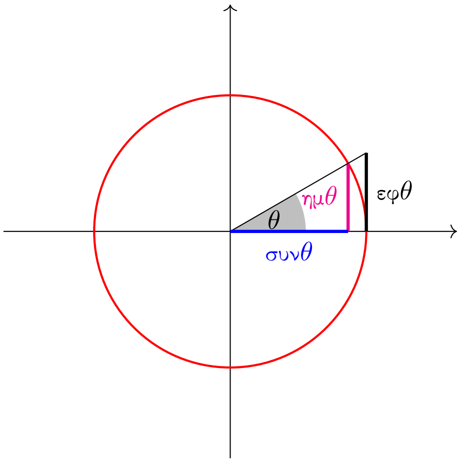
Ενότητα II - Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις



Πίνακας 1: Πίνακας βασικών τριγωνομετρικών αριθμών

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{ημ}x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{συν}x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{εφ}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\text{σφ}x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

▶ Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$
\begin{aligned}
\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta &= 1\\
\text{εφ}^2\theta + 1 &= \text{τεμ}^2\theta\\
\text{σφ}^2\theta + 1 &= \text{στεμ}^2\theta\\
\text{ημ}(\theta \pm \phi) &= \text{ημ}\theta\text{συν}\phi \pm \text{συν}\theta\text{ημ}\phi\\
\text{συν}(\theta \pm \phi) &= \text{συν}\theta\text{συν}\phi \mp \text{ημ}\theta\text{ημ}\phi\\
\text{εφ}(\theta \pm \phi) &= \frac{\text{εφ}\theta \pm \text{εφ}\phi}{1 \mp \text{εφ}\theta\text{εφ}\phi}\\
\text{σφ}(\theta \pm \phi) &= \frac{\text{σφ}\theta\text{σφ}\phi \mp 1}{\text{σφ}\theta \pm \text{σφ}\phi}\\
\text{ημ}^2\theta &= \frac{\text{εφ}^2\theta}{1 + \text{εφ}^2\theta}.
\end{aligned}
$$

▶ Ορισμός των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$$
\begin{aligned}
y = \text{τοξημ}x,\ x \in [-1,1] &\iff x = \text{ημ}y,\ y \in [-\pi/2, \pi/2]\\
y = \text{τοξσυν}x,\ x \in [-1,1] &\iff x = \text{συν}y,\ y \in [0, \pi]\\
y = \text{τοξεφ}x,\ x \in \mathbb{R} &\iff x = \text{εφ}y,\ y \in (-\pi/2, \pi/2)\\
y = \text{τοξσφ}x,\ x \in \mathbb{R} &\iff x = \text{σφ}y,\ y \in (0, \pi)
\end{aligned}
$$

Λύσεις των ασκήσεων

(1) Να υπολογίστε τις ακόλουθες παραστάσεις:

(i) $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(ii)** $\text{τοξημ}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(iii)** $\text{τοξσυν}\left(\frac{1}{2}\right)$ **(iv)** $\text{τοξσυν}\,(-1)$ **(v)** $\text{τοξεφ}(1)$ **(vi)** $\text{τοξεφ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **(vii)** $\text{τοξσφ}(-1)$ **(viii)** $\text{τοξσφ}(\sqrt{3})$

Απάντηση.

(i) $\text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, αφού $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $\text{τοξημ}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, αφού $\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) $\text{τοξσυν}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$, αφού $\text{συν}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

(iv) $\text{τοξσυν}\,(-1)=\pi$, αφού $\text{συν}\,(\pi)=-1$.

(v) $\text{τοξεφ}(1)=\frac{\pi}{4}$, αφού $\text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

(vi) $\text{τοξεφ}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, αφού $\text{εφ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\text{εφ}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(vii) $\text{τοξσφ}(-1)=\frac{3\pi}{4}$, αφού $\text{σφ}\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\text{σφ}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\text{σφ}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

(viii) $\text{τοξσφ}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}$, αφού $\text{σφ}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$. ◀

(2) Να μετατρέψετε σε αλγεβρικές παραστάσεις του x τις πιο κάτω τριγωνομετρικές παραστάσεις:

(i) $\text{ημ}(\text{τοξεφ}(3x)),\quad 0\le x\le \frac{1}{3}$. **(ii)** $\text{εφ}(\text{τοξσυν}(4x)),\quad 0\le x\le\frac{1}{4}$.

Απάντηση.

(i) Θέτουμε $\theta=\text{τοξεφ}(3x)$. Τότε $\text{εφ}\theta=3x$, όπου $0\le x\le\frac{1}{3}$ και $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$.
Θέλουμε να υπολογίστουμε την $\text{ημ}(\text{τοξεφ}(3x))=\text{ημ}\theta$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{εφ}\theta=3x &\Rightarrow \text{εφ}^2\theta=9x^2\Rightarrow\frac{\text{ημ}^2\theta}{\text{συν}^2\theta}=9x^2\\
&\Rightarrow \text{ημ}^2\theta=9x^2\text{συν}^2\theta\\
&\Rightarrow \text{ημ}^2\theta=9x^2(1-\text{ημ}^2\theta)\\
&\Rightarrow \text{ημ}^2\theta=\frac{9x^2}{1+9x^2}\\
&\Rightarrow \text{ημ}\theta=\frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}},\quad \text{αφού ημ}\theta>0.
\end{aligned}$$

Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned}
\text{ημ}^2\theta &= \frac{\text{εφ}^2\theta}{1+\text{εφ}^2\theta}=\frac{9x^2}{1+9x^2}\\
(\text{αφού ημ}\theta>0)\ \Rightarrow\ \text{ημ}\theta &= \sqrt{\frac{9x^2}{1+9x^2}}=\frac{3|x|}{\sqrt{1+9x^2}}\\
&= \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}},\quad \text{αφού } x\ge 0.
\end{aligned}$$

(ii) Θέτουμε $\theta = \text{τοξσυν}(4x)$. Τότε $\text{συν}\theta = 4x$, όπου $0 \le x \le \frac{1}{4}$ και $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
Θέλουμε να υπολογίστουμε την $\text{εφ}(\text{τοξσυν}(4x)) = \text{εφ}\theta$.
Έχουμε:

$$\begin{array}{rcl} \text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1 & \Rightarrow & \text{ημ}^2\theta = 1 - \text{συν}^2\theta \ = \ 1 - 16x^2 \\ (\text{αφού ημ}\theta > 0) & \Rightarrow & \text{ημ}\theta = \sqrt{1-16x^2}. \end{array}$$

Συνεπώς,

$$\text{εφ}\theta = \text{εφ}(\text{τοξσυν}(4x)) = \frac{\text{ημ}\theta}{\text{συν}\theta} = \frac{\sqrt{1-16x^2}}{4x}, \quad x \in [-1,1].$$

◀

(3) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \text{ημ}\left(\text{τοξσυν}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{5}{12}\right)\right).$$

Απάντηση.

Έχουμε:

$$\begin{cases} \text{τοξσυν}\left(\frac{4}{5}\right) = \theta \\ \\ \text{τοξεφ}\left(\frac{5}{12}\right) = \phi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{συν}\theta = \frac{4}{5},\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \\ \text{εφ}\phi = \frac{5}{12},\ \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την παράσταση:

$$\begin{aligned} A &= \text{ημ}\left(\text{τοξσυν}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{τοξεφ}\left(\frac{5}{12}\right)\right) \\ &= \text{ημ}(\theta + \phi) \\ &= \text{ημ}\theta\text{συν}\phi + \text{συν}\theta\text{ημ}\phi. \end{aligned}$$

Από τις Πυθαγόρειες τριάδες $(3,4,5)$ και $(5,12,13)$, ή με χρήση βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και αφού $\text{ημ}\theta,\ \text{ημ}\phi,\ \text{συν}\phi > 0$ βρίσκουμε:

$$\text{ημ}\theta = \frac{3}{5}, \quad \text{ημ}\phi = \frac{5}{13}, \quad \text{συν}\phi = \frac{12}{13}$$

και άρα

$$A = \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} = \frac{56}{65}.$$

◀

(4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = \text{τοξσυν}(3x)$ **(ii)** $f(x) = \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ **(iii)** $f(x) = \text{τοξημ}(x^2)$

Απάντηση.

(i) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = \text{τοξσυν}x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[-1,1]$ με την $h(x) = 3x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έτσι,

$$-1 \le 3x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3},$$

δηλαδή

$$D(f) = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right].$$

Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(3x)'}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(ii) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = $ τοξσφx, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ με την $h(x) = \frac{1}{x-1}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{1\}$. Έτσι,

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Είναι για κάθε $x \neq 1$,

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x-1}\right)^2} = -\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{1+\frac{1}{(x-1)^2}} = \frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

(iii) Η f είναι σύνθεση της $g(x) = $ τοξημx, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ με την $h(x) = x^2$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έτσι,

$$D(f) = [-1,1].$$

Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}, \quad x \in (-1,1).$$

◀

(5) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$,

$$\text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Βρείτε ανάλογο τύπο για $x < 0$.

Απάντηση.

1ος τρόπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Η f είναι το άθροισμα των συναρτήσεων $h(x) = $ τοξσφx και $g(x) = $ τοξσφ$\left(\frac{1}{x}\right)$ οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R} - \{0\}$ αντίστοιχα. Συνεπώς, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
Για $x > 0$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{τοξσφ}x) + \left(\text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{1+x^2} - \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0 \end{aligned}$$

και άρα η f είναι σταθερή στο σύνολο $(0, +\infty)$. Αλλά,

$$f(1) = 2\text{τοξσφ}1 = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

και άρα

$$f(x) = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in (0, +\infty).$$

Εντελώς όμοια, βρίσκουμε ότι η f είναι σταθερή στο σύνολο $(-\infty, 0)$ και αφού

$$f(-1) = 2\text{τοξσφ}(-1) = 2\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

είναι

$$f(x) = \frac{3\pi}{2},\ \forall x \in (-\infty, 0).$$

2ος τρόπος. Θέτουμε $\theta = \text{τοξσφ}x,\ x > 0$ και τότε $\text{σφ}\theta = x,\ \theta \in (0, \pi/2)$.
Θέτουμε $\phi = \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 0$ και τότε $\text{σφ}\phi = \frac{1}{x},\ \phi \in (0, \pi/2)$.
Τότε $(\theta + \phi) \in (0, \pi)$ και

$$\text{σφ}(\theta + \phi) = \frac{\text{σφ}\theta\text{σφ}\phi - 1}{\text{σφ}\theta + \text{σφ}\phi} = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x}} = 0$$

και αφού $(\theta + \phi) \in (0, \pi)$, τότε $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή

$$\text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Εργαζόμαστε ανάλογα για $x < 0$ και βρίσκουμε

$$\text{τοξσφ}x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{2}.$$

◄

(6) Να αποδείξετε ότι

$$(\text{τοξημ}x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\quad x \in (-1, 1).$$

Απάντηση.

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα άκρα του πεδίου ορισμού της (παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη στα σημεία αυτά). Στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της όμως είναι παραγωγίσιμη. Θα προσδιορίσουμε την παράγωγό της:

$$y = \text{τοξημ}x,\ x \in (-1, 1) \iff x = \text{ημ}y,\ y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα (ως προς τη μεταβλητή x):

$$\begin{aligned} x = \text{ημ}y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(\text{ημ}y)}{dx} \\ &\Rightarrow \quad 1 = y' \cdot \text{συν}y \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{1}{\text{συν}y} \quad \text{αφού } y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\text{ημ}^2 y + \text{συν}^2 y = 1 \Rightarrow \text{συν}^2 y = 1 - \text{ημ}^2 y$$

και αφού $y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y > 0$, λαμβάνουμε τη θετική ρίζα:

$$\text{συν}y = \sqrt{1 - \text{ημ}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\quad x \in (-1, 1)}.$$

◄