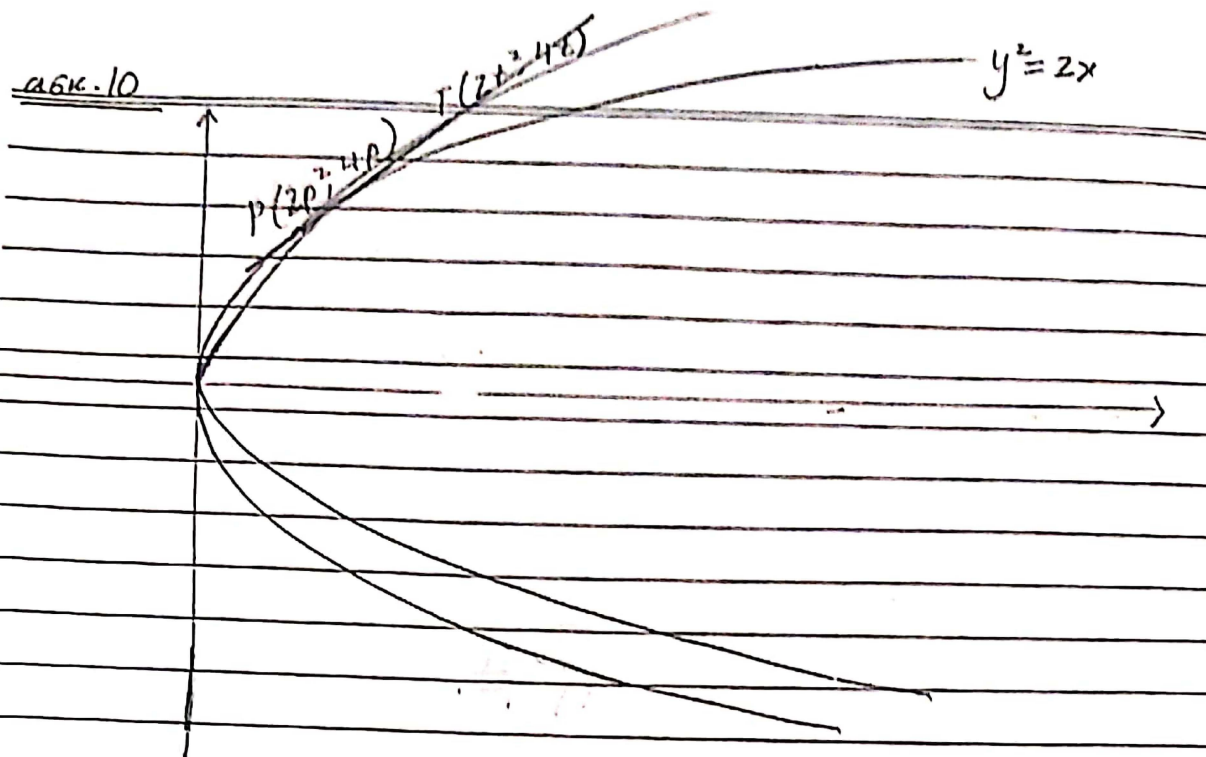
$$\Rightarrow y - y_0 = \frac{2}{t}(x - x_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} (OK): ty = 2x \\ x_M = -a \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{y_M = -\frac{2a}{t}} \Rightarrow \boxed{M(-a, -\frac{2a}{t})}$$

$$\lambda_{MA} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{-\frac{2a}{t} - 2ap}{-a - ap^2} = \frac{-\left(\frac{2a + 2atp}{t}\right)}{-a(1-p^2)} = \frac{2(1+tp)}{t(1-p^2)}$$

$$= \frac{2(1-1)}{t(1-p^2)} = 0 \quad (tp = -1) \Rightarrow \text{Η ευθεία (MA) είναι}$$

παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων αφού $\lambda_{MA} = 0$.



$$1) \lambda_{TP} = \frac{4t - 4\rho}{2t^2 - 2\rho^2} = \frac{2(\cancel{t} - \rho)}{(\cancel{t} - \rho)(t + \rho)} \Rightarrow \lambda_{TP} = \frac{2}{t + \rho}$$

$$y - y_T = \lambda_{TP}(x - x_T)$$

$$\left(y - 4t = \frac{2}{t + \rho} (x - 2t^2) \right) \quad (1)$$

2) ~~.....~~

$$y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

$$\stackrel{(1)}{\Rightarrow} y - 4t = \frac{2}{t + \rho} \left(\frac{y^2}{2} - 2t^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow (y - 4t)(t + \rho) = \cancel{2} \frac{y^2}{\cancel{2}} - 4t^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (t + \rho)y + 4t(t + \rho) - 4t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (t + \rho)y + \cancel{4t^2} + 4t\rho - \cancel{4t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - (t + \rho)y + 4t\rho = 0$$

πρεπι (και αριστα) $\Delta = 0 \Leftrightarrow (t + \rho)^2 - 4 \cdot 4t\rho = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{(t + \rho)^2 = 16t\rho}$$

$$\gamma) X_M = \frac{X_T + X_P}{2} = \frac{2t^2 + 2p^2}{2} \Rightarrow X_M = t^2 + p^2$$

$$y_M = \frac{4t + 4p}{2} = 2(t+p) \Rightarrow M(t^2 + p^2, 2(t+p))$$

Ακό (β) επώζηση, έχουμε:

$$(t+p)^2 = 16tp$$

$$t^2 + 2tp + p^2 = 16tp$$

$$t^2 + p^2 = 14tp$$

$$\Rightarrow X = 14tp$$

$$y^2 = 4(t+p)^2$$

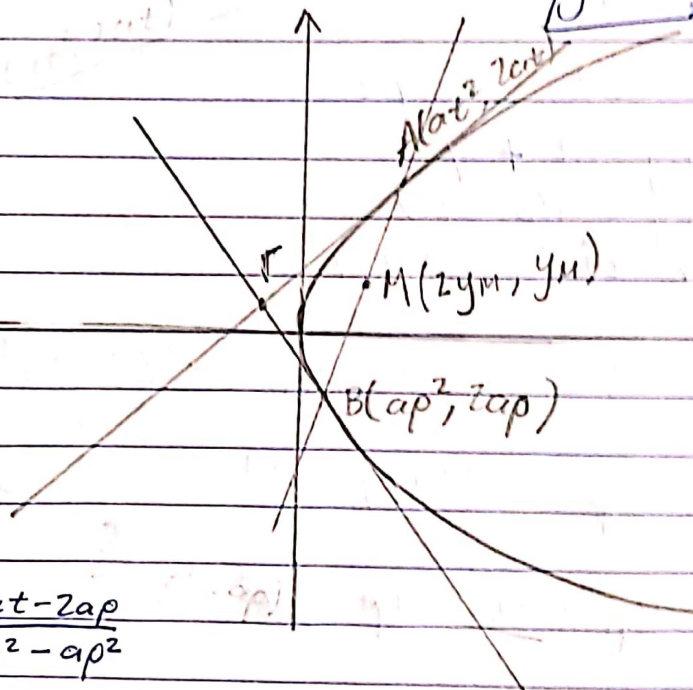
$$\Rightarrow y^2 = 4 \cdot 16tp$$

$$y^2 = 64tp$$

$$y^2 = 64 \cdot \frac{x}{14}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{32}{7}x$$

αδκ. 11



$$\lambda_{AM} = \lambda_{AB}$$

$$\frac{2at - y_M}{at^2 - 2y_M} = \frac{2at - 2ap}{at^2 - ap^2}$$

$$\frac{2at - y_M}{at^2 - 2y_M} = \frac{2}{t+p}$$

$$(2at - y_M)(t+p) = 2(at^2 - 2y_M)$$

$$2at^2 + 2atp - y_M(t+p) = 2at^2 - 4y_M$$

$$4y_M - y_M(t+p) = -2atp$$

$$y_M(4 - t - p) = -2atp$$

$$y_M = -\frac{2atp}{4 - t - p}$$

$$\Rightarrow a(t+p) = \frac{-2atp}{4 - t - p}$$

$$y_M = \frac{2at + 2ap}{2} = a(t+p)$$

$$(t+p)(4 - t - p) = -2tp$$

$$4t + 4p - t^2 - tp - tp - p^2 = -2tp$$

$$t^2 + p^2 = 4(t+p)$$

$$y^2 = 4ax$$

$$2y y' = 4a$$

$$y' = \frac{2a}{y}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{eq}}(A) = \frac{2a}{2at}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{eq}}(A) = \frac{1}{t}}$$

$$\text{Ομοίως: } \boxed{\lambda_{\text{eq}}(B) = \frac{1}{p}}$$

$$y - y_A = \lambda_{\text{eq}}(A)(x - x_A)$$

$$y - 2at = \frac{1}{t}(x - at^2)$$

$$ty - 2at^2 = x - at^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(\text{Eq}_A): ty = x + at^2}$$

$$\text{Ομοίως: } \boxed{(\text{Eq}_B): py = x + ap^2} \quad (2)$$

$$\boxed{X = ty - at^2} \quad (1)$$

Από (1) και (2), έχουμε:

$$py = ty - at^2 + ap^2$$

$$py - ty = a(p^2 - t^2)$$

$$y(\cancel{p} - \cancel{t}) = a(\cancel{p} - \cancel{t})(t + p)$$

$$\boxed{y = a(t + p)} \Rightarrow y_r^2 = a^2(t + p)^2$$

$$(1) \Rightarrow X_r = \underbrace{t a(t + p)}_{y_r} - at^2$$

$$X_r = at^2 + atp - at^2$$

$$X_r = atp$$

$$y_r^2 = a^2(t^2 + p^2 + 2tp)$$

$$y_r^2 = a^2(4(t + p) + 2 \frac{X_r}{a})$$

$$y_r^2 = a^2 \left(\frac{4y_r}{a} + 2 \frac{X_r}{a} \right)$$

$$y_r^2 = a(4y_r + 2X_r)$$

$$y_r^2 = 2a(2y_r + X_r)$$