Ενότητα IV- Ορισμένο ολοκλήρωμα

Άσκηση 28
Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (διάστημα) $[a, b]$, της οποίας οι εφαπτόμενες στα σημεία a και b σχηματίζουν προσανατολισμένες γωνίες με τον άξονα x ,$\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{3}$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\int_a^b f''(x)f'(x)\,dx = \frac{4}{3}.$$

Απάντηση.

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε ότι $f'(a) = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και $f'(b) = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Επίσης, αφού η f'' υπάρχει (στο διάστημα $[a, b]$), τότε η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f''(x)f'(x)\,dx &= \int_a^b (f'(x))' \cdot f'(x)\,dx \\
&= \left[(f'(x))^2\right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
&= (f'(b))^2 - (f'(a))^2 - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
&= \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
&= \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
&= 3 - \frac{1}{3} - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
&= \frac{8}{3} - \int_a^b f'(x) \cdot f''(x)\,dx \\
\Rightarrow 2\int_a^b f''(x)f'(x)\,dx &= \frac{8}{3} \\
\Rightarrow \int_a^b f''(x)f'(x)\,dx &= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

◀

Άσκηση 29
Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο (διάστημα) $[0, 1]$ και είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$.
Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
α) $\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}\,dx$, β) $\int_0^1 x[2f(x) + xf'(x)]\,dx$.

Απάντηση.

α)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x}\,dx &= \int_0^1 (f'(x)-f(x))e^{-x}\,dx \\
&= \int_0^1 (f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x})\,dx \\
&= \int_0^1 (f'(x)e^{-x}+f(x)(e^{-x})')\,dx \\
&= \int_0^1 (f(x)e^{-x})')\,dx \\
&= \left[f(x)e^{-x}\right]_0^1 \\
&= f(1)e^{-1}-f(0)e^0 \;=\; \frac{2}{e}-1.
\end{aligned}$$

◀

Άσκηση 30
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(0)=1$ και $f(1)=e$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}\,dx.$$

Απάντηση.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)+e^x}\,dx &= \int_0^1 \frac{f(x)+e^x-e^x-f'(x)}{f(x)+e^x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{f(x)+e^x}{f(x)+e^x}\,dx - \int_0^1 \frac{f'(x)+e^x}{f(x)+e^x}\,dx \\
&= \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{(f(x)+e^x)'}{f(x)+e^x}\,dx \\
&= 1-\left[\ln|f(x)+e^x|\right]_0^1 \\
&= 1-\left(\ln|f(1)+e^1|-\ln|f(0)+e^0|\right) \\
&= 1-\ln|e+e|+\ln|1+1| \;=\; 1-\ln(2e)+\ln 2 \\
&= 1+\ln\frac{1}{e} \;=\; 1-\ln e \;=\; 1-1=0.
\end{aligned}$$

◀