ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ **ΒΑΘΜΟΣ:**
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2022-2023

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 40΄ **ΥΠΟΓΡ. ΚΑΘΗΓ.:** …………………………..
ΘΕΜΑ/ΕΝΟΤΗΤΑ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ **ΥΠΟΓΡ. ΚΗΔΕΜ.:** …………………………..
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **03/04/2023**
ΤΜΗΜΑ: Β32 **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:** **Γ. Ιωακείμ**
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ____________________

Οδηγίες: Να διαβάσετε προσεκτικά τις εκφωνήσεις των ερωτημάτων και να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.

1. **(α)** Να υπολογίσετε, με χρήση του ορισμού του παραγώγου αριθμού, τον παράγωγο αριθμό $f'(-1)$, όπου $f(x) = 2x - 1$.

(β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε η f'' υπάρχει. Βρείτε τη **δεύτερη** παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = f(x) \cdot e^{2x}$.

(γ) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f(e^x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 2x + e^{3x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό $f'(1)$.

[Μ:4/4/4]

Απάντηση

(α) Είναι $f(-1) = 2(-1) - 1 = -3$. Τώρα,

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{2x - 1 + 3}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{2x + 2}{x + 1} = 2 \lim_{x\to -1} \frac{x + 1}{x + 1} = 2$$

και άρα

$$\boxed{\boldsymbol{f'(-1) = 2.}}$$

(β)

$$h'(x) = (f(x) \cdot e^{2x})' = f'(x) \cdot e^{2x} + f(x) \cdot (e^{2x})' = f'(x) \cdot e^{2x} + f(x) \cdot 2e^{2x}$$
$$= e^{2x} \cdot \big(f'(x) + 2f(x)\big)$$

και ξαναπαραγωγίζοντας,

$$h''(x) = \Big(e^{2x} \cdot \big(f'(x) + 2f(x)\big)\Big)' = (e^{2x})' \cdot \big(f'(x) + 2f(x)\big) + e^{2x}\big(f'(x) + 2f(x)\big)'$$
$$= 2e^{2x} \cdot \big(f'(x) + 2f(x)\big) + e^{2x}\big(f''(x) + 2f'(x)\big)$$

$$= e^{2x} \cdot (2f'(x) + 4f(x) + f''(x) + 2f'(x))$$
$$= e^{2x} \cdot \left(4f(x) + 4f'(x) + f''(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(γ) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(e^x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 2x + e^{3x} \Rightarrow f'(e^x) \cdot (e^x)' + f'(\sigma\upsilon\nu x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' = 2 + 3e^{3x}$$
$$\Rightarrow f'(e^x) \cdot e^x - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = 2 + 3e^{3x}$$
$$\Rightarrow f'\left(e^0\right) \cdot e^0 - \eta\mu 0 \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = 2 + 3e^0$$
$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{f'(1) = 2 + 3 = 5}}$$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

όπου α και β σταθερές. Να προσδιοριστούν οι τιμές των σταθερών αυτών έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη (και) στο σημείο $x_0 = 1$.

[Μ:12]

Απάντηση

Για να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ πρέπει να είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Έτσι, τα όρια $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ και $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ θα πρέπει να υπάρχουν και να είναι ίσα με $f(1) = 1$. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta$$

Έτσι, πρέπει $\alpha + \beta = 1$. Επιπλέον, ο ορισμός της παραγώγου της f στο σημείο $x = 1$ μας λέει ότι το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ θα πρέπει να υπάρχει, δηλ. ισοδύναμα, να υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και να είναι ίσα. Αλλά,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &&= \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x-1} &&= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} \\
\overset{\beta=1-\alpha}{\Longleftrightarrow}\quad & \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha x + 1 - \alpha - 1}{x-1} &&= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 1^+} \frac{\alpha(x-1)}{x-1} &&= \lim_{x\to 1^-} (x+1) \\
\Leftrightarrow\quad & \boxed{\boldsymbol{\alpha = 2}} &&
\end{aligned}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας το $\alpha = 2$ στη σχέση $\alpha + \beta = 1$ παίρνουμε $\boxed{\boldsymbol{\beta = -1}}$.

3. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων χρησιμοποιώντας κανόνες παραγώγισης (η απάντηση να δοθεί στην πιο απλή και παραγοντοποιημένη μορφή):

[M:5/5/5/5]

(α)	$f(x) = -2x^3 + \ln x - 3\sigma\upsilon\nu x, \quad x > 0$ $\Rightarrow f'(x) = -6x^2 + \frac{1}{x} + 3\eta\mu x$	**(β)**	$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}, \ \ x \neq 2$ $\Rightarrow f'(x)$ $= \frac{(x^2 - 4x)' \cdot (x-2) - (x^2 - 4x) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2}$ $= \frac{(2x-4) \cdot (x-2) - (x^2 - 4x) \cdot 1}{(x-2)^2}$ $= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x}{(x-2)^2}$ $= \frac{x^2 - 4x + 8}{(x-2)^2}$
(γ)	$f(x) = \ln^2[(x^2+1)^3]$ $\Rightarrow f'(x) = 2\ln[(x^2+1)^3] \cdot (\ln[(x^2+1)^3])'$ $= 2\ln[(x^2+1)^3] \cdot \frac{[(x^2+1)^3]'}{(x^2+1)^3}$ $= 2\ln[(x^2+1)^3] \cdot \frac{3(x^2+1)^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^3}$ $= \ln[(x^2+1)^3] \cdot \frac{12x(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3}$ $= \frac{12x\ln[(x^2+1)^3]}{x^2+1} = \frac{36x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$	**(δ)**	$f(x) = e^{2x}\varepsilon\varphi x - \frac{1}{x}$ $\Rightarrow f'(x) = (e^{2x})' \cdot \varepsilon\varphi x + e^{2x} \cdot (\varepsilon\varphi x)' + \frac{1}{x^2}$ $= 2e^{2x} \cdot \varepsilon\varphi x + e^{2x} \cdot \tau\varepsilon\mu^2 x + \frac{1}{x^2}$

4. **(α)** Αν $y(x) = e^{2x}\sigma\upsilon\nu x$, να δείξετε ότι

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

(β) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = f(x)$ η οποία ορίζεται από την πιο κάτω (πεπλεγμένη) εξίσωση:

$$x^2 \cdot e^y - 4y^2 = x^2 + 3.$$

[M:8/7]

Απάντηση

(α) Η συνάρτηση y είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{2x}(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{e}^{2x}(3\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu x)$$

Συνεπώς,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = \mathrm{e}^{2x}(3\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu x) - 4\mathrm{e}^{2x}(2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) + 5\mathrm{e}^{2x}\sigma\upsilon\nu x = 0.$$

(β)

$$x^2 \cdot e^y - 4y^2 = x^2 + 3 \Leftrightarrow 2xe^y + x^2 \cdot e^y\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x(1-e^y)}{xe^y - 8y}$$

5. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $x^2y - xy^2 + 6 = 0$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ και τεταγμένη $y > 0$. **[M:15]**

Απάντηση

Αντικαθιστώντας το σημείο $x = 1$ στην εξίσωση της καμπύλης, λαμβάνουμε την εξίσωση $y^2 - y - 6 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $y = 3, -2$ και αφού ζητάμε το σημείο με $y > 0$, κρατάμε το $y = 3$. Επίσης, βρίσκουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy} \quad \left(x \neq 0{,}2, \qquad y \neq \frac{x}{2}\right)$$

Άρα

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = -\frac{3}{5}$$

και έτσι η εξίσωση της καθέτου στο $(1,3)$ είναι η

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{5}{3}(x-1) + 3.}}$$

6. **(α)** Έστω C η καμπύλη η οποία ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x(t) = \alpha\sigma\upsilon\nu(t) \\ y = y(t) = \beta\eta\mu(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

όπου $\alpha, \beta > 0$. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης αυτής.

(β) Έστω η καμπύλη C η οποία ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$C: \begin{cases} x(t) = t^3 - 8t \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Αν $A\big(x(1), y(1)\big)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της καμπύλης στο σημείο αυτό.

[M:10/15]

Απάντηση

(α) Είναι

$$\begin{cases} \mathrm{x(t)} = \mathrm{ασυν(t)} \\ \mathrm{y(t)} = \mathrm{βημ(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{x(t)}}{\mathrm{α}} = \mathrm{συν(t)} \\ \dfrac{\mathrm{y(t)}}{\mathrm{β}} = \mathrm{ημ(t)} \end{cases}$$

Αλλά, αφού $\mathrm{συν}^2(\mathrm{t}) + \mathrm{ημ}^2(\mathrm{t}) = 1$, έπεται ότι

$$\left(\frac{\mathrm{x(t)}}{\mathrm{α}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{y(t)}}{\mathrm{β}}\right)^2 = 1$$

δηλ.

$$\left(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{α}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{β}}\right)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{α}^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{β}^2} = 1$$

[Η εξίσωση είναι σε πεπλεγμένη μορφή]

(β) Κατ' αρχάς, είναι $A\big(x(1), y(1)\big) = A(-7,1)$. Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = 2t \quad και \quad \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8$$

και αρα για $3t^2 - 8 \neq 0$, δηλ. για $t \neq \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ είναι (από το γνωστό μας Θεώρημα)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3t^2 - 8}$$

Έτσι,

$$\lambda_{εφ}(A) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 8} = -\frac{2}{5}$$

και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της καμπύλης στο σημείο $A(7,1)$ είναι η

$$y - 1 = -\frac{2}{5}(x + 7), \quad δηλ. η\ 5y + 2x + 9 = 0$$

[Διαφορετικά, παραγωγίζουμε την πιο πάνω πεπλεγμένη εξίσωση που δίνει την καμπύλη]