

Παιδαγωγική προσέγγιση των σχολικών ασκήσεων της
Β' Λυκείου κατεύθυνσης

Γιάννης Ι. Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός

25 Μαρτίου 2023

Κεφάλαιο 10

Παράγωγος

10.1 Εισαγωγή στην παράγωγο

Δεν υπάρχουν ασκήσεις.

10.2 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο της – Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

Δραστηριότητες σελ. 76-77

Άσκηση 1

Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό της συνάρτησης f με τύπο:

(α) $f(x) = -2$, στο σημείο $x_0 = 4$.

(β) $f(x) = -3x + 1$, στο σημείο $x_0 = -1$.

(γ) $f(x) = x^2 - x + 5$, στο σημείο $x_0 = 0$.

(δ) $f(x) = 1/x$, στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση

(α) Κατ' αρχάς, $x_0 = 4 \in D(f)$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2 - (-2)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{0}{x - 4} = 0$$

και άρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -2$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 4$ είναι ο $f'(4) = 0$.

(β) Κατ' αρχάς, $x_0 = -1 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x + 1 - (-3 \cdot (-1) + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x + 1)}{x + 1} \\ &= -3 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x + 1} = -3 \cdot 1 = -3 \end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = -1$ είναι ο $f'(-1) = -3$.

(γ) Κατ' αρχάς, $x_0 = 0 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 5 - (0^2 - 0 + 5)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = -1 \end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = 0$ είναι ο $f'(0) = -1$.

(δ) Κατ' αρχάς, $x_0 = 1 \in D(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x(x - 1)} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x - 1)} = - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}}_{=1} = -1 \end{aligned}$$

και αρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R}_*$ στο σημείο $x_0 = 1$ είναι ο $f'(1) = -1$.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |x^2 - 4|$ στο σημείο με $x_0 = 2$.

Λύση

Κατ' αρχάς, $x_0 = 2 \in D(f) = \mathbb{R}$. Η συνάρτηση είναι τμηματική. Για να την γράψουμε ως τμηματική, κάνουμε τον πίνακα προσήμου της **παράστασης** $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Έτσι

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, & (x \leq -2) \vee (x \geq 2) \\ 4 - x^2, & -2 < x < 2 \end{cases}$$

Για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ πρέπει (και αρκεί) τα πλευρικά όρια

$$f'_+(2) := \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \quad \text{και} \quad f'_-(2) := \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί και να είναι ίσα. Έχουμε:

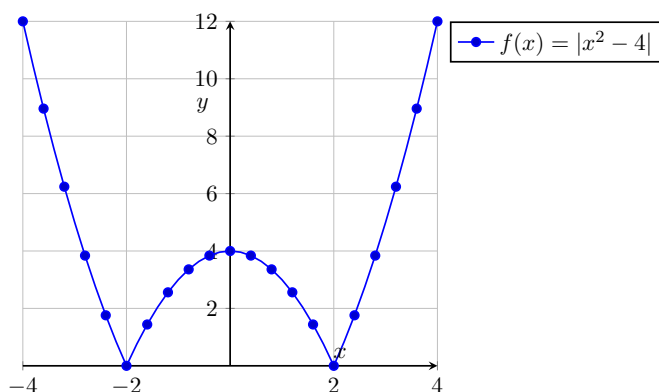
$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2 - 0}{x - 2} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = -4 \end{aligned}$$

και άρα $f'_-(2) \neq f'_+(2)$. Συνεπώς, η $f'(2)$ δεν υπάρχει.

Δίνεται η μορφή του γραφήματος της f , αφού αυτό εξάγεται με χρήση γνωστών σε μας γραφημάτων:



Άσκηση 3

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Τότε, $f'(0) = 1$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(β) Αν δυο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όπου f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x τον παράγωγο αριθμό $f'(x_0)$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$ ισούται με 7.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(δ) Αν $f'(x_0) < 0$, τότε ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς το μέγεθος x είναι θετικός όταν $x = x_0$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

Λύση

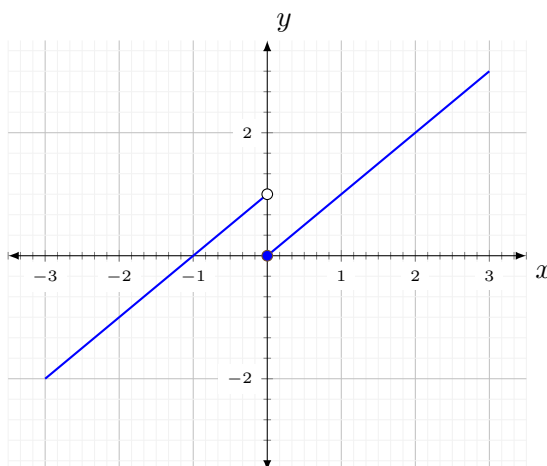
(β) ΛΑΘΟΣ. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

και άρα η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$, άρα ούτε και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



(β) ΣΩΣΤΟ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0

(γ) ΣΩΣΤΟ. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 5x) - (1^2 - 5 \cdot 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 6)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 6) = 6 + 1 = 7 \end{aligned}$$

και άρα ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$ είναι ο $f'(1) = 7$.

(δ) ΛΑΘΟΣ. Προφανές.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε τον παράγωγο αριθμό στο σημείο $x_0 = 0$ (αν υπάρχει) της συνάρτησης f με τύπο:

$$(α) f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}, \quad (β) f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases},$$

$$(γ) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}.$$

Λύση

$$(α) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}.$$

Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$:

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \eta\mu x) = 0 + \eta\mu 0 = 0 + 0 = 0$$

και άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Επίσης $f(0) = 0^2 + 0 = 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Προχωράμε στον έλεγχο της παραγωγισιμότητας στο $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Επομένως, η συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$** .

$$(β) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$:

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

και άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει, άρα η f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, **πόσο μάλλον παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό**.

$$(γ) \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}.$$

Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x_0 = 0$:

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right).$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ορίου, χρησιμοποιούμε το *κριτήριο της παρεμβολής*¹: για $x > 0$,

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Επίσης $f(0) = 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

και συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Προχωράμε στον έλεγχο της παραγωγισιμότητας στο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1 = 0 + 1 = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x}\right)$$

το οποίο όριο είναι ίσο με 0 (κάνοντας ξανά χρήση του κριτηρίου της παρεμβολής).

Επομένως, η συνάρτηση f **δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$** .

¹**Κριτήριο της παρεμβολής**

Έστω I ένα διάστημα και $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε ανοικτή περιοχή του x_0 περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του I , διαφορετικό του x_0 . Έστω επίσης συναρτήσεις f, g και h τέτοιες ώστε τα πεδία ορισμού τους να περιέχουν το I και όχι και ανάγκη το x_0 . Τότε, αν για κάθε $x \in I, x \neq x_0$ ισχύει $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, τότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + a, & x < 2 \\ \frac{\beta}{x}, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

Λύση

Για να είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ πρέπει πρώτα να είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δηλαδή πρέπει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ να υπάρχει και να είναι ίσο με $f(2) = \beta/2$. Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a - x^2) = a - 4$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta}{x} = \frac{\beta}{2}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow a - 4 = \frac{\beta}{2},$$

δηλαδή το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν ισχύει η πιο πάνω.

Δεν χρειάζεται να γράψουμε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ διότι η σχέση αυτή δε θα μας δώσει κάποια καινούργια συνθήκη.

Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a - x^2 - \frac{\beta}{2}}{x - 2} \stackrel{\frac{\beta}{2} = a - 4}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = -(2 + 2) = -4 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{\beta}{x} - \frac{\beta}{2}}{x - 2} = \beta \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \\ &= \beta \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - x}{2x(x - 2)} = -\frac{\beta}{2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x(x - 2)} \\ &= -\frac{\beta}{2} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x} = -\frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\beta}{4}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow -4 = -\frac{\beta}{4} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 16}.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\beta = 16$ στην $a - 4 = \frac{\beta}{2}$ και βρίσκουμε $a = 12$.

Άσκηση 6

Η θέση S ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση εκφράζεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε δευτερόλεπτα.

- (α) Να βρείτε τη μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$.
 (β) Πόση είναι η στιγμιαία ταχύτητα του υλικού σημείου όταν $t = 2 \text{ sec}$;

Λύση

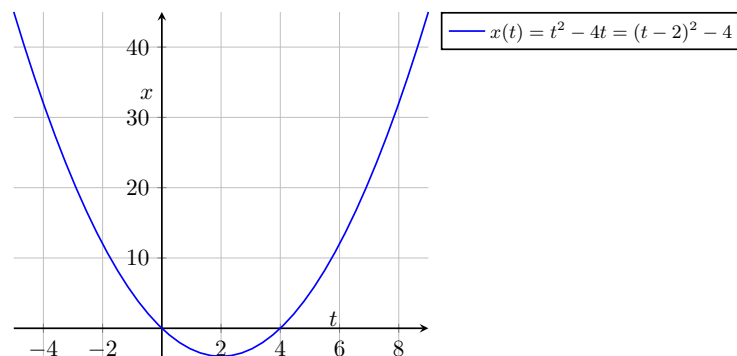
(α) Η μέση ταχύτητα του υλικού σημείου στο χρονικό διάστημα $[0, 2]$ είναι

$$\bar{u} = \frac{x(2) - x(0)}{2 - 0} = \frac{-4 - 0}{2} = -2 \text{ m/sec.}$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 2} \frac{x(t) - x(2)}{t - 2} &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t^2 - 4t) - (2^2 - 4 \cdot 2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^2 - 4t + 4}{t - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(t - 2)(t + 2)}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} (t + 2) = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

και άρα η στιγμιαία ταχύτητα $x'(2) = u(2)$ του υλικού σημείου στο σημείο $t = 2 \text{ sec}$ είναι 0 m/sec .



Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x}{x - 2}, & x < 2 \\ -x^2 + k, & x \geq 2 \end{cases}$$

Να βρείτε το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$.

Λύση

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$. Το $x_0 = 4$ ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[2, +\infty)$. Επίσης, $f(x_0) = f(4) = -4^2 + k = k - 16$. Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-x^2 + k) - (-4^2 + k)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + k + 16 - k}{x - 4} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = -\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = -8 \end{aligned}$$

και άρα ο παράγωγος αριθμός $f'(4)$ είναι ίσος με -8.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Αν ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f στο σημείο x_0 είναι διπλάσιος από το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της f στο σημείο 4, να βρείτε την τιμή του x_0 .

Λύση

• Έστω $x_0 > 0$ σταθεροποιημένο. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x_0}}{x - x_0} = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

(το οποίο όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου 0/0 και αίρουμε την ανωμαλία)

$$\begin{aligned} &= 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = 2 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{2}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0} \end{aligned}$$

Έτσι,

$$f'(x_0) = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0}.$$

Συνεπώς, (ή ακολουθώντας τά ίδια βήματα με πριν για $x_0 = 4$)

$$f'(4) = \frac{1}{2}.$$

Από υπόθεση, αν για ένα σημείο $x_0 > 0$ ισχύει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο αυτό είναι διπλάσιος από το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 4$, δηλ. $f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $\sqrt{x_0} = 1$, δηλ. $x_0 = 1$.

• Η $f'_+(0)$ δεν υπάρχει:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Άρα τελικά, $x_0 = 1$.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x + |x|$.

- (α) Να εξετάσετε κατα πόσο η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
 (β) Να εξετάσετε κατα πόσο η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
 (γ) Ποιό συμπέρασμα προκύπτει από τα (α) και (β);

Λύση

(α) Είναι

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 2x + x, & x \geq 0 \\ 2x - x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Άρα το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Αλλά, $f(0) = 0$ και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Συνεπώς η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 0$.

(β) Ελέγχουμε αν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός της f στο $x = 0$. Είναι

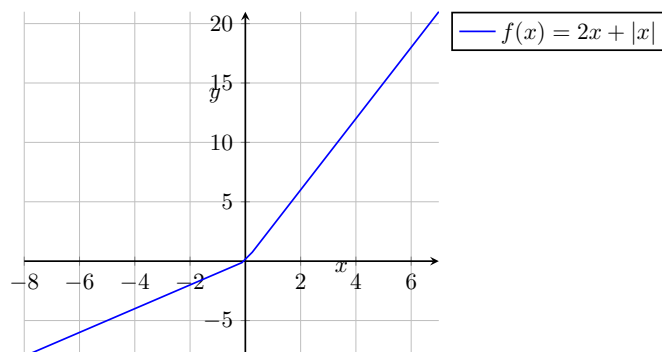
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x} = 3$$

και αρα αφού $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ της f στο $x = 0$ δεν υπάρχει.

(γ) Τα προηγούμενα ερωτήματα μας λένε ότι μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της δεν είναι κατανάγκη και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.



Άσκηση 10

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0).$$

Λύση

Κατ' αρχάς, αφού η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , έπεται ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Τώρα,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x_0) - x_0f(x) + x_0f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{xf(x_0) - x_0f(x_0)}{x - x_0} + \frac{x_0f(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} \right) \end{aligned}$$

Αλλά

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x_0f(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = -x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -x_0 \cdot f'(x_0).$$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}}_{=1} = f(x_0).$$

Κατα συνέπεια, το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι ίσο με (τον αριθμό) $f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$.

10.3 Παράγωγος συνάρτηση

Δραστηριότητες σελ. 80

Άσκηση 1

- (α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.
 (β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

(α) Έστω $x \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 - 5 - (3x^2 - 5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) - 5 - 3x^2 + 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 6x \\ &= 6x. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$f'(x) = 6x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6(x + \Delta x) - 6x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x + 6\Delta x - 6x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6\Delta x}{\Delta x} = 6 \end{aligned}$$

και άρα

$$(f')'(x) = f''(x) = 6, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 2

- (α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
 (β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Λύση

(α) Έστω $x \neq 0$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x - 2(x + \Delta x)}{x \cdot (x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{x \cdot (x + \Delta x) \cdot \Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x \cdot (x + \Delta x)} \\ &= -2 \cdot \frac{1}{x \cdot (x + 0)} = -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $-2/x^2$) για κάθε $x \neq 0$, έπεται ότι η f είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}, \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}).$$

(β) Έστω $x \neq 0$ σταθεροποιημένο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2}{(x + \Delta x)^2} + \frac{2}{x^2}}{\Delta x} = -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{x^2 \cdot (x + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{x^2 \cdot \Delta x \cdot (x + \Delta x)^2} \\ &= -2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x - (x + \Delta x)) \cdot (x + (x + \Delta x))}{x^2 \cdot \Delta x \cdot (x + \Delta x)^2} \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{x^2 \cdot \Delta x \cdot (x + \Delta x)^2} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{x^2 \cdot (x + \Delta x)^2} \\ &= 2 \frac{2x + 0}{x^2 \cdot (x + 0)^2} = \frac{4}{x^3}. \end{aligned}$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $4/x^3$) για κάθε $x \neq 0$, έπεται ότι η f' είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$(f'(x))' = \frac{4}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}),$$

δηλ.

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (x \in \mathbb{R} - \{0\}).$$

Άσκηση 3

Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο συνάρτηση της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = x^3, \quad x \in [-1, 3].$$

Λύση

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα στο εσωτερικό του διαστήματος $[-1, 3)$:

Έστω $x \in (-1, 3)$ σταθεροποιημένο. Τότε,

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) \\
 &= 3x^2 + 3x \cdot 0x + 0^2 = 3x^2.
 \end{aligned}$$

Έτσι, αφού το πιο πάνω όριο υπάρχει (και είναι ίσο με $3x^2$) για κάθε $x \in (-1, 3)$ έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με

$$f'(x) = 3x^2.$$

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα στο άκρο $x = -1$ του διαστήματος $[-1, 3)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3
 \end{aligned}$$

και άρα $f'(-1) = 3 = 3 \cdot 1^2$. Έτσι, η f είναι παντού παραγωγίσιμη στο $[-1, 3)$ με

$$f'(x) = 3x^2.$$

10.4 Παράγωγος βασικών συναρτήσεων – Κανόνες παραγωγίσισης

Δραστηριότητες σελ. 89-90

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0).$$

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(β) Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + t^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η

$$f'(x) = 2x + 2t.$$

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x\sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(δ) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε η $f + g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ε) Η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = 3e^x$, $x \in \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 = \ln 2$ ισούται με 2.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

Λύση

(α) **ΛΑΘΟΣ** Δίνουμε ένα *αντιπαράδειγμα*: Έστω $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 0$ και $g'(1) = 1$, όμως $(f \cdot g)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και άρα $(f \cdot g)'(1) = 1$ ενώ $f'(1) \cdot g'(1) = 0$.

(β) **ΛΑΘΟΣ** Είναι $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η x)

(γ) **ΣΩΣΤΟ** Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ (δες Θεωρία). Στο σημείο $x = 0$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$

(δ) **ΛΑΘΟΣ** Οι f και g με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

έχουν αμφότερες (ένα μόνο) σημείο ασυνέχειας, στο $x = 0$, άρα δεν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό. Αλλά η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι η σταθερή συνάρτηση $=1$ η οποία είναι παντού

παραγωγίσιμη.

(ε) ΛΑΘΟΣ Είναι $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3e^x$ και αρα

$$f'(\ln 2) = 3e^{\ln 2} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 9, x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x^7, x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = e^8, x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \frac{1}{x^4}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ε) $f(x) = 5^x, x \in \mathbb{R}$

(στ) $f(x) = -3e^x, x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(x) = \frac{7}{5x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(η) $f(x) = \frac{3\sqrt[4]{x^3}}{5}, x \in (0, +\infty)$

(θ) $f(x) = 4x^2 - 6x + 7, x \in \mathbb{R}$

(ι) $f(x) = 2x^3 + \frac{8}{x} - \sqrt{5}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ια) $f(x) = e^x + \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ιβ) $f(x) = (x+3)(4-2x^3), x \in \mathbb{R}$

(ιγ) $f(x) = \frac{x^5}{e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$

(ιδ) $f(x) = e^x(2e^x - 3), x \in \mathbb{R}$

(ιε) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

(ιστ) $f(x) = \frac{(x+4)^2}{x+3}, x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες παραγωγίσιμης

(α) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού (σταθερή συνάρτηση) της με

$$f'(x) = (9)' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = (x^7)' = 7x^6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της (σταθερή συνάρτηση) με

$$f'(x) = (e^8)' = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(δ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(ε) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = (5^x)' = 5^x \ln 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(στ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = (-3e^x)' = -3(e^x)' = -3e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(ζ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(\frac{7}{5x}\right)' = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{7}{5x^2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(η) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(\frac{3\sqrt[4]{x^3}}{5}\right)' = \frac{3}{5}(x^{3/4})' = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{9}{20x^{1/4}} = \frac{9}{20\sqrt[4]{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

(θ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = (4x^2 - 6x + 7)' = 8x - 6 = 2(4x - 3), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ι) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(2x^3 + \frac{8}{x} - \sqrt{5}\right)' = 6x^2 - \frac{8}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(ια) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right)' = e^x - \frac{2}{x^3} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

(ιβ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(x) = ((x+3)(4-2x^3))' \\ &= (x+3)'(4-2x^3) + (x+3)(4-2x^3)' \\ &= 1 \cdot (4-2x^3) - (x+3) \cdot (6x^2) \\ &= 4 - 2x^3 - 6x^3 - 18x^2 \\ &= 4 - 8x^3 - 18x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ιγ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^5}{e^{-x}}\right)' = (x^5 \cdot e^x)' = (x^5)' \cdot e^x + x^5 \cdot (e^x)' \\ &= 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x \cdot (5+x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(κανόνας παραγωγίσιμης γινομένου συναρτήσεων).

(ιδ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x(2e^x - 3))' = (e^x)'(2e^x - 3) + e^x(2e^x - 3)' \\ &= e^x(2e^x - 3) + e^x \cdot 2e^x = e^x(2e^x - 3 + 2e^x) \\ &= e^x(4e^x - 3) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(κανόνας παραγωγίσις γινομένου συναρτήσεων).

(ιε) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1-2x}{x^2+1} \right)' = \frac{(1-2x)'(x^2+1) - (1-2x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2(x^2+1) - (1-2x)2x}{(x^2+1)^2} = 2 \frac{-x^2 - 1 - x + 2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= 2 \frac{x^2 - x - 1}{(x^2+1)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(κανόνας παραγωγίσις πηλίκου συναρτήσεων).

(ισ) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με (δουλεύουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα)

$$f'(x) = \left(\frac{(x+4)^2}{x+3} \right)' = \left(\frac{x^2+8x+16}{x+3} \right)' = \frac{(x+4) \cdot (x+2)}{(x+3)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}.$$

(κανόνας παραγωγίσις πηλίκου συναρτήσεων)

Άσκηση 3

Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

(α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f' , f'' και f''' .

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση f έτσι ώστε να είναι $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 2$.

Λύση

Για οποιεσδήποτε τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη (ως πολωνυμική)

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'(x) &= 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f''(x) &= 6\alpha x + 2\beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'''(x) &= 6\alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$f'''(1) = 2 \Rightarrow 6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

και αρα

$$f''(1) = 2 \Rightarrow 6\alpha + 2\beta = 2 \Rightarrow 2 + 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 0$$

και αρα

$$f'(1) = 2 \Rightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 + \gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 1$$

Τέλος,

$$f(1) = 2 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} + 0 + 1 + \delta = 2 \Rightarrow \delta = \frac{2}{3}$$

Έτσι,

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 4

Έστω δυο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 = 1$ και

$$g(1) \neq 0, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(1) = 1.$$

(α) Να δείξετε ότι $f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$.

(β) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις $f'(1) = g'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f(1) \leq \frac{1}{4}$.

Λύση

(α) Υπάρχουν οι $f'(1)$, $g'(1)$ και αρα

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)}.$$

Από υπόθεση είναι

$$g(1) \neq 0, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(1)$$

και αυτό σε συνδυασμό με το πιο πάνω μας δίνουν

$$\frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{g^2(1)} = 1. \quad (10.1)$$

Στο πιο πάνω (αριθμητικό πηλίκο) έχουμε ότι $g^2(1) > 0$ και αφού το πηλίκο αυτό είναι $= 1 > 0$, τότε ο παρονομαστής του είναι γνησίως θετική ποσότητα, ήτοι $f'(1)g(1) - f(1)g'(1) > 0$, δηλ.

$$f'(1)g(1) > f(1)g'(1)$$

.

(β) Αν επιπλέον $f'(1) = g'(1) = 1$, τότε η (10.1) δίνει

$$\frac{g(1) - f(1)}{g^2(1)} = 1 \Rightarrow g(1) - f(1) = g^2(1) \Rightarrow g^2(1) - g(1) + f(1) = 0$$

Αυτό μας λέει ότι ο αριθμός $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x + f(x) = 0$. Αλλά το σύνολο των ριζών της εξίσωσης αυτής περιέχεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (δηλ. η εξίσωση $x^2 - x + f(x) = 0$ έχει πραγματικές λύσεις) αν και μόνο αν η διακρίνουσά του είναι ≥ 0 , δηλ. αν $1 - 4f(1) \geq 0$, δηλ. αν

$$f(1) \leq \frac{1}{4}.$$

10.5 Παράγωγος τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Δραστηριότητες σελ. 96

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τεμ}x$, $x \in A = \mathbb{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$ για κάθε $x \in A$.

Λύση

Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = \text{τεμ}x = \frac{1}{\text{συν}x}$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη (στο Π.Ο. της) ως πηλίκο 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων και μάλιστα

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot \text{συν}x - 1 \cdot (\text{συν}x)'}{\text{συν}^2x} = \frac{-(-\eta\mu x)}{\text{συν}^2x} = \frac{\eta\mu x}{\text{συν}^2x} = \frac{1}{\text{συν}x} \cdot \frac{\eta\mu x}{\text{συν}x} = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$$

και αφού το x ήταν τυχόν (στοιχείο του A), έπεται ότι $f'(x) = \text{τεμ}x \cdot \text{εφ}x$ για κάθε $x \in A$.

Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 2\eta\mu x - \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x\text{εφ}x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(γ) $f(x) = e^x \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

(δ) $f(x) = \frac{x^4}{4} \text{τεμ}x$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

(ε) $f(x) = \frac{\text{στεμ}x}{1 + \sigma\phi x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$

(στ) $f(x) = \frac{1 - \text{συν}x}{1 + \eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$

(ζ) $f(x) = \frac{x\eta\mu x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(η) $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \text{συν}x}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

(θ) $f(x) = x^2 e^x \text{συν}x$, $x \in \mathbb{R}$

(ι) $f(x) = \frac{x\eta\mu x + \text{συν}x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση

Όλες οι συναρτήσεις που δίνονται είναι καλά ορισμένες, την επαλήθευση των οποίων αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη. Επίσης, όλες είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους. Για τον υπολογισμό των παραγώγων συναρτήσεων, θα χρησιμοποιήσουμε κανόνες παραγωγίσιμης

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\eta\mu x - \text{συν}x, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f'(x) &= 2(\eta\mu x)' - (\text{συν}x)' = 2\text{συν}x - (-\eta\mu x) = 2\text{συν}x + \eta\mu x, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(β) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \text{εφ}x, \forall x \in A \\ \Rightarrow f'(x) &= (x\text{εφ}x)' = (x)'\text{εφ}x + x(\text{εφ}x)' = \text{εφ}x + x \cdot \text{τεμ}^2x, \forall x \in A. \end{aligned}$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = e^x \eta \mu x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) &= (e^x \eta \mu x)' = (e^x)' \eta \mu x + e^x (\eta \mu x)' \\ &= e^x \cdot \eta \mu x + e^x \cdot \sigma \upsilon \nu x \\ &= e^x \cdot (\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x), \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(δ) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^4}{4} \cdot \tau \epsilon \mu x, \forall x \in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{x^4}{4} \cdot \tau \epsilon \mu x\right)' = \left(\frac{x^4}{4}\right)' \cdot \tau \epsilon \mu x + \frac{x^4}{4} \cdot (\tau \epsilon \mu x)' \\ &= \left(4 \frac{x^3}{4}\right) \tau \epsilon \mu x + \frac{x^4}{4} \tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \phi x \\ &= x^3 \cdot \tau \epsilon \mu x \cdot \left(1 + \frac{x}{4} \cdot \epsilon \phi x\right), \quad x \in A \end{aligned}$$

(ε) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi - \frac{\pi}{4}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\sigma \tau \epsilon \mu x}{1 + \sigma \phi x}, x \in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{\sigma \tau \epsilon \mu x}{1 + \sigma \phi x}\right)' \\ &= \frac{(\sigma \tau \epsilon \mu x)' \cdot (1 + \sigma \phi x) - \sigma \tau \epsilon \mu x \cdot (1 + \sigma \phi x)'}{(1 + \sigma \phi x)^2} \\ &= \frac{-\sigma \tau \epsilon \mu x \cdot \sigma \phi x \cdot (1 + \sigma \phi x) - \sigma \tau \epsilon \mu x \cdot (-\sigma \tau \epsilon \mu^2 x)}{(1 + \sigma \phi x)^2} \\ &= \sigma \tau \epsilon \mu x \frac{-\sigma \phi x + \overbrace{(\sigma \tau \epsilon \mu^2 x - \sigma \phi^2 x)}^{=1}}{(1 + \sigma \phi x)^2} = \sigma \tau \epsilon \mu x \frac{1 - \sigma \phi x}{(1 + \sigma \phi x)^2}, \end{aligned}$$

$x \in A$.

(στ) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{2k\pi - \frac{\pi}{2}\right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{1 + \eta \mu x}, x \in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{1 + \eta \mu x}\right)' \\ &= \frac{(1 - \sigma \upsilon \nu x)' \cdot (1 + \eta \mu x) - (1 - \sigma \upsilon \nu x) \cdot (1 + \eta \mu x)'}{(1 + \eta \mu x)^2} \\ &= \frac{\eta \mu x \cdot (1 + \eta \mu x) - (1 - \sigma \upsilon \nu x) \cdot \sigma \upsilon \nu x}{(1 + \eta \mu x)^2} \\ &= \frac{\eta \mu x + \overbrace{\eta \mu^2 x + \sigma \upsilon \nu^2 x - \sigma \upsilon \nu x}^{=1}}{(1 + \eta \mu x)^2} = \frac{1 + \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x}{(1 + \eta \mu x)^2}, \end{aligned}$$

$x \in A$.

(ζ) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \{-1\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{x\eta\mu x}{x+1}, x \in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{x\eta\mu x}{x+1} \right)' \\
&= \frac{(x\eta\mu x)' \cdot (x+1) - (x\eta\mu x) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} \\
&= \frac{[(x)'\eta\mu x + x \cdot (\eta\mu x)'] \cdot (x+1) - (x\eta\mu x) \cdot 1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{(\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x) \cdot (x+1) - x\eta\mu x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x \cdot \eta\mu x + \eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + x\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\eta\mu x + x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(x+1)^2} = \frac{\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot (x+1)}{(x+1)^2},
\end{aligned}$$

$x \in A$.

(η) Θέτουμε $A = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}, x \in A \Rightarrow f'(x) &= \left(\frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \right)' \\
&= \frac{(1)' \cdot (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x) - 1 \cdot (\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2} \\
&= \frac{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{(\eta\mu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + (\eta\mu x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2} \\
&= -\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\frac{1}{4}\eta\mu^2(2x)} \\
&= 4 \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2(2x)}, \quad x \in A
\end{aligned}$$

(θ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
f(x) = (x^2 e^x) \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) &= [(x^2 e^x) \cdot \sigma\upsilon\nu x]' = (x^2 e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + (x^2 e^x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x)' \\
&= [(x^2)' e^x + x^2 (e^x)'] \cdot \sigma\upsilon\nu x + (x^2 e^x) \cdot (-\eta\mu x) \\
&= (2x e^x + x^2 e^x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - (x^2 e^x) \cdot \eta\mu x \\
&= x \cdot e^x \cdot (2 + x) \sigma\upsilon\nu x - x^2 e^x \cdot \eta\mu x \\
&= x e^x \cdot (2 \sigma\upsilon\nu x + x \sigma\upsilon\nu x - x \eta\mu x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{e^x}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)'e^x - (x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)(e^x)'}{e^{2x}} \\
 &= \frac{[(x \cdot \eta\mu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)']e^x - (x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)e^x}{e^{2x}} \\
 &= e^x \cdot \frac{(\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - (x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)}{e^{2x}} \\
 &= \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x} \\
 &= \frac{(x-1) \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \eta\mu x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$.

(β) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2.$$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)' = -\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x.$$

Η συνάρτηση f' είναι παντού παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = (f'(x))' = (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)' = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -f(x).$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι $f(x) + f''(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(β) Είναι

$$\begin{aligned}
 \lambda f' \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2f \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2 &\iff \lambda \left(-\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - 2 \left(\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} \right) + \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \\
 &\iff -\lambda - 2 = 2 \iff \boxed{\lambda = -4}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x & x > 0. \end{cases}$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f' .

Λύση

Ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι η συνάρτηση ημίτονο άρα παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x + 1$ ενώ ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f(x) = \sin x$. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - \eta\mu 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

και άρα $f'(0) = 1$. Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \sin x & x > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu x + \sin x, & x < 0 \\ x^2 + x + 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Λύση

Ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είναι άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων (ποιών), άρα παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x\eta\mu x + x^2 \sin x - \eta\mu x$ ενώ ο περιορισμός της συνάρτησης στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 1$. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

και

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \eta\mu x + \sin x - 1}{x}$$

Αλλά,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \eta\mu x = 0 \cdot \eta\mu 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = 0,$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \eta\mu x + \sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \eta\mu x + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

δηλ. $f'_-(0) = 0$. Συνεπώς, αφού $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός $f'(0)$ δεν υπάρχει. Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu x + x^2 \sin x - \eta\mu x, & x < 0 \\ 2x + 1 & x > 0. \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x(\sin x + \eta\mu x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x).$$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{x}.$$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} f'(x) &= [e^x(\sin x + \eta\mu x)]' = (e^x)' \cdot (\sin x + \eta\mu x) + e^x \cdot (\sin x + \eta\mu x)' \\ &= e^x \cdot (\sin x + \eta\mu x) + e^x \cdot (-\eta\mu x + \sin x) \\ &= e^x \cdot [(\sin x + \eta\mu x) + (-\eta\mu x + \sin x)] \\ &= 2e^x \cdot \sin x \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2e^x \cdot \sin x)' = 2(e^x \cdot \sin x)' = 2[(e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)'] \\ &= 2(e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \eta\mu x) = 2e^x(\sin x - \eta\mu x) \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x(\sin x - \eta\mu x) - 2(2e^x \cdot \sin x) + 2e^x(\sin x + \eta\mu x) = \dots = 0$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της παρεμβολής

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| = |2\sin x \cdot e^x| = 2|\sin x \cdot e^x| = 2 \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1} \cdot |e^x| \leq 2|e^x| = 2e^x$$

δηλ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2e^x \leq f'(x) \leq 2e^x$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^x) = -2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

από το Κριτήριο Παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$$

(γ) Για να προσορίσουμε την f''' , μπορούμε να παραγωγίσουμε απευθείας την f'' ή να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του πρώτου ερωτήματος:

$$\begin{aligned}f''(x) = 2(f'(x) - f(x)), \forall x \in \mathbb{R} &\implies f'''(x) = 2(f''(x) - f'(x)), \forall x \in \mathbb{R} \\&\implies f'''(x) = 2(2f'(x) - 2f(x)), \forall x \in \mathbb{R} \\(f''(x) = 2(f'(x) - f(x)), \forall x \in \mathbb{R}) &\implies f'''(x) = 2(2e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)), \forall x \in \mathbb{R} \\&\implies f'''(x) = -4e^x \cdot \eta\mu x, \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4e^x \cdot \eta\mu x}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} \\&= -4 \left(\lim_{x \rightarrow 0} e^x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = -4 \cdot 1 \cdot 1 = -4.\end{aligned}$$

Σημείωση: αφού η συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι συνεχής, έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = e^0 = 1.$$

10.6 Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

Δραστηριότητες σελ. 102-104

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Ισχύει $(\eta\mu(2x))' = \sigma\upsilon\nu(2x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(β) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f'(0) = 0$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f(\eta\mu x))' = f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)'.$$

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(δ) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \eta\mu^2 x$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = \eta\mu(2x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ε) Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E ενός τετραγώνου πλευράς a ως προς την πλευρά του ισούται με $2a$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(στ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε:

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}, \quad f(x) > 0.$$

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ζ) Ο τύπος $(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ ισχύει όταν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

Λύση

(α) ΛΑΘΟΣ (δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$). Π.χ. για $x = \frac{\pi}{2}$.

(β) ΣΩΣΤΟ Είναι

$$f(x) = e^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = (x^2)' \cdot e^{x^2} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα $f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{0^2} = 0$.

(γ) ΣΩΣΤΟ Αφού η f είναι από υπόθεση παραγωγίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ όπως επίσης και η $x \mapsto \eta\mu x$, η σύνθεσή τους θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με (από τον κανόνα της Αλυσίδας)

$$(f(\eta\mu x))' = f'(\eta\mu x) \cdot (\eta\mu x)', \quad x \in \mathbb{R}.$$

(δ) ΣΩΣΤΟ Έχουμε

$$f(x) = \eta\mu^2 x, x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = 2(\eta\mu x)' \cdot \eta\mu x = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(ε) ΣΩΣΤΟ Αν $E : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $a \mapsto E(a) = a^2$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά a , τότε $E'(a) = 2a, \forall a \in (0, +\infty)$.

(στ) ΣΩΣΤΟ Είναι Θεωρία

(ζ) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα $f(x) = x, x \in \mathbb{R}, g(x) = |x - 1|, x \in \mathbb{R}$ και $x_0 = 0$. Τότε, η g είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0) = g(0) = |-1| = 1$ αλλά, η $g'(1)$ δεν ορίζεται. Είναι δε $f'(g(x_0)) = f'(1) = 1$.

Άσκηση 2

Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \eta\mu(3x)$

(β) $y = \sigma\upsilon\nu(x^2 + 1)$

(γ) $y = e^{-x}$

(δ) $y = \sigma\upsilon\nu^2 4x$

(ε) $y = e^{x^3}$

(στ) $y = e^{\eta\mu x}$

(ζ) $y = (x^3 - 2x + 6)^5$

(η) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

(θ) $y = \frac{2}{(3x + 1)^2}$

(ι) $y = \eta\mu(e^x + \sigma\upsilon\nu x)$

(ια) $y = \sigma\tau\epsilon\mu\sqrt{x^3 - 5}$

(ιβ) $y = \eta\mu 5x + e^{-4x}$

(ιγ) $y = 5^{2x}$

(ιδ) $y = 4^{-x} \tau\epsilon\mu 7x$

(ιε) $y = \sigma\phi^5(x^2 + 1)$

(ιστ) $y = (x \cdot \sigma\phi x)^4$

(ιζ) $y = x^4 \tau\epsilon\mu^2 3x$

(ιη) $y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

(ιθ) $y = \epsilon\phi(e^{3x^2})$

(κ) $\sqrt[7]{(x - 2)^5}$

Λύση

(α)

$$y = \eta\mu(3x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = (3x)' \cdot \sigma\upsilon\nu(3x) = 3\sigma\upsilon\nu(3x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

(β)

$$\begin{aligned} y = \sigma\upsilon\nu(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' &= (x^2 + 1)' \cdot (-\eta\mu(x^2 + 1)) \\ &= -2x\eta\mu(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(γ) $y = e^{-x} \Rightarrow y' = (-x)'e^{-x} = -e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}.$

(δ)

$$\begin{aligned} y &= \sigma\upsilon\nu^2(4x), \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y' &= 2 \cdot (4x)' \cdot \sigma\upsilon\nu^{2-1}(4x) \cdot (-\eta\mu(4x)) \\ &= -2 \cdot 4 \cdot \sigma\upsilon\nu(4x) \cdot \eta\mu(4x) \\ &= -8 \cdot \sigma\upsilon\nu(4x) \cdot \eta\mu(4x) \\ &= -4 \cdot \eta\mu(8x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ε) $y = e^{x^3} \Rightarrow y' = (x^3)'e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(στ) $y = e^{\eta\mu x} \Rightarrow y' = (\eta\mu x)'e^{\eta\mu x} = \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{\eta\mu x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(ζ)

$$\begin{aligned} y &= (x^3 - 2x + 6)^5, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y' &= 5(x^3 - 2x + 6)^4 \cdot (x^3 - 2x + 6)' \\ &= 5(x^3 - 2x + 6)^4 \cdot (3x^2 - 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y' &= \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(θ)

$$\begin{aligned} y = \frac{2}{(3x + 1)^2} = 2(3x + 1)^{-2} \Rightarrow y' &= 2 \cdot ((3x + 1)^{-2})' \\ &= 2 \cdot (-2) \cdot (3x + 1)^{-3} \cdot (3x + 1)' \\ &= -4 \cdot (3x + 1)^{-3} \cdot 3 \\ &= -\frac{12}{(3x + 1)^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ι)

$$\begin{aligned} y &= \eta\mu(e^x + \sigma\upsilon\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow y' &= (e^x + \sigma\upsilon\nu x)' \cdot \sigma\upsilon\nu(e^x + \sigma\upsilon\nu x) \\ &= (e^x - \eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu(e^x + \sigma\upsilon\nu x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ια)

$$\begin{aligned} y &= \sigma\tau\epsilon\mu\sqrt{x^3 - 5} \Rightarrow y' = (\sqrt{x^3 - 5})'(-\sigma\tau\epsilon\mu\sqrt{x^3 - 5} \sigma\phi\sqrt{x^3 - 5}) \\ &= -\frac{(x^3 - 5)'}{2\sqrt{x^3 - 5}}\sigma\tau\epsilon\mu\sqrt{x^3 - 5} \sigma\phi\sqrt{x^3 - 5} \\ &= -\frac{3x^2\sigma\tau\epsilon\mu\sqrt{x^3 - 5} \sigma\phi\sqrt{x^3 - 5}}{2\sqrt{x^3 - 5}} \end{aligned}$$

(ιβ)

$$\begin{aligned} y &= \eta\mu 5x + e^{-4x} \Rightarrow y' = (\eta\mu 5x)' + (e^{-4x})' \\ &= (5x)' \sigma\upsilon\nu 5x + (-4x)' e^{-4x} \\ &= 5 \sigma\upsilon\nu 5x - 4e^{-4x}. \end{aligned}$$

$$\textbf{(ιγ)} \quad y = 5^{2x} \Rightarrow y' = (2x)' \ln 5 \cdot 5^{2x} = 2 \ln 5 \cdot 5^{2x}.$$

(ιδ)

$$\begin{aligned} y = 4^{-x} \epsilon\mu 7x \Rightarrow y' &= (4^{-x})' \epsilon\mu 7x + 4^{-x} (\epsilon\mu 7x)' \\ &= (-x)' 4^{-x} \ln 4 \epsilon\mu 7x + 4^{-x} (7x)' \epsilon\mu 7x \epsilon\phi 7x \\ &= -4^{-x} \ln 4 \epsilon\mu 7x + 7 \cdot 4^{-x} \epsilon\mu 7x \epsilon\phi 7x \\ &= 4^{-x} \epsilon\mu 7x (7 \epsilon\phi 7x - \ln 4). \end{aligned}$$

(ιε)

$$\begin{aligned} y = \sigma\phi^5(x^2 + 1) \Rightarrow y' &= 5 \cdot \sigma\phi^4(x^2 + 1) \cdot (\sigma\phi(x^2 + 1))' \\ &= 5 \cdot \sigma\phi^4(x^2 + 1) \cdot (-\sigma\epsilon\mu^2(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)') \\ &= -5 \cdot \sigma\phi^4(x^2 + 1) \cdot \sigma\epsilon\mu^2(x^2 + 1) \cdot 2x \\ &= -10x \cdot \sigma\phi^4(x^2 + 1) \cdot \sigma\epsilon\mu^2(x^2 + 1). \end{aligned}$$

(ιστ)

$$\begin{aligned} y &= (x \cdot \sigma\phi x)^4 \\ \Rightarrow y' &= 4 \cdot (x \cdot \sigma\phi x)^3 \cdot (x \cdot \sigma\phi x)' \\ &= 4(x \cdot \sigma\phi x)^3 \cdot (x' \cdot \sigma\phi x + x \cdot (\sigma\phi x)') \\ &= 4(x \cdot \sigma\phi x)^3 \cdot (\sigma\phi x + x \cdot (-\sigma\epsilon\mu^2 x)) \\ &= 4(x \cdot \sigma\phi x)^3 \cdot (\sigma\phi x - x \cdot \sigma\epsilon\mu^2 x). \end{aligned}$$

(ιζ)

$$\begin{aligned} y &= x^4 \cdot \epsilon\mu^2(3x) \\ \Rightarrow y' &= (x^4)' \cdot \epsilon\mu^2(3x) + x^4 \cdot (\epsilon\mu^2(3x))' \\ &= (4x^3) \cdot \epsilon\mu^2(3x) + x^4 \cdot (2 \cdot (3x)' \cdot \epsilon\mu(3x) \cdot \epsilon\mu(3x) \cdot \epsilon\phi(3x)) \\ &= (4x^3) \cdot \epsilon\mu^2(3x) + 6x^4 \cdot \epsilon\mu^2(3x) \cdot \epsilon\phi(3x) \\ &= 2x^3 \cdot \epsilon\mu^2(3x) \cdot (2 + 3x \cdot \epsilon\phi(3x)). \end{aligned}$$

(ιη)

$$\begin{aligned}
 y = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow y' &= \frac{(e^x)' \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x) \cdot (e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{e^x \cdot (e^x + e^{-x}) - e^x \cdot (e^x + (-x)'e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}.
 \end{aligned}$$

(ιθ)

$$\begin{aligned}
 y = \varepsilon\phi(e^{3x^2}) \Rightarrow y' &= (e^{3x^2})' \cdot \varepsilon\mu^2(e^{3x^2}) \\
 &= (3x^2)' \cdot e^{3x^2} \cdot \varepsilon\mu^2(e^{3x^2}) \\
 &= 6x \cdot e^{3x^2} \cdot \varepsilon\mu^2(e^{3x^2}).
 \end{aligned}$$

(κ)

$$\begin{aligned}
 y = \sqrt[7]{(x-2)^5} = (x-2)^{5/7} \Rightarrow y' &= \frac{5}{7} \cdot (x-2)' \cdot (x-2)^{5/7-1} \\
 &= \frac{5}{7} \cdot (x-2)^{-2/7} = \frac{5}{7\sqrt[7]{(x-2)^2}}.
 \end{aligned}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

$$f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(3) = 5$.

Λύση² Η συνάρτηση $x \mapsto f(x^3 + x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση τέτοιων και $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(f(x^3 + x + 1))' = (x^3 + x + 1)' \cdot f'(x^3 + x + 1) = (3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x + 1)$$

Αλλά από υπόθεση είναι $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ και άρα

$$(3x^2 + 1) \cdot f'(x^3 + x + 1) = 21x^2 - 1$$

και αφού $3x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται τελικά ότι

$$f'(x^3 + x + 1) = \frac{21x^2 - 1}{3x^2 + 1}$$

²Λαμβάνουμε ως υπόθεση ότι $f'(x^3 + x + 1) = 21x^2 - 1$ για να βγαινει $f'(3) = 5$ Η συνάρτηση που δίνεται στο σχολικό βιβλίο είναι μια αντιπαράγωγος της $x \mapsto 21x^2 - 1$

Για να βρούμε την τιμή της $f'(3)$, πρέπει να επιλύσουμε την εξίσωση $x^3 + x + 1 = 3$, δηλ. την $x^3 + x - 2 = 0$ (αν δηλ. έχει λύση και αν ναι, είναι μοναδική). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x^3 + x - 2 &= (x^3 + x^2 + 2x) + (-x^2 - x - 2) = x(x^2 + x + 2) - (x^2 + x + 2) \\ &= (x - 1) \cdot (x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

και άρα

$$x^3 + x - 2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$$

(στο $\mathbb{R}$). Συνεπώς

$$f'(3) = \frac{21 \cdot 1^2 - 1}{3 \cdot 1^2 + 1} = 5$$

Άσκηση 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα :

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

Λύση

Έχουμε:

$$f(\eta\mu x) + f(\sigma\upsilon\nu x) = 1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

(Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη της πιο πάνω σχέσης)

$$\iff (\eta\mu x)' \cdot f'(\eta\mu x) + (\sigma\upsilon\nu x)' \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

$$\iff \sigma\upsilon\nu x \cdot f'(\eta\mu x) - \eta\mu x \cdot f'(\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

και άρα για $x = 0$ η πιο πάνω δίνει

$$\sigma\upsilon\nu 0 \cdot f'(\eta\mu 0) - (\eta\mu 0) \cdot f'(\sigma\upsilon\nu 0) = \sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0,$$

δηλαδή $f'(0) = 1$.

Άσκηση 5

Η πλευρά a (σε cm) ενός τετραγώνου δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τη σχέση $a(t) = t^2 + 1$, $t > 0$.

1. Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t το εμβαδόν $E(t)$ του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 4t(t^2 + 1)$.
2. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του τετραγώνου τη στιγμή $t_0 = 1$ sec.

Λύση

1. Αν $E : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $a \mapsto E(a) = a^2$ η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του τετραγώνου πλευράς a , τότε αφού με τη σειρά της η a είναι συνάρτηση του χρόνου t , έχουμε μια σύνθετη συνάρτηση, ήτοι την $E \circ a$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(E \circ a)'(t) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = (t^2 + 1)' \cdot E'(a(t)) = 2t \cdot E'(a(t)).$$

Αλλά $E(a) = a^2(t) \implies E'(a) = 2a$ και αρα, τελικά,

$$(E \circ a)'(t) = 4t \cdot (t^2 + 1), \quad t > 0.$$

2. Είναι

$$(E \circ a)'(1) = 4 \cdot 1 \cdot (1^2 + 1) = 8 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

Άσκηση 6

Ο όγκος ενός κύβου πλευράς a αυξάνεται με ρυθμό $7 \text{ cm}^3/\text{min}$. Να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν την επιφάνεια και τον όγκο του κύβου ως συνάρτηση της πλευράς του a και να βρείτε:

1. το ρυθμό μεταβολής της πλευράς του κύβου ως προς το χρόνο
2. το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας του κύβου ως προς το χρόνο
3. το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η επιφάνεια του κύβου, όταν ο όγκος είναι 8 cm^3 .

Λύση

Αν E και V είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος ενός κύβου αντίστοιχα, ως συναρτήσεις της ακμής του, a , τότε ξέρουμε ότι $E(a) = 6a^2$, $a > 0$ και $V(a) = a^3$, $a > 0$. Υποθέτουμε ότι η πλευρά του είναι συνάρτηση του χρόνου t , δηλ. $t \mapsto a(t)$, τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε ότι

$$(E \circ a)'(t) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = a'(t) \cdot E'(a(t)) = a'(t) \cdot 12a(t)$$

και

$$(V \circ a)'(t) = a'(t) \cdot V'(a(t)) = a'(t) \cdot V'(a(t)) = a'(t) \cdot 3a^2(t)$$

Συνεπώς, αφού $V'(a(t)) = 7 \text{ cm}^3/\text{min}$, $\forall t > 0$, έχουμε

$$a'(t) = \frac{7}{3a^2(t)} \text{ cm/min}$$

και τότε

$$E'(a(t)) = \frac{28}{a(t)} \text{ cm}^2/\text{min}$$

Τέλος, για το τρίτο ερώτημα, αν $V(a(t_0)) = 8 \text{ cm}^3$, από πριν

$$V(a(t_0)) = 8 \text{ cm}^3 \iff a(t_0) = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ cm}$$

και αρα

$$E'(a(t_0)) = \frac{28}{a(t_0)} = \frac{28}{2} = 14 \text{ cm}^2/\text{min}$$

Άσκηση 7

Σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και η τετμημένη του κάθε χρονική στιγμή t (σε λεπτά) δίνεται από τον τύπο $x(t) = 2t^2 - t$, $t \in [0, 10]$ ($x(t)$ σε μέτρα). Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή, πριν συμπληρωθεί το πρώτο λεπτό της κίνησης, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M γίνεται ίσος με 5 m/min .

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως σύνθεση τέτοιων και από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(f \circ x)'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) = e^{x(t)} \cdot x'(t) = e^{2t^2-t} \cdot (4t-1), \quad t \in [0, 1].$$

Είναι $f'(x(0)) = f'(0) = -1$ και ομοίως, $f'(x(1)) = f'(1) = 3e$. Έτσι, $f'(1) \cdot f'(0) < 0$ και εφαρμόζοντας το ΘΕΤ³ στο διάστημα $[0, 3e]$ (και αφού $5 \in [0, 3e]$), έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ με $f'(\xi) = 5 \text{ m/min}$.

Άσκηση 8

Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε sec) δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$, με $t \in [0, 6]$. Να βρείτε:

1. το ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης του σώματος (την ταχύτητα) τη στιγμή $t_1 = 5 \text{ sec}$
2. το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση) τη στιγμή $t_2 = 4 \text{ sec}$
3. ποιές χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο

Λύση

Η ταχύτητα $v(t)$ του κινούμενου σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5 \text{ sec}$ είναι $v(5) = x'(5)$.

1. Τώρα, για κάθε $t \in [0, 6]$ έχουμε

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 18t + 24.$$

Συνεπώς, $v(5) = 9$ μονάδες μήκους ανα sec .

2. Η επιτάχυνση u του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4 \text{ sec}$ είναι $v'(4)$. Αλλά, για κάθε $t \in [0, 6]$ έχουμε $u(t) = v'(t) = 6(t-3)$ και άρα $u(4) = 6$ μονάδες μήκους ανα sec^2 .
3. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο τη χρονική στιγμή $t \in [0, 6]$ για την οποία η ταχύτητά του είναι ίση με μηδέν. Αλλά

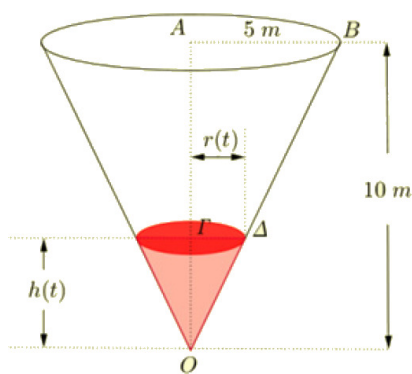
$$\begin{aligned} v(t) = 0 &\iff 3t^2 - 18t + 24 = 0 \iff 3(t-4)(t-2) = 0 \\ &\iff 3(t-4)(t-2) = 0 \iff (t=2 \text{ sec}) \vee (t=4 \text{ sec}) \end{aligned}$$

³**ΘΕΩΡΗΜΑ [Ενδιάμεσης Τιμής]**

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$. Αν k είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των τιμών $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει αριθμός $\xi \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $f(\xi) = k$.

Άσκηση 9

Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια κωνική δεξαμενή ύψους $10m$ με ακτίνα βάσης $5m$. Η δεξαμενή γέμίζει νερό με ρυθμό $2 m^3/min$. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ανεβαίνει η στάθμη του νερού τη χρονική στιγμή που βρίσκεται σε ύψος $4m$.



Σχήμα 10.1: Άσκηση 9

Λύση

Αφού $O \hat{\Gamma} \Delta \approx O \hat{A} B$, τότε

$$\frac{h(t)}{10} = \frac{r(t)}{5} \implies r(t) = \frac{h(t)}{2}.$$

Η συνάρτηση του όγκου κατά τη χρονική στιγμή $t \text{ sec}$ είναι η $V : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t)h(t)}{3} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{h(t)}{2}\right)^2}{3} = \pi \frac{h^3(t)}{12}.$$

Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, έχουμε για $t \geq 0$

$$V'(t) = 2 \iff \frac{\pi h^2(t)}{4} = 2 \iff h'(t) = \frac{8}{\pi h^2(t)}$$

και άρα $h'(4) = \frac{1}{2\pi} m/min$.

10.7 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Δραστηριότητες σελ. 110-111

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Η παράσταση

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(β) Έστω:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = f'(2) = 0.$$

Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο $x_0 = 2$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(γ) Αν για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2,$$

τότε $f'(2) = 0$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(δ) Δίνεται συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη την ευθεία $x = 0$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ε) Στο σχήμα 10.2 δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο $(1, 1)$.

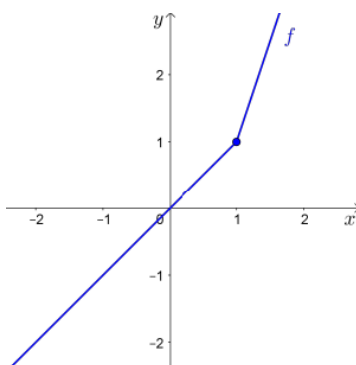
ΣΩΣΤΟ

/

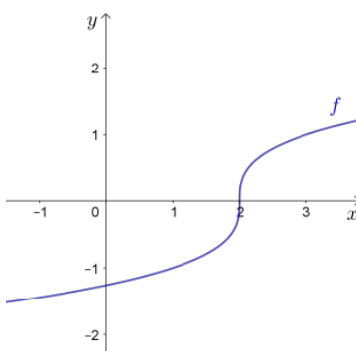
ΛΑΘΟΣ

(στ) Στο σχήμα 10.3 δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(2, 0)$.

Λύση



Σχήμα 10.2: Άσκηση 1 (ε)



Σχήμα 10.3: Άσκηση 1 (στ)

(α) ΛΑΘΟΣ. Το αριθμητικό πηλίκο

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0$$

εκφράζει την κλίση της χορδής που ενώνει τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Δεν μπορούμε να πούμε τίποτα περισσότερο.

(β) ΣΩΣΤΟ. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο με $x = 2$ είναι μηδέν.

(γ) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2 - 2}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 2,$$

δηλ. $f'(0) = 2$, αλλά $f'(2) = 2 \neq 0$.

Σημείωση: Εδώ δεν έχει νόημα να πούμε 'για **κάθε** συνάρτηση' αλλά 'αν για **κάποια** συνάρτηση'.

(δ) ΛΑΘΟΣ. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$, άρα δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $x = 0$.

Απόδειξη ισχυρισμού:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{-x} + 1) = 1.$$

Συνεπώς, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(ε) ΛΑΘΟΣ. Στο σημείο $(1, 1)$ σχηματίζεται γωνία (αν μας έδιναν τύπο για τη συνάρτηση θα μπορούσαμε να το δείξουμε αυστηρά), άρα δεν υπάρχει ο παράγωγος $f'(1)$.

(στ) ΛΑΘΟΣ. Στο σημείο $(2, 0)$ (φαίνεται να) έχουμε κατακόρυφη εφαπτομένη (γράψτε τύπο για τη συνάρτηση-είναι η $f(x) = (x - 2)^{1/3}$).

Άσκηση 2

Να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^2 + 4$ στο σημείο της $A(2, 8)$.

Λύση

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 4$ είναι παντού παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(2, 8)$ είναι ο αριθμός $\lambda = f'(2) = 4$.

Άσκηση 3

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (αν αυτή ορίζεται) στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, στο $A(1, f(1))$

(β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < 0 \\ 3x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$, στο $A(0, f(0))$

(γ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$, στο $A(1, 0)$

Λύση

(α) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1/x^3$, $x \in \mathbb{R}_*$ είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$f'(x) = -\frac{3}{x^4}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

Είναι $f'(1) = -3$ και έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(1, f(1)) = A(1, 1)$ δίνεται από την (εφ.) : $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, δηλ. την (εφ.) : $y - 1 = -3(x - 1)$, δηλ. την (εφ.) : $3x + y - 4 = 0$.

(β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 3, & x < 0 \\ 3x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στην ένωση των διαστημάτων $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική σε κάθε ένα από αυτά. Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 0$:

Έχουμε $f(0) = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) = 3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Τώρα, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 3x}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot (x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 3) = 3$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 3 - 3}{x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{x} = 3$$

έπεται ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ και ισούται με 3, δηλ. $f'(0) = 3$.⁴ Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο της $A(0, f(0)) = A(0, 3)$ δίνεται από την (εφ.) : $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$, δηλ. την (εφ.) : $y - 3 = 3x$, δηλ. την (εφ.) : $y = 3(x + 1)$.

(Υ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}, & x \geq 1 \\ -\sqrt[3]{1-x}, & x < 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στην ένωση των διαστημάτων $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως σύνθεση τέτοιων. Έχουμε $f(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[3]{1-x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sqrt[3]{1-x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{1-x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(1-x)^{2/3}} = +\infty$$

αφού $x < 1 \implies (1-x)^{2/3} > 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^{2/3}} = +\infty,$$

αφού $x > 1 \implies (x-1)^{2/3} > 0$, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης στο σημείο με $x = 1$ παρουσιάζει κατακόρυφη εφαπτομένη, την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

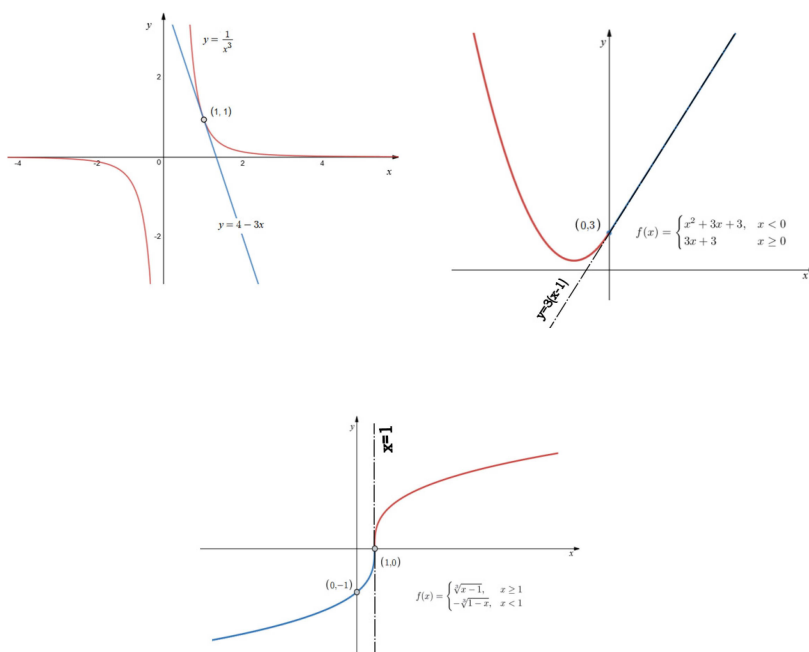
Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δε δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(1, 1)$.

⁴Σημείωση: Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$, έπεται ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.



Σχήμα 10.4: Άσκηση 3

Λύση

Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης στο σημείο $x = 1$: Έχουμε $f(1) = 1^2 = 1$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

και αρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$. Τώρα, αφού

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2$$

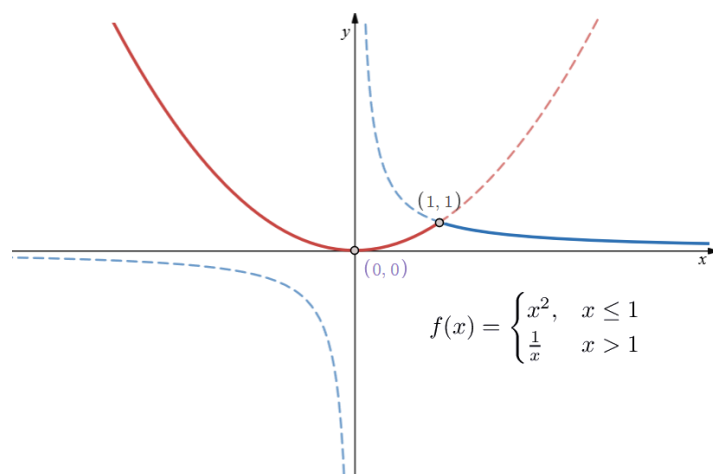
και

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = -1,$$

δηλ. $f'_-(1) \neq f'_+(1)$. Έπεται ότι ο παράγωγος αριθμός της συνάρτησης στο σημείο με $x = 1$ δεν υπάρχει. Συνεπώς, το γράφημα της συνάρτησης στο σημείο με $x = 1$ δεν επιδέχεται εφαπτομένη.

Άσκηση 5

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x > -1$ στο σημείο της A σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία $\frac{3\pi}{4}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο αυτό.



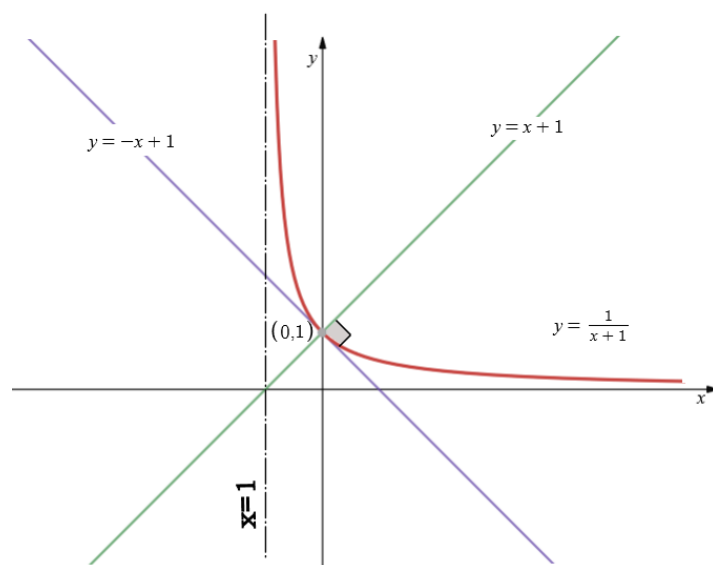
Σχήμα 10.5: Άσκηση 4

Λύση

Από υπόθεση έχουμε ότι $\lambda_{\text{εφ.}}(A) = \text{εφ}(3\pi/4) = -\text{εφ}(\pi/4) = -1$. Επίσης, για $x > -1$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. Άρα,

$$\begin{aligned} f'(x) = -1, \quad x > -1 &\iff -\frac{1}{(x+1)^2} = -1, \quad x > -1 \iff (x+1)^2 = 1, \quad x > -1 \\ &\iff x = -2, 0, \quad x > -1 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Έτσι, $A(0, f(0)) = A(0, 1)$. Η κλίση $\lambda_{\text{κάθ.}}(A)$ της κάθετης του γραφήματος της f στο σημείο $A(0, 1)$ είναι $\lambda_{\text{κάθ.}}(A) = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}(A)} = 1$ και άρα η εξίσωσή της είναι η (κάθ.) : $y - f(0) = -(x - 0)$, δηλ. η (κάθ.) : $x - y + 1 = 0$.



Σχήμα 10.6: Άσκηση 5

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$\begin{cases} \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta + \alpha, & x \geq 2 \\ \frac{\gamma}{x+1}, & x < 2. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(2, f(2))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$.

Λύση

Για να ορίζεται η εφαπτομένη στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο της με $x = 2$, θα πρέπει να είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο σημείο αυτό. Δεδομένου αυτού, για να είναι η εφαπτομένη στο σημείο της με $x = 2$ παράλληλη με την ευθεία (ε) με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$, θα πρέπει $\lambda_{(ε)} = f'(2)$, δηλ. $f'(2) = -2$.

Η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 2 \iff \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

Είναι $f(2) = \alpha \cdot 2^2 + 2\alpha \cdot 2 + \beta + \alpha = 9\alpha + \beta$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \gamma/3$. Άρα

$$9\alpha + \beta = \frac{\gamma}{3} \quad (10.2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 2$

$$\iff \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}}_{=f'(2)}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) &\iff \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{\gamma}{x+1} - \frac{\gamma}{3}}{x - 2} = -2 \iff -\frac{\gamma}{3} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = -2 \\ &\iff -\frac{\gamma}{3} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x + 1} = -2 \\ &\iff -\frac{\gamma}{3} \cdot \frac{1}{3} = -2 \iff \boxed{\gamma = 18} \end{aligned}$$

Έτσι, από τη (10.2) παίρνουμε

$$9\alpha + \beta = \frac{18}{3} = 6 \quad (10.3)$$

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - \overbrace{f(2)}^{=6}}{x - 2} = f'(2) \iff \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta + \alpha - 6}{x - 2} = -2$$

και χρησιμοποιώντας τη (10.3)

$$\begin{aligned}
 &\Longleftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\alpha x^2 + 2\alpha x - 8\alpha}{x - 2} = -2 \\
 &\Longleftrightarrow \alpha \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = -2 \\
 &\Longleftrightarrow \alpha \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2) \cdot (x + 4)}{x - 2} = -2 \\
 &\Longleftrightarrow \alpha \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 4) = -2 \Longleftrightarrow 6\alpha = -2 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας στην (10.2), παίρνουμε $\boxed{\beta = 9}$.

10.8 Πεπλεγμένη συνάρτηση

Δραστηριότητες σελ. 119

Άσκηση 1

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^2 + 2yx - y^2 = 0$

(β) $yx^2 = 3x + y$

(γ) $y = x + xe^y$

(δ) $y^2 - 2y\sqrt{1+x^2} + x^2 = 0$

(ε) $\eta\mu x + \eta\mu y = 1$

Λύση

(α)

$$x^2 + 2yx - y^2 = 0$$

$$\stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{\Longleftrightarrow} \frac{d(x^2 + 2yx - y^2)}{dx} = \frac{d(0)}{dx} \Longleftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(2yx)}{dx} - \frac{d(y^2)}{dx} = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2x + 2x \frac{dy}{dx} + 2y - 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Longleftrightarrow (y - x) \frac{dy}{dx} = x + y$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{y - x} \quad (y \neq x)}$$

(β)

$$yx^2 = 3x + y$$

$$\stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{\Longleftrightarrow} \frac{d(yx^2)}{dx} = \frac{d(3x + y)}{dx}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = 3 + \frac{dy}{dx} \Longleftrightarrow (x^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 3 - 2xy$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 - 1} \quad (x \neq \pm 1)}$$

(γ)

$$y = x + xe^y$$

$$\stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{\Longleftrightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{d(x + xe^y)}{dx} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + e^y + xe^y \frac{dy}{dx}$$

$$\Longleftrightarrow (1 - xe^y) \frac{dy}{dx} = 1 + e^y \Longleftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 + e^y}{1 - xe^y}}$$

(δ)

$$y^2 - 2y\sqrt{1+x^2} + x^2 = 0$$

$$\stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{2y \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} \sqrt{1+x^2} - 2y \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 2x = 0}$$

$$\Longleftrightarrow 2(y - \sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{\sqrt{1+x^2}} - 2x$$

$$\Longleftrightarrow (y - \sqrt{1+x^2}) \frac{dy}{dx} = x \left(\frac{y - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (y \neq \sqrt{1+x^2})}$$

(ε)

$$\eta\mu x + \eta\mu y = 1 \stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y \cdot \frac{dy}{dx} = 0}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu y} \quad (\sigma\upsilon\nu y \neq 0)}$$

Άσκηση 2

Αν $x^2 y = \sigma\upsilon\nu(ax)$, να δείξετε ότι:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^2 + 2)y = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2 y = \sigma\upsilon\nu(ax) \stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{\frac{d(x^2 y)}{dx} = \frac{d(\sigma\upsilon\nu(ax))}{dx}} \Longleftrightarrow 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} = -(ax)' \cdot \eta\mu(ax)$$

$$\Longleftrightarrow 2xy + x^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -a \cdot \eta\mu(ax)$$

$$\stackrel{\text{παραγωγίζω}}{\Longleftrightarrow} \stackrel{\text{πεπλεγμένα}}{2y + 2x \frac{dy}{dx} + 2x \frac{dy}{dx} + x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -a^2 \sigma\upsilon\nu(ax)}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y + a^2 \sigma\upsilon\nu(ax) = 0$$

$$\text{αφού } x^2 y = \sigma\upsilon\nu(ax) \Longleftrightarrow x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y + a^2 x^2 y = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + (a^2 x^2 + 2)y = 0}$$

Άσκηση 3

Αν $e^y = e^x + e^{-x}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$e^y = e^x + e^{-x} \xLeftrightarrow[\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}]{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}} e^y \frac{dy}{dx} = e^x - e^{-x} \xLeftrightarrow[\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}]{\text{παραγωγίζω πεπλεγμένα}} e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x}$$

$$e^y = e^x + e^{-x} \xLeftrightarrow e^y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + e^y \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + e^{-x} \xLeftrightarrow e^y \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} - 1\right] = 0$$

$$e^y > 0, \forall y \in \mathbb{R} \xLeftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0$$

Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι $e^y = e^x + e^{-x} \xLeftrightarrow e^{x+y} = e^{2x} + 1$ και προχωράμε όπως πιο πάνω.

Άσκηση 4

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $xy = 2^x$ στο σημείο της με $x = 1$.

Λύση

Έστω η καμπύλη $\{xy = 2^x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $xy = 2^x$. Για $x = 1$, έχουμε $y = 2$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την πιο πάνω εξίσωση:

$$xy = 2^x \xLeftrightarrow y + x \frac{dy}{dx} = 2^x \ln 2 \xLeftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2^x \ln 2 - y}{x} \quad (x \neq 0)$$

και αρα

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(1,2)} = \frac{2^1 \ln 2 - 2}{1} = 2(\ln 2 - 1)$$

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = 2(\ln 2 - 1) \cdot (x - 1) \xLeftrightarrow y = 2(\ln 2 - 1)x + 4 - 2 \ln 2$$

Ομοίως, αφού $\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = -\frac{1}{2(\ln 2 - 1)}$, βρίσκουμε ότι η εξίσωση της κάθετης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(1, 2)$ είναι η

$$y - 2 = \frac{1}{2(1 - \ln 2)} \cdot (x - 1) \xLeftrightarrow x + 2(\ln 2 - 1)y + 3 - 4 \ln 2 = 0$$

Άσκηση 5

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 = 4x$ στο σημείο της με $x = 4$ και τεταγμένη θετική.

Λύση

Έστω η καμπύλη $C : \{y^2 = 4x\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $y^2 = 4x$. Η πεπλεγμένη αυτή εξίσωση δεν καθορίζει συνάρτηση $x \mapsto y(x)$. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \iff y \frac{dy}{dx} = 2 \iff \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}, \quad (y \neq 0)$$

Το σημείο $x = 4$ ανήκει στον κλάδο της καμπύλης με εξίσωση $y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$ και άρα $y(4) = 4$. Επίσης,

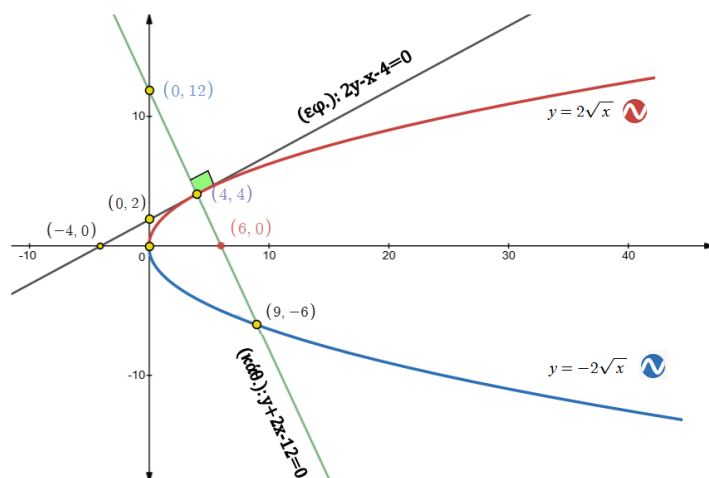
$$\lambda_{\text{εφ.}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(4,4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

και $\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = -2$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο $A(4, 4)$ είναι η

$$y - 4 = \frac{1}{2} \cdot (x - 4) \iff 2y - x - 4 = 0$$

και η εξίσωση της κάθετης στο γράφημα της καμπύλης στο ίδιο σημείο είναι η

$$y - 4 = -2(x - 4) \iff y + 2x - 12 = 0$$



Σχήμα 10.7: Άσκηση 5

Άσκηση 6

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο της $A(3\cos\theta, 2\eta\mu\theta)$.

Λύση

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \iff \frac{(3\cos\theta)^2}{9} + \frac{(2\eta\mu\theta)^2}{4} = \eta\mu^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

και αρα το σημείο $A(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ ανήκει πράγματι στην καμπύλη. Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{9}x + \frac{2}{4}y \frac{dy}{dx} = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y}, \quad (y \neq 0).$$

και στο σημείο A είναι

$$\lambda_{\text{εφ.}} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_A = -\frac{4}{9} \cdot \frac{3\sigma\upsilon\nu\theta}{2\eta\mu\theta} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$\begin{aligned} y - 2\eta\mu\theta &= -\frac{2}{3} \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} (x - 3\sigma\upsilon\nu\theta) \iff 3\eta\mu\theta(y - 2\eta\mu\theta) = -2\sigma\upsilon\nu\theta(x - 3\sigma\upsilon\nu\theta) \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y - 6\eta\mu^2\theta = -(2\sigma\upsilon\nu\theta)x + 6\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y + (2\sigma\upsilon\nu\theta)x = 6(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta) \\ &\iff (3\eta\mu\theta)y + (2\sigma\upsilon\nu\theta)x - 6 = 0. \end{aligned}$$

Ομοίως, αφού

$$\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = \frac{3\eta\mu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta},$$

βρίσκουμε ότι η εξίσωση της καθετού στο γράφημα της καμπύλης στο A είναι η

$$(3\eta\mu\theta)x - (2\sigma\upsilon\nu\theta)y - 5\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 0$$

Άσκηση 7

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y = 1$, στα οποία η κλίση της γραφικής παράστασης της καμπύλης είναι ίση με -1 .

Λύση

Έστω η καμπύλη $C : \{x^2 + y^2 - 2y = 1\}$, δηλ. η καμπύλη της οποίας το γράφημα καθορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2y = 1$. Είναι

$$x^2 + y^2 - 2y = 1 \iff 2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = 0 \iff (1 - y) \frac{dy}{dx} = x \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - y}, \quad (y \neq 1)$$

Αν (a, b) με $b \neq 1$ είναι σημείο του γραφήματος της καμπύλης στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με -1 , τότε

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(a,b)} = -1 \iff \frac{a}{1 - b} = -1 \iff b = a + 1$$

Αλλά το σημείο (a, b) ανήκει στην καμπύλη C και αρα $a^2 + b^2 - 2b = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = a + 1 \\ b \neq 1 \\ a^2 + b^2 - 2b = 1 \end{cases} &\iff a^2 + (a + 1)^2 - 2(a + 1) = 1 \iff a^2 + a^2 + 2a + 1 - 2a - 2 = 1 \\ &\iff 2a^2 = 2 \iff a = \pm 1 \end{aligned}$$

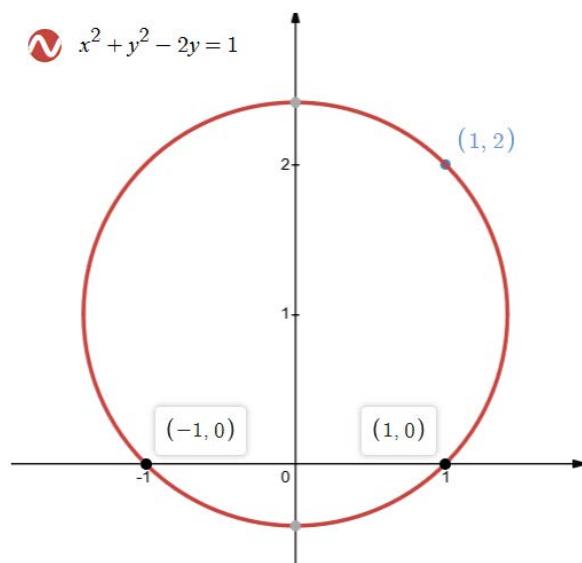
Για $a = 1$ έχουμε

$$1^2 + b^2 - 2b = 1 \iff b(b - 2) = 0 \iff b = 0, 2$$

και για $a = -1$ έχουμε

$$(-1)^2 + b^2 - 2b = 1 \iff b(b - 2) = 0 \iff b = 0, 2.$$

(ερώτηση: δώστε γεωμετρική ερμηνεία στο γιατί για τις δυο αυτές τιμές του a έχουμε τα ίδια b)
Έτσι, τα εν λόγω σημεία είναι τα $(1, 2)$ και $(-1, 0)$.



Σχήμα 10.8: Άσκηση 7

Άσκηση 8

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $xy^5 + x^5y - 1 = 0$ δεν δέχεται οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση

Το σύνολο των σημείων του γραφήματος της καμπύλης στα οποία το γράφημά της δεν έχει οριζόντιες εφαπτομένες είναι το σύνολο

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid xy^5 + x^5y - 1 = 0, \frac{dy}{dx} \neq 0 \right\}$$

Παρατηρούμε ότι το σημείο $(0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη αφού αν ανήκε, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωσή της, θα είχαμε $-1 = 0$, άτοπο.

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $xy^5 + x^5y - 1 = 0$:

$$xy^5 + x^5y - 1 = 0 \iff y^5 + 5xy^4 \frac{dy}{dx} + 5x^4y + x^5 \frac{dy}{dx} = 0 \iff (5xy^4 + x^5) \frac{dy}{dx} = -(5x^4y + y^5)$$

Αλλά, αφού το σημείο $(0, 0)$ δεν ανήκει στην καμπύλη, έπεται ότι $5x^4y + x^5 \neq 0$ και άρα

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4y + y^5}{5xy^4 + x^5}$$

και αφού $x \cdot y \neq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, έπεται ότι ο αριθμητής $5x^4y + y^5$ της πιο πάνω δε μηδενίζεται για κανένα ζεύγος (x, y) , δηλ. $\frac{dy}{dx} \neq 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$, στα οποία η στα οποία η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.

Λύση

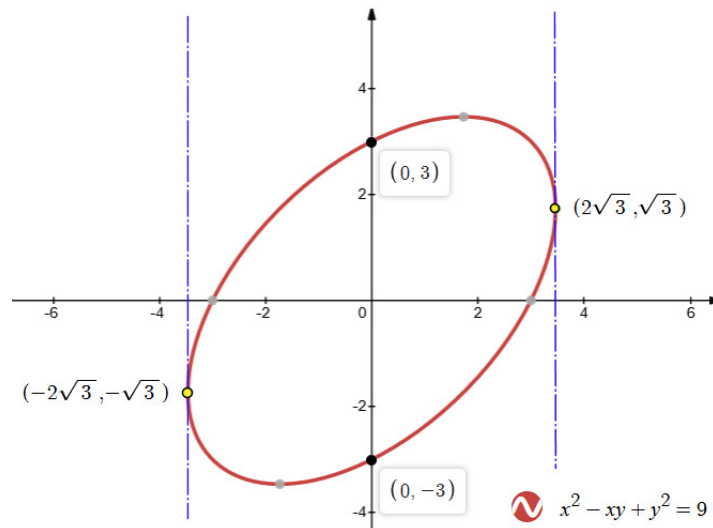
Το σύνολο των σημείων του γραφήματος μιας καμπύλης στα οποία το γράφημά της έχει κατακόρυφη εφαπτομένη είναι το σύνολο

$$G = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x^2 - xy + y^2 = 9, \nexists \frac{dy}{dx} \right\}$$

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση $x^2 - xy + y^2 = 9$:

$$x^2 - xy + y^2 = 9 \iff 2x - y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \iff (2y - x) \frac{dy}{dx} = y - 2x$$

Αν $2y - x = 0$, δηλ. $2y = x$, τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση της καμπύλης, έχουμε $3y^2 = 9$, δηλ. $y = \pm\sqrt{3}$ και $x = \pm 2\sqrt{3}$. Στα σημεία $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ και $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ το γράφημά της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτόμενη.



Σχήμα 10.9: Άσκηση 9

10.9 Συνάρτηση που ορίζεται παραμετρικά

Δραστηριότητες σελ. 126-127

Άσκηση 1

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των πιο κάτω παραμετρικών καμπύλων:

$$(α) \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [0, +\infty) \quad (β) \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1] \quad (γ) \begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(δ) \begin{cases} x = \tan^2 t - 1 \\ y = \tan t \end{cases}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (ε) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}, t \in [-3, 10]$$

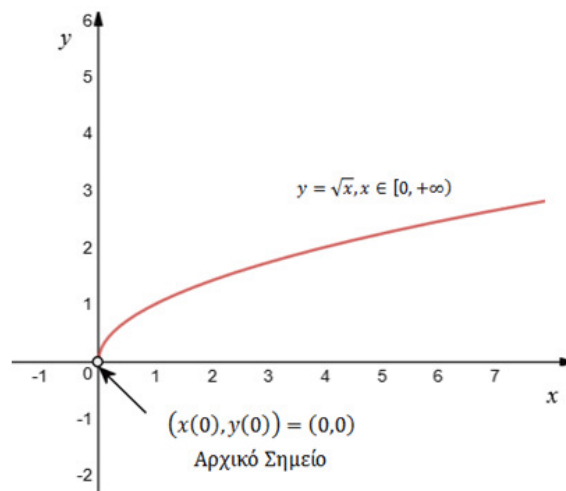
Λύση

$$(α) \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [0, +\infty)$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \geq 0$, έπεται ότι $\sqrt{t} \geq 0$. Έτσι, το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Προφανώς είναι $y(t) = \sqrt{x(t)}$, $\forall t \in [0, +\infty)$. Η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι λοιπόν η $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης Αρχικό Σημείο είναι το $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.



Σχήμα 10.10: Άσκηση 1 (α)

$$(β) \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

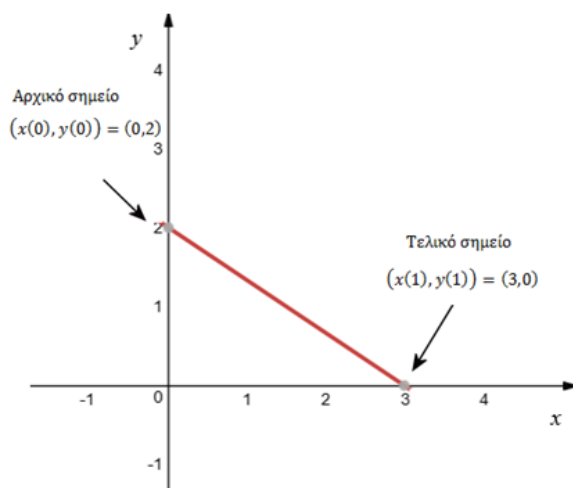
Βήμα 1: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της καμπύλης: Είναι (και ο $t \mapsto x(t)$ και ο $t \mapsto y(t)$ είναι 1-1 μετασχηματισμοί)

$$t \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \overbrace{3t}^{x(t)} \leq 3 \\ 0 \leq \underbrace{2-2t}_{y(t)} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 3] \\ y \in [0, 2] \end{cases}$$

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Λύνουμε την $x = x(t) = 3t$ ως προς t : $t = x/3$ και αντικαθιστούμε στην $y = y(t) = 2 - 2t$ η οποία γίνεται

$$y = 2 - \frac{2x}{3}, \quad x \in [0, 3].$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Η καμπύλη μας είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $(x(0), y(0)) = (0, 2)$ και τέλος το σημείο $(x(1), y(1)) = (3, 0)$.



Σχήμα 10.11: Άσκηση 1 (β)

$$(γ) \begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

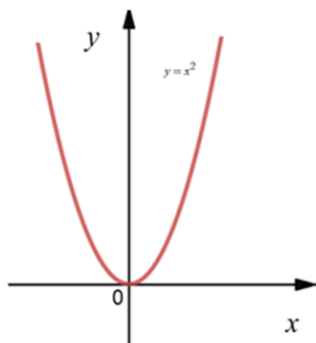
Βήμα 1: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $(3t) \in \mathbb{R}$ και $(9t^2) \in [0, +\infty)$. Έτσι, το Π.Ο. της είναι το $\mathbb{R}$ και το σύνολο τιμών της το $[0, +\infty)$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Προφανώς είναι $y(t) = 9t^2 = (3t)^2 = x^2(t)$, και αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Είναι η γνωστή σε μας παραβολή με κορυφή στην αρχή των αξόνων όπου και λαμβάνει ελάχιστο.

$$(δ) \begin{cases} x = \tan^2 t - 1 \\ y = \tan t \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της καμπύλης: Αφού $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι $(\tan^2 t - 1) \in [0, +\infty)$ και $\tan t \in \mathbb{R}$ (η συνάρτηση $f : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$ είναι 1-1) Έτσι, το Π.Ο.



Σχήμα 10.12: Άσκηση 1 (γ)

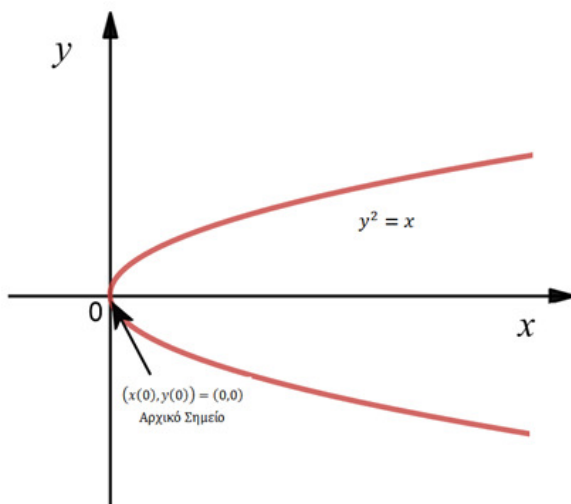
της είναι το $[0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της το $\mathbb{R}$.

Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης: Είναι $\forall t \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\tan^2 t - 1 = \epsilon \phi^2 t$ δηλ. $y^2(t) = x(t)$ και αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$y^2 = x, \quad x \in [0, +\infty)$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Είναι η γνωστή μας παραβολή με κλάδους τον $y = \sqrt{x}$ και τον $y = -\sqrt{x}$.

Αρχικό Σημείο $(x(0), y(0)) = (0, 0)$



Σχήμα 10.13: Άσκηση 1 (δ)

$$\textcircled{\epsilon} \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}, \quad t \in [-3, 10]$$

Βήμα 1: Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της καμπύλης: Είναι (και ο $t \mapsto x(t)$ και ο $t \mapsto y(t)$ είναι 1-1 μετασχηματισμοί)

$$t \in [-3, 10] \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq \overbrace{2t-1}^{x(t)} \leq 19 \\ 7 \leq \underbrace{t^2+7}_{y(t)} \leq 107 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7, 19] \\ y \in [7, 107] \end{cases}$$

Σημείωση:

$$-3 \leq t \leq 10 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq t \leq 0 \\ 0 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t^2 \leq 9 \\ 0 < t \leq 100 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 100$$

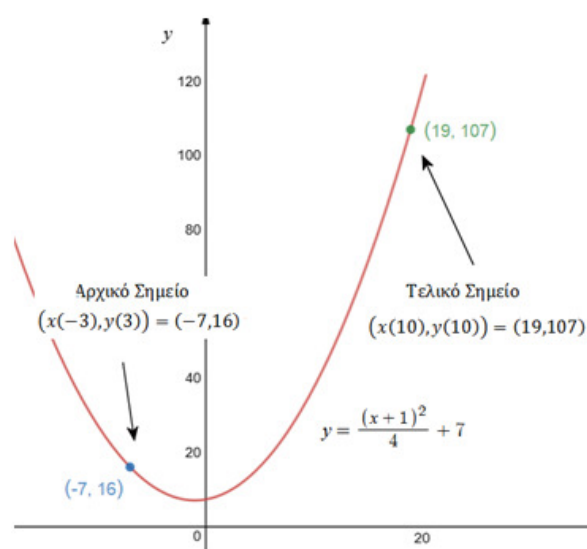
Βήμα 2: Βρίσκουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης:

$$\begin{cases} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = t^2 + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x(t)+1}{2} \\ y(t) = t^2 + 7 \end{cases} \Rightarrow y(t) = \frac{(x(t)+1)^2}{4} + 7, \quad t \in [-3, 10]$$

Αρα η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$y = \frac{(x+1)^2}{4} + 7, \quad x \in [-7, 19]$$

Βήμα 3: Κατασκευάζουμε το γράφημα της καμπύλης: Η καμπύλη μας είναι τμήμα παραβολής με κορυφή στο σημείο $(-1, 7)$ (στο οποίο λαμβάνει ελάχιστο) και Αρχικό και Τελικό Σημείο το $(x(-3), y(-3)) = (-7, 16)$ και $(x(10), y(10)) = (19, 107)$ αντίστοιχα.



Σχήμα 10.14: Άσκηση 1 (ε)

Άσκηση 2

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x(t) = t - \eta\mu t \\ y(t) = 2 + \sigma\upsilon\nu t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = \frac{\pi}{3}$.

(β) Να βρείτε την $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση

(α) Είναι $\frac{dx}{dt} = 1 - \sigma\upsilon\nu t$ και $\frac{dy}{dt} = -\eta\mu t$ και άρα για $t \in [0, 2\pi] - \{x \in [0, 2\pi] \mid \sigma\upsilon\nu t = 1\} = [0, 2\pi] - \{0, 2\pi\} = (0, 2\pi)$,

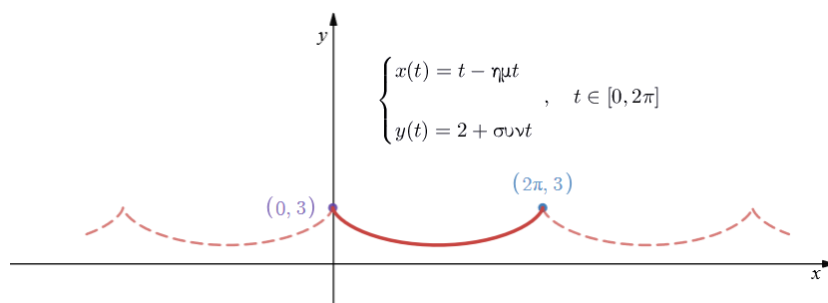
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\eta\mu t}{1 - \sigma\upsilon\nu t} \implies \frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{-\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -\sqrt{3}$$

(β) Είναι για $t \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{-\eta\mu t}{1 - \sigma\upsilon\nu t} \right) = \frac{(-\eta\mu t)' \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu t) - (-\eta\mu t) \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu t)'}{(1 - \sigma\upsilon\nu t)^2} \\ &= \frac{-\sigma\upsilon\nu t \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu t) + \eta\mu t \cdot \eta\mu t}{(1 - \sigma\upsilon\nu t)^2} = \frac{-\sigma\upsilon\nu^2 t + \sigma\upsilon\nu t + \eta\mu^2 t}{(1 - \sigma\upsilon\nu t)^2} \\ &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu t}{(1 - \sigma\upsilon\nu t)^2} = \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu t} \end{aligned}$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu t}}{1 - \sigma\upsilon\nu t} = \frac{1}{(\sigma\upsilon\nu t - 1)^2}$$



Σχήμα 10.15: Άσκηση 2

Άσκηση 3

Παραμετρική καμπύλη (C) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \\ y(t) = e^{-2t} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

(β) Να δείξετε ότι

$$y^{-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Λύση

(α) Έχουμε $x(t) = 1 \Leftrightarrow e^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$ και $y(0) = e^0 = 1$. Συνεπώς, το σημείο $A(1, 1)$ ανήκει στην καμπύλη.

(β) Είναι

$$\frac{dx}{dt} = e^t \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = -2e^{-2t}$$

και άρα για $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -2e^{-3t} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6e^{-3t}}{e^t} = 6e^{-4t}$$

Συνεπώς, για $y \neq 0$,

$$y^{-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x^3 \frac{dy}{dx} - 2 = e^{4t} \cdot 6e^{-4t} + 2e^{3t} \cdot (-2e^{-3t}) - 2 = 6 - 4 - 2 = 0.$$

Σημείωση: Για την καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης της καμπύλης, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $x(t), y(t) > 0$ και $y(t) = \frac{1}{(e^t)^2} = \frac{1}{x^2(t)}$ (και αντίστροφα). Έτσι, η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης (C) είναι η $y = 1/x$, $x > 0$.

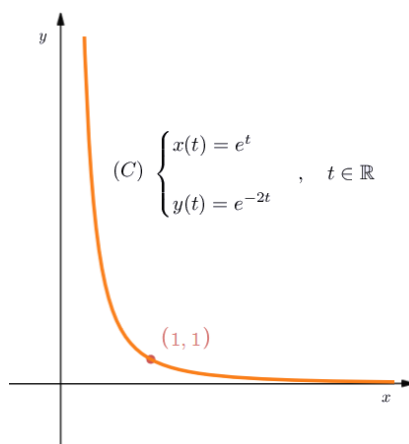
Άσκηση 4

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2+t}{1+2t} \\ y(t) = \frac{3+2t}{t} \end{cases}, \quad t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$$

(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+2t)^2}{t^2}$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{d^2 y}{dx^2}$ για $x = 0$.



Σχήμα 10.16: Άσκηση 3

Λύση

(α) Είναι για $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{(1+2t)^2} \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{t^2}$$

και άρα για $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{3}{t^2}}{\frac{3}{(1+2t)^2}} = -\frac{(1+2t)^2}{t^2}.$$

(β) Έχουμε για $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) &= -\frac{(t^2)' \cdot (1+2t)^2 - t^2 \cdot [(1+2t)^2]'}{t^4} = -\frac{(2t) \cdot (1+4t+4t^2) - t^2 \cdot 4(1+2t)}{t^4} \\ &= -2t \frac{1+4t+4t^2 - 4t - 8t^2}{t^4} = -2 \frac{1+4t+4t^2 - 4t - 8t^2}{t^3} \\ &= -\frac{2(1+2t)}{t^3} \end{aligned}$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2(1+2t)}{t^3}}{-\frac{3}{(1+2t)^2}} = \frac{2(1+2t)^3}{3t^3}$$

Τώρα,

$$x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2+t}{1+2t} = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0} = \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=-2} = \frac{9}{4}$$

Άσκηση 5

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2 \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - t \end{cases}, \quad t \in (0, +\infty)$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = 3$.

Λύση

Είναι για $t \in (0, +\infty)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = t^2 - 1$$

Άρα, η κλίση της εφαπτομένης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο της με $t = 3$ είναι $\lambda = \frac{dy}{dx}\bigg|_{t=3} = \frac{4}{3}$.

Είναι $x(3) = 7$ και $y(3) = 6$. Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(x(3), y(3)) = (7, 6)$ είναι η

$$y - 6 = \frac{4}{3} \cdot (x - 7) \quad \text{δηλ. η} \quad 4x - 3y - 10 = 0$$

Άσκηση 6

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = 2\eta\mu(2t) \\ y(t) = 2\eta\mu t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης (K), στα οποία έχει οριζόντιες και κατακόρυφες εφαπτομένες.

Λύση

Είναι για $t \in [0, \pi]$,

$$\frac{dx}{dt} = 4\sigma\upsilon\nu(2t) \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = 2\sigma\upsilon\nu t$$

Η πιο πάνω καμπύλη έχει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία $t \in [0, \pi]$ στα οποία $dy/dt = 0$, δηλ. στα σημεία εκείνα του $[0, \pi]$ τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu t = 0$, δηλ. στο $t = \pi/2$. Έτσι, το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $(x(\pi/2), y(\pi/2)) = (0, 2)$. Η πιο πάνω καμπύλη έχει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία $t \in [0, \pi]$ στα οποία $dx/dt = 0$, δηλ. στα σημεία εκείνα του $[0, \pi]$ τέτοια ώστε $\sigma\upsilon\nu(2t) = 0$, δηλ. στα $t = \pi/4, 3\pi/4$. Έτσι, τα ζητούμενα σημεία έχουν συντεταγμένες

$$(x(\pi/4), y(\pi/4)) = (2, \sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (x(3\pi/4), y(3\pi/4)) = (-2, \sqrt{2})$$

Άσκηση 7

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \eta\mu t \\ y(t) = \sigma\upsilon\nu^2 t \end{cases}, \quad t \in (0, \pi)$$

Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = \frac{5}{4}$.

Λύση

Είναι για $t \in (0, \pi)$,

$$\frac{dx}{dt} = \sigma\upsilon\nu t \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = -2\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t$$

άρα για $t \in \mathbb{R} - \{\pi/2\}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t}{\sigma\upsilon\nu t} = -2\eta\mu t = -2(x(t) - 1).$$

και άρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(5/4) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=5/4} = -2 \left(\frac{5}{4} - 1 \right) = -\frac{1}{2}$$

(η κλίση της **εφαπτόμενης** της καμπύλης στο σημείο της με $x = 5/4$)

και

$$\lambda_{\text{κάθ.}}(5/4) = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}(5/4)} = 2.$$

Για $x = \frac{5}{4}$ είναι

$$\eta\mu t = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad y = \sigma\upsilon\nu^2 t = 1 - \eta\mu^2 t = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

και έτσι η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $(\frac{5}{4}, \frac{15}{16})$ είναι η

$$y - \frac{15}{16} = 2 \left(x - \frac{5}{4} \right) \quad \text{δηλ. η} \quad 16y - 32x + 25 = 0$$

Σημείωση: Εύκολα βρίσκουμε ότι η καρτεσιανή μορφή της εξίσωσης της καμπύλης είναι η

$$y = 1 - (x - 1)^2, \quad x \in (1, 2).$$

10.10 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Δραστηριότητες σελ. 133-134

Άσκηση 1

Με τη χρήση του θεωρήματος της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης, να αποδείξετε ότι:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \log_a(x)$. Τότε, η $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι η αντίστροφη της g . Έτσι, για $x \in \mathbb{R}$, από το Θεώρημα παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε

$$f'(x) = (a^x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{(\log_a(a^x))'} = \frac{1}{\frac{1}{a^x \cdot \ln a}} = a^x \cdot \ln a.$$

Άσκηση 2

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και η κλίση της στο A ισούται με $-1/4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 3$.

Λύση

$A(-1, 3) \in Gr(f) \implies f(-1) = 3$ και αφού η f είναι αντιστρέψιμη, έπεται ότι $f^{-1}(3) = -1$. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $A(-1, 3)$ είναι $-1/4$, δηλ. $f'(-1) = -1/4$. Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f^{-1} για $x = 3$ δίνεται από το Θεώρημα παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(-1)} = -4.$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο $(3, f^{-1}(3)) = (3, -1)$ είναι η $y + 1 = (f^{-1})'(3) \cdot (x - 3)$, δηλ. η $y + 1 = -4 \cdot (x - 3)$, δηλ. η $y + 4x - 11 = 0$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}.$$

Να υπολογίσετε την τιμή $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Λύση

1ος τρόπος (με το Θεώρημα παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης)

Βήμα 1: Δείχνω ότι η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη.

Είναι 1-1:

έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1^2}{x_1 + 1} = \frac{x_2^2}{x_2 + 1} \Leftrightarrow x_1^2(x_2 + 1) = x_2^2(x_1 + 1) \\ &\Leftrightarrow x_1^2 x_2 + x_1^2 - x_2^2 x_1 - x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 x_2 + x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

Άρα είτε $x_1 = x_2$ είτε $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0$, δηλαδή αν $x_1 x_2 = -(x_1 + x_2)$. Η δεύτερη δεν μπορεί να ισχύει αφού $x_1, x_2 > 0$ (τότε $x_1 x_2 > 0$ και $x_1 + x_2 > 0 \Rightarrow -(x_1 + x_2) < 0$). Άρα $x_1 = x_2$.

Εύκολα δείχνουμε ότι η f είναι επί (του συνόλου $(0, +\infty)$).

Άρα, υπάρχει η $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$.

Βήμα 2: Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγωγίσιης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f' \left(f^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right)}.$$

Βήμα 3:

$$\begin{aligned} f^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = x &\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x = -1/2) \vee (x = 1) \end{aligned}$$

και αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$, έχουμε ότι $x = 1$.

Βήμα 4: Βρίσκω την f'

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \quad x > 0.$$

Βήμα 5:

$$(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f' \left(f^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \right)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

2ος τρόπος (βρίσκοντας την αντίστροφη συνάρτηση)

Βρίσκουμε ότι $f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ με τύπο

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 4x}).$$

Βρίσκουμε:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+4x}} + \frac{1}{2}$$

και άρα

$$(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{4}{3}.$$

Σημείωση: Ο δεύτερος τρόπος είναι πιο χρονοβόρος, γι' αυτό είναι μια καλή ευκαιρία να τονίσουμε τη 'δύναμη' του Θεωρήματος παραγωγίσης αντίστροφης συνάρτησης.

Άσκηση 4

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

- (α) $f(x) = \ln(3x), \quad x \in (0, +\infty)$
- (β) $f(x) = \ln^4 x, \quad x \in (0, +\infty)$
- (γ) $f(x) = \ln(x^2 - 5x), \quad x \in (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$
- (δ) $f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in A = \{x | \eta\mu x > 0\}$
- (ε) $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x), \quad x \in A = \{x | x^3 \sigma\upsilon\nu x > 0\}$
- (στ) $f(x) = \ln \left(\frac{x^2+1}{x-1} \right), \quad x > 1$
- (ζ) $f(x) = x^2 \ln(x+8), \quad x > -8$
- (η) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$
- (θ) $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right), \quad x > 0$
- (ι) $f(x) = \log \left(\sqrt{4-x^2} \right), \quad x \in [-2, 2]$
- (ια) $f(x) = \log_5(\sqrt[3]{x+8}), \quad x \in \left(-\frac{8}{5}, +\infty \right)$
- (ιβ) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}, \quad x > 0$
- (ιγ) $f(x) = 2^{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$
- (ιδ) $f(x) = x^{\eta\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

Λύση

Τα πεδία ορισμού των προς παραγωγή συναρτήσεων δίνονται έτσι ώστε οι εν λόγω συναρτήσεις να είναι καλά ορισμένες (να ορίζονται) καθώς και παραγωγίσιμες. Έτσι, δε χρειάζεται να ανησυχούμε κάθε φορά για το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} | \exists f'\}$.

$$(α) f(x) = \ln(3x) \Rightarrow f'(x) = (3x)' \ln(3x) = 3 \ln(3x), \quad x \in (0, +\infty).$$

$$(β) f(x) = \ln^4 x \Rightarrow f'(x) = 4 \ln^3 x (\ln x)' = 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$(γ) f(x) = \ln(x^2 - 5x), \quad x \in A = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty). \text{ Έχουμε για } x \in A :$$

$$f'(x) = (\ln(x^2 - 5x))' = \frac{(x^2 - 5x)'}{x^2 - 5x} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}.$$

$$(δ) f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in A = \{x | \eta\mu x > 0\}. \text{ Έχουμε για } x \in A :$$

$$f'(x) = (\ln(\eta\mu x))' = \frac{(\eta\mu x)'}{\eta\mu x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \sigma\phi x.$$

(ε) $f(x) = \ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in A = \{x | x^3 \sigma\upsilon\nu x > 0\}$. Έχουμε για $x \in A$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(x^3 \sigma\upsilon\nu x))' = \frac{(x^3 \sigma\upsilon\nu x)'}{x^3 \sigma\upsilon\nu x} = \frac{(x^3)' \cdot \sigma\upsilon\nu x + x^3 \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'}{x^3 \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x^3 \cdot \eta\mu x}{x^3 \sigma\upsilon\nu x} = \frac{x^2(3\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x)}{x^3 \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{3\sigma\upsilon\nu x - x\eta\mu x}{x \sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{x} - \epsilon\phi x \end{aligned}$$

(στ) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$, $x > 1$. Έχουμε για $x > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x-1) \\ \implies f'(x) &= (\ln(x^2+1))' - (\ln(x-1))' = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} - \frac{(x-1)'}{x-1} \\ &= \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1) \cdot (x-1)} \end{aligned}$$

(ζ) $f(x) = x^2 \ln(x+8)$, $x > -8$. Έχουμε για $x > -8$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 \ln(x+8))' = (x^2)' \ln(x+8) + x^2 (\ln(x+8))' \\ &= 2x \ln(x+8) + x^2 \cdot \frac{(x+8)'}{x+8} \\ &= 2x \ln(x+8) + x^2 \cdot \frac{1}{x+8} = 2x \ln(x+8) + \frac{x^2}{x+8}. \end{aligned}$$

(η) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \stackrel{\cdot \frac{e^x}{e^x}}{=} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

(θ) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x > 0$. Έχουμε για $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})'}{x + \sqrt{x^2+1}}$$

Αλλά

$$(x + \sqrt{x^2+1})' = 1 + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

και άρα

$$f'(x) = \frac{\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(ι) $f(x) = \log(\sqrt{4-x^2})$, $x \in [-2, 2]$. Έχουμε για $x \in (-2, 2)$:

$$f(x) = \log(\sqrt{4-x^2}) = \frac{1}{2} \cdot \log(4-x^2)$$

και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \ln 10} \cdot \frac{(4-x^2)'}{4-x^2} = \frac{x}{\ln 10 \cdot (x^2-4)}.$$

(ια) $f(x) = \log_5(\sqrt[3]{x+8})$, $x \in \left(-\frac{8}{5}, +\infty\right)$. Έχουμε για $x > -\frac{8}{5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt[3]{x+8})'}{\sqrt[3]{x+8}} \cdot \frac{1}{\ln 5} = \frac{\frac{1}{3}(x+8)^{-2/3}(x+8)'}{\sqrt[3]{x+8}} \cdot \frac{1}{\ln 5} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x+8} \cdot (x+8)^{2/3}} \cdot \frac{1}{\ln 5} \\ &= \frac{1}{3 \ln 5 (x+8)}. \end{aligned}$$

(ιβ) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, $x > 0$. Έχουμε για $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\ln x + 1)' \cdot x^2 - (\ln x + 1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x + 1)2x}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x \ln x - 2x}{x^4} = -\frac{1 + 2 \ln x}{x^3}. \end{aligned}$$

(ιγ) $f(x) = 2^{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x^2+1)' \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2+1} = x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2.$$

(ιδ) $f(x) = x^{\eta\mu x}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Έχουμε για $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$:

$$y = x^{\eta\mu x} \iff \ln y = \ln x^{\eta\mu x} \iff \ln y = \eta\mu x \cdot \ln x$$

$$\iff \frac{y'}{y} = (\eta\mu x \ln x)' \iff \frac{y'}{y} = (\eta\mu x)' \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot (\ln x)'$$

$$\iff y' = y \cdot \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\iff y' = x^{\eta\mu x} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu x \cdot \ln x + \eta\mu x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Άσκηση 5

Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta xy^2 = \ln(x^2 - 3) + 1, \quad x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

αν η εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης στο σημείο της $A(2, 1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon) : x + y = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β .

Λύση

Το β δεν μπορεί να είναι $=0$ (σκεφτείτε γιατί). Αφού το σημείο $A(2, 1)$ διέρχεται από το γράφημα της καμπύλης, έπεται ότι εξίσωση ότι $4\alpha + 2\beta = 1$. Αφού η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $x + y = 5$, αυτές θα έχουν την ίδια κλίση, δηλ. $y'(2) = \lambda_{\varepsilon\Phi} = -1$. Έχουμε για $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta xy^2 = \ln(x^2 - 3) + 1 &\stackrel{d/dx}{\iff} 2\alpha x + 2\beta y^2 + 2\beta xy y' = \frac{(x^2 - 3)'}{x^2 - 3} \\ &\iff \alpha x + \beta y^2 + \beta xy y' = \frac{x}{x^2 - 3} \\ &\stackrel{\beta \neq 0}{\iff} y' = \frac{1}{\beta xy} \left(\frac{x}{x^2 - 3} - \alpha x - \beta y^2 \right) \end{aligned}$$

Άρα

$$y'(2) = -1 \iff \frac{1}{2\beta \cdot 1} \left(\frac{2}{2^2 - 3} - 2\alpha - \beta \cdot 1^2 \right) \iff 4\alpha - 3\beta = 4$$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 4\alpha - 3\beta = 4 \\ 4\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$ και βρίσκουμε

$$\boxed{\alpha = \frac{11}{20} \quad \beta = -\frac{3}{5}}.$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f , στα οποία έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με

$$f'(x) = \frac{(2 - \ln x) \cdot \ln x}{x^2}$$

Έστω (a, b) σημείο του γραφήματος της f στο οποίο έχει οριζόντια εφαπτομένη. Τότε

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(a,b)} = 0 \iff \frac{(2 - \ln a) \cdot \ln a}{a^2} = 0 \iff (\ln a = 2) \vee (\ln a = 0) \iff (a = e^2) \vee (a = 1)$$

Είναι $f(1) = 0$ και $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$ και άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(e^2, \frac{4}{e^2})$ και $(1, 0)$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{x}} \\ \text{Λογαριθμούμε αμφότερα μέλη} &\iff \ln(f(x)) = \ln(x^{\frac{1}{x}}) \\ &\iff \ln(f(x)) = \frac{1}{x} \cdot \ln x \\ \text{Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη} &\iff [\ln(f(x))]' = \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)' \\ &\iff \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Λύνουμε ως προς $f'(x)$:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία οι εφαπτομένες της είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$ είναι αυτά τα οποία ικανοποιούν την $f'(x) = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff x^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ &\iff -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e \end{aligned}$$

και άρα έχουμε ένα μόνο σημείο, το $(e, f(1/e)) = (e, e^{\frac{1}{e}})$.

Άσκηση 8

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \ln(1 - t) \end{cases}, \quad t \in [0, 1).$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $x = 0$.

Λύση

Έχουμε για $t \in [0, 1)$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \quad \text{και} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t-1}$$

και άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t(t-1)} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = 6e^{-4t}$$

Είναι $x(t) = 0 \iff e^t = 1 \iff t = 0$. Άρα η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης αυτής στο σημείο της με $x = 0$ είναι

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{e^0(0-1)} = -1$$

Επίσης, $y(0) = \ln(1-0) = 0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $(0, 0)$ είναι $y = -x$.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(2x + e^{3g(x)}), \quad x \in (0, +\infty).$$

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $g(0) = 0$, να δείξετε ότι:

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$

Λύση

Αναδιατύπωση:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \ln(2x - e^{-3g(x)}), \quad x \in [-1, +\infty),$$

όπου η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε $e^{-3g(x)} > 2x$, $\forall x \in [-1, +\infty)$ και $g(0) = 0$. Να δείξετε ότι:

$$f'(0) - 3g'(0) = 2.$$

Είναι για $x > -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x - e^{-3g(x)})'}{2x - e^{-3g(x)}} = \frac{2 + 3g'(x)e^{-3g(x)}}{2x - e^{-3g(x)}} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{2 + 3 \cdot g'(0) \cdot e^{-3g(0)}}{2 \cdot 0 + e^{-3g(0)}} = 2 + 3g'(0) \\ \Rightarrow f'(0) - 3g'(0) &= 2. \end{aligned}$$

10.11 Δραστηριότητες ενότητας

Δραστηριότητες σελ. 139-144 (ενότητας)

Άσκηση 1

Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(β) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(γ) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(δ) Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(0) = 0$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ε) Αν μια (παραγωγίσιμη) συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A , τότε και η παράγωγος f' έχει πεδίο ορισμού το A .

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(στ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 1$, ισούται με 3.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ζ) Ο αριθμός $f'(x_0)$ εκφράζει γεωμετρικά την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(η) Αν μια συνάρτηση f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η παράγωγος f' είναι συνεχής στο x_0 .

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(θ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει

$$(f(f(x)))' = (f'(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ι) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε η παράγωγος f' είναι περιττή.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ια) Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δε δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

Άσκηση 1-συνέχεια από την προηγούμενη σελίδα

(ιβ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \ln x$, $x > 0$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Τότε $x_0 = 2$.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

(ιγ) Οι καμπύλες δυο συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο με τετμημένη x_0 . Αν $f'(x_0) = g'(x_0)$, τότε οι εφαπτόμενες στο σημείο αυτό έχουν τις ίδιες εξισώσεις.

ΣΩΣΤΟ

/

ΛΑΘΟΣ

Λύση (α) ΣΩΣΤΟ Μάλιστα, είναι πολύ σημαντικό αποτέλεσμα και γι' αυτό θα ξαναδούμε την απόδειξή του:

Παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ συνεχής

Έστω $f : A \rightarrow B$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Τότε είναι συνεχής στο x_0 .

Απόδειξη. Από υπόθεση, η $f'(x_0)$ υπάρχει, δηλ. **υπάρχει** το $f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

Αλλά, $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = x_0 - x_0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$. Έτσι, $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0$, δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, δηλ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ και αρα η f είναι συνεχής στο x_0 . $\square$

(β) ΛΑΘΟΣ

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

και άρα δεν υπάρχει η $f'_+(0)$ (παρόλο που η f ορίζεται στο $x = 0$ και είναι μάλιστα συνεχής στο σημείο αυτό).

(γ) ΛΑΘΟΣ Δεν είναι καν συνεχής στο $x_0 = 1$, αρα πόσο μάλλον παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

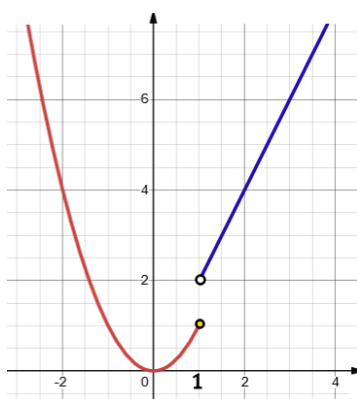
(δ) ΛΑΘΟΣ Είναι $f'(x) = -\eta\mu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα $f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$f''(0) = -\sigma\upsilon\nu 0 = -1.$$

(ε) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα τη συνάρτηση του ερωτήματος **(β)**.

(στ) ΛΑΘΟΣ Έχουμε

$$f(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(1) = 4,$$



Σχήμα 10.17: Η συνάρτηση της 1(γ)

δηλ. ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης όταν $x = 1$ ισούται με 4.

(ζ) ΣΩΣΤΟ Ανάτρεξε στη Θεωρία

(η) ΣΩΣΤΟ Αν η f'' υπάρχει, δηλ. η f' είναι παραγωγίσιμη, έπεται (δες το πρώτο ερώτημα) ότι (η f') είναι συνεχής συνάρτηση.

(θ) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα την $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και

$$(f(f(x)))' = f'(f(x)) \cdot f'(x) = f'(x^2) \cdot 2x = 2x^2 \cdot 2x = 4x^3$$

(ή απευθείας, αφού $f(f(x)) = x^4$) και $(f'(x))^2 = 4x^2$. Για $x = -1$ είναι $(f(f(-1)))' = -4 \neq 4 = (f'(-1))^2$.

Σημείωση: Στο πιο πάνω παράδειγμα, υπάρχουν σημεία στα οποία η σχέση είναι αληθής, π.χ. $(f(f(1)))' = 4 = (f'(1))^2$.

(ι) ΣΩΣΤΟ Αν η f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$, τότε $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και αρα παραγωγίζοντας αμφότερα μέλη, έχουμε $-f'(-x) = f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και το ζητούμενο έπεται.

(ια) ΣΩΣΤΟ Αφού $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \Delta$.

(ιβ) ΛΑΘΟΣ Η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο τυχόν $x_0 > 0$ είναι $f'(x_0) = 1/x_0$. Η ευθεία με εξίσωση $y = -1/2x + 5$ έχει κλίση $\lambda = -1/2$. Αν $f'(x_0) \cdot \lambda = -1$, τότε $x_0 = 1/2$.

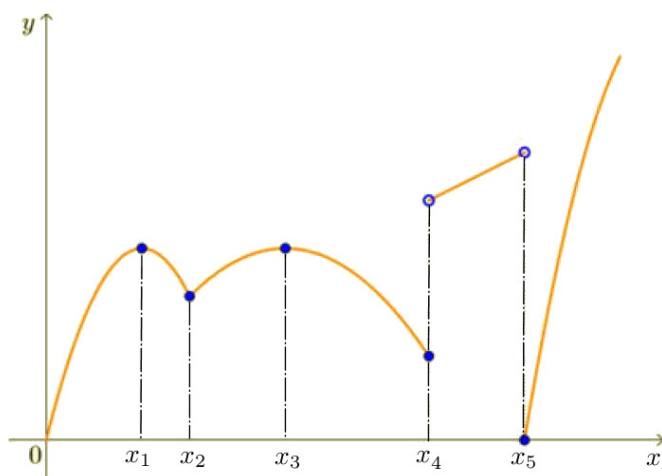
(ιγ) ΣΩΣΤΟ Σκεφθείτε την 'εξίσωση της εφαπτομένης' (και τη 'μοναδικότητα του ορίου')

Άσκηση 2

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να βάλετε σε κύκλο τη λανθασμένη πρόταση.

- (α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 .
- (β)** Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2 .
- (γ)** Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3 .
- (δ)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4 .
- (ε)** Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5 .



Σχήμα 10.18: Άσκηση 2

Λύση

Η λανθασμένη απάντηση είναι η **(δ)**. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x'_4 αφού η συνάρτηση δεν είναι καν συνεχής στο σημείο αυτό. Για τις υπόλοιπες προτάσεις:

- (α)** Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 και μάλιστα φαίνεται να είναι $f'(x_1) = 0$ (ύπαρξη οριζόντιας εφαπτομένης στο σημείο αυτό).
- (β)** Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2 αφού (φαίνεται) να σχηματίζει γωνιά (το x_2 είναι γωνιακό σημείο του γραφήματός της).
- (γ)** Η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη στο x_3 και μάλιστα φαίνεται να έχει οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο αυτό.
- (ε)** Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5 αφού δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Άσκηση 3

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες:

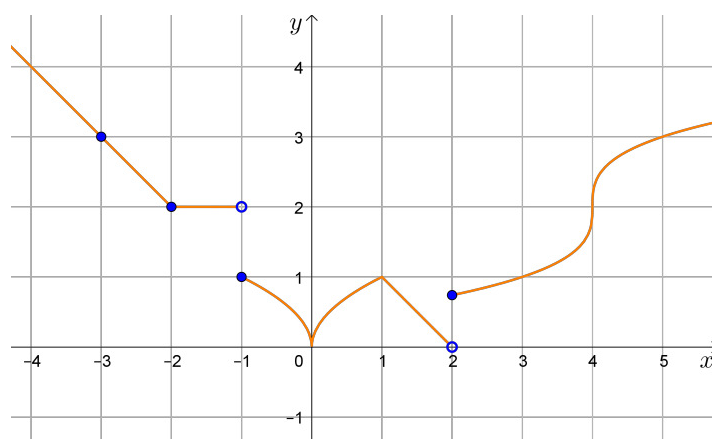
- (α)** η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη
- (β)** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δε δέχεται εφαπτομένη
- (γ)** η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

Λύση

Θα απαντήσουμε σε όλα τα ερωτήματα μεμιάς.

Στα σημεία με $x = -2$, $x = 0$, και $x = 1$ το γράφημα της f σχηματίζει **γωνίες**, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Ιδιαίτερα στο σημείο με $x = 0$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f **δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη**. Στα σημεία με $x = -1$ και $x = 2$, η συνάρτηση είναι ασυνεχής, άρα ούτε και παραγωγίσιμη. Τέλος, στο $x = 4$ έχουμε **κατακόρυφη εφαπτομένη**, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη.

Έπεται ότι στα σημεία x στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και δεν έχει κατακόρυφη εφαπτομένη (δηλ. στα σημεία με $x = \pm 1, \pm 2$), η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δε δέχεται



Σχήμα 10.19: Άσκηση 3

εφαπτομένη.

Άσκηση 4

(α) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 ;

(β) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \sin|x| - x$. Με τη βοήθεια του ορισμού, να βρείτε την παράγωγο της f στο σημείο $x_0 = 0$.

Λύση

(α) Η f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

(β) Κατ'αρχάς, το $x_0 = 0$ ανήκει στο π.ο. της f . Αφού $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, έχουμε

$$f(x) = x \sin|x| - x = \begin{cases} x \sin x - x, & x \geq 0 \\ x \sin(-x) - x, & x < 0. \end{cases}$$

Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο σημείο $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \sin x - x) = 0 \cdot \sin 0 - 0 = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \sin(-x) - x) = 0 \cdot \sin 0 - 0 = 0$$

και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

δηλ. η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$:

Διαφορετικά: η f είναι παντού συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο $x_0 = 0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x - x}{x}$$

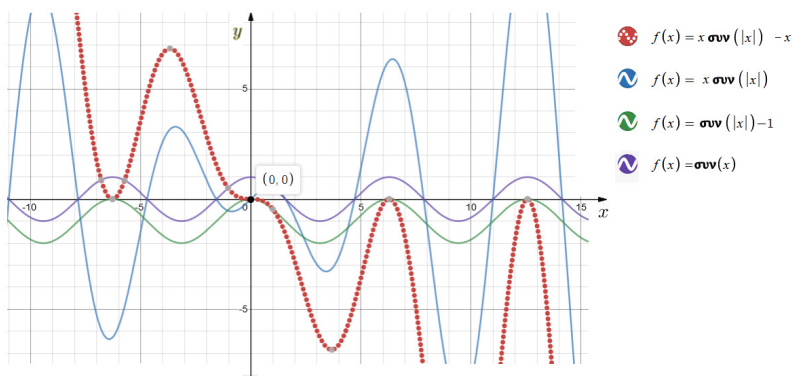
το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Αίρουμε την απροσδιοριστία :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\sin x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x - 1) = \sin 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι $f'_-(0) = 0$. Συνεπώς, $f'(0) = 0$.

Σημείωση :

1. Η μελέτη της ύπαρξης της παραγώγου $f'(0)$ μπορούσε να γίνει και χωρίς τη μελέτη (πρώτα) της συνέχειας της συνάρτησης στο σημείο αυτό (γιατί;)
2. Η χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f γίνεται με χρήση εργαλείων που θα μάθουμε στην επόμενη τάξη. Όμως, κάνοντας τις πιο κάτω παρατηρήσεις, μπορούμε να σκεφτούμε πως θα είναι η μορφή της:
Κατ'αρχάς, η συνάρτηση είναι περιττή (συμμετρική περί του άξονα των τετμημένων).
Ο πολλαπλασιασμός της συνάρτησης $x \mapsto \sin x$ με την συνάρτηση $x \mapsto x$ (δηλ. την ταυτοτική συνάρτηση) 'έλκει' το γράφημα της πρώτης προς τα πάνω. Ακολουθώντας, η αφαίρεση της ταυτοτικής συνάρτησης από τη συνάρτηση $x \mapsto x \cdot \sin x$ την 'σπρώχνει' προς τα κάτω.
Το ίδιο μπορούμε να το δούμε και ως εξής: η συνάρτηση $x \mapsto \sin x - 1$ είναι κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης $x \mapsto \sin x$ μια μονάδα προς τα κάτω, ενώ ο πολλαπλασιασμός της $x \mapsto \sin x - 1$ με την ταυτοτική συνάρτηση, την έλκει προς τα κάτω.



Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ xe^x, & x > 0. \end{cases}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Λύση

(α) Είναι

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} = e^0 = 1$$

(λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης στο $x_0 = 0$) και

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

(γνωστό όριο)

Άρα το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ υπάρχει και είναι ίσο με 1, δηλ. $f'(0) = 1$.

(β) Είναι $f(0) = 0$. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο με $x_0 = 0$ είναι η

$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0),$$

δηλ. η $y = x$.

Άσκηση 6

Αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 4$$

και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x - 1}$, $x \neq 1$. Τότε για $x \neq 1$ είναι $f(x) = (x - 1) \cdot g(x)$ και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \cdot g(x) = 0$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, έχουμε ότι $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και τα πιο πάνω δίνουν τελικά ότι $f(1) = 0$. Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 0}{x - 1} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 4,$$

δηλ. $f'(1) = 4$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + 2, & x < 1 \\ \beta\sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Λύση

Κατ'αρχάς, η f είναι καλά ορισμένη αφού για $x \geq 1$ έχουμε $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση στο σημείο $x_0 = 1$, πρέπει πρώτα να είναι συνεχής στο σημείο αυτό, δηλ. να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \beta\sqrt{1} = \beta.$$

Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &\iff \overbrace{\lim_{x \rightarrow 1^+} \beta\sqrt{x}}^{=f(1)=\beta} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - \alpha x + 2) \\ &\iff \beta = 3 - \alpha. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας, για την πιο πάνω σχέση που συνδέει τα α και β η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - \alpha x + 2 - \overbrace{\beta}^{=3-\alpha}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\beta\sqrt{x} - \beta}{x - 1} \\ \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1 - \alpha x + \alpha}{x - 1} &= \beta \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (\sqrt{x} + 1)} \\ \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1) - \alpha(x - 1)}{x - 1} &= \beta \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1 - \alpha)}{x - 1} &= \frac{\beta}{1 + 1} \iff \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1 - \alpha) = \frac{\beta}{2} \iff 2 - \alpha = \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

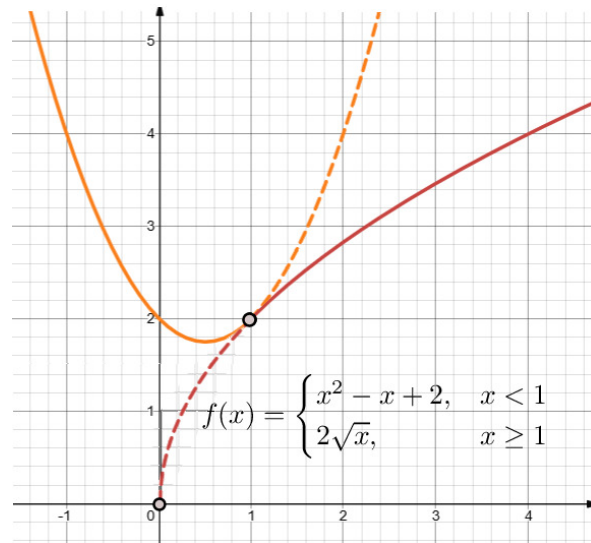
Άρα

$$\begin{cases} \beta = 3 - \alpha \\ 2 - \alpha = \frac{\beta}{2} \end{cases} \iff \alpha = 1, \quad \beta = 2$$

Για τα α και β αυτά, η συνάρτηση που προκύπτει είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

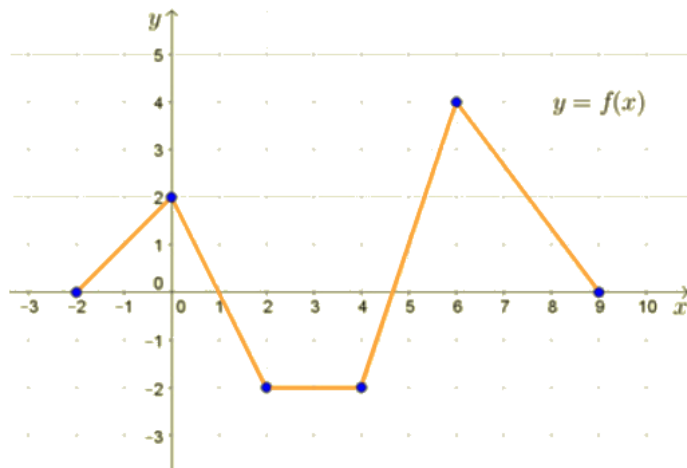
η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.



Σχήμα 10.20: Άσκηση 7.

Άσκηση 8

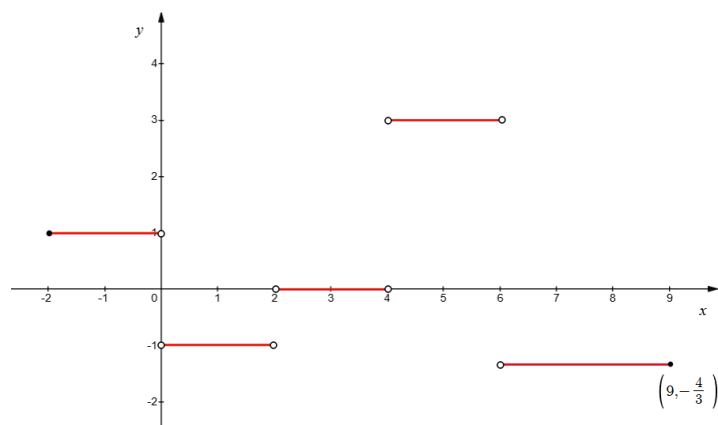
Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγό της, f' .



Σχήμα 10.21: Άσκηση 8.

Λύση

Εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κατα τμήματα ευθείες, η παράγωγός της στα αντίστοιχα τμήματα θα είναι σταθερά και ίση με την κλίση της αντίστοιχης ευθείας. Στα σημεία αλλαγής της κλίσης ($x = 0, 2, 4, 6$) η παράγωγος δεν ορίζεται:



Σχήμα 10.22: Άσκηση 8/Απάντηση.

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = xe^x$.

(α) Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f' και f''

(β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Λύση

(α) Είναι

$$f(x) = xe^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff f'(x) = (xe^x)', \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff f'(x) = (x)'e^x + x \cdot (e^x)', \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff f''(x) = (f'(x))' = [(1+x) \cdot e^x]', \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff f''(x) = (1+x)' \cdot e^x + (1+x) \cdot (e^x)'$$

$$\iff f''(x) = e^x + (1+x) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff f''(x) = (x+2) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και άρα

$$f''(x) = e^x + f'(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(β) Είναι⁵

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \alpha x e^x + \beta(x+1) \cdot e^x + \gamma(x+2) \cdot e^x = x e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x e^x + (\beta + 2\gamma) \cdot e^x = 1 \cdot x e^x + 0 \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \beta = -2\gamma, \quad \alpha = \gamma + 1$$

Άρα, έχουμε άπειρες λύσεις, της μορφής

$$\alpha = \gamma + 1, \quad \beta = -2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 10

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$

(β) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{8}{x^2} - \ln 3$

(γ) $f(x) = 3\sqrt{x} - \eta\mu x + 5\epsilon\mu x$

(δ) $f(x) = \sigma\upsilon\nu 5x - \ln 5x - e^5.$

(ε) $f(x) = (x+2) \ln x$

(στ) $f(x) = x^4 \epsilon\phi x$

(ζ) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

(η) $y = \frac{x\eta\mu x}{e^x + 1}$

(θ) $y = (6x^2 - 5)^{12}$

(ι) $y = \epsilon\phi(x^2) + \sigma\phi 2^x + \ln^3 x.$

(ια) $y = \ln(x^3 - 1)$

(ιβ) $y = \sqrt{\eta\mu^3 x}$

(ιγ) $y = \eta\mu(\sqrt{x+1})$

(ιδ) $y = \sigma\phi(\sigma\upsilon\nu x)$

(ιε) $y = e^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot 3^{7x}$

(ιοστ) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

(ιζ) $y = \frac{\ln \sqrt[3]{x^3 + 8}}{3}$

(ιη) $y = x^{e^x}, \quad x > 0$

Λύση

(α) Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως πολυωνυμική) με

$$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + x + 6)' = (x^3)' - 2(x^2)' + x' + 6' = 3x^2 - 4x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

⁵Η τρίτη ισοδυναμία έπεται λόγω της ισχύς της προηγούμενης για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό όμως είναι εκτός σχολικής ύλης και δικαιολογείται αυστηρά με το ότι το σύνολο $\{x, x \cdot e^x\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επί του $\mathbb{R}$

(β) Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^5}{5} - \frac{8}{x^2} - \ln 3 \right)' = \left(\frac{x^5}{5} \right)' - (8 \cdot x^{-2})' + (-\ln 3)' \\ &= \frac{5x^4}{5} - 8 \cdot \left(\frac{-2}{x^3} \right) = x^4 + \frac{16}{x^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}. \end{aligned}$$

(γ) Είναι $D(f) = (\mathbb{R} - \{k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}) \cap \{x > 0\} = (0, +\infty) - \{k\pi/2, k \in \mathbb{N}\} := A$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$f'(x) = (3\sqrt{x} - \eta\mu x + 5\tau\epsilon\mu x)' = 3(\sqrt{x})' - (\eta\mu x)' + 5(\tau\epsilon\mu x)' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \sigma\upsilon\nu x + 5\tau\epsilon\mu x \cdot \epsilon\phi x$$

$\forall x \in A$.

(δ) Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$f(x) = (\sigma\upsilon\nu 5x - \ln 5x - e^5)' = -5\eta\mu 5x - \frac{(5x)'}{5x} - 0 = -5\eta\mu 5x - \frac{1}{x}.$$

(ε) Είναι $D(f) = (0, +\infty)$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$f'(x) = [(x+2)\ln x]' = (x+2)' \cdot \ln x + (x+2) \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + (x+2) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 + \frac{2}{x}$$

$\forall x \in (0, +\infty)$.

(στ) Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} := A$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^4 \epsilon\phi x)' = (x^4)' \cdot \epsilon\phi x + x^4 \cdot (\epsilon\phi x)' \\ &= 4x^3 \cdot \epsilon\phi x + x^4 \cdot \tau\epsilon\mu^2 x = x^3(4\epsilon\phi x + x \cdot \tau\epsilon\mu^2 x) \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

(ζ)

Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+4} \right)' = \frac{(x)' \cdot (x^2+4) - x \cdot (x^2+4)'}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{x^2+4 - x \cdot (2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(η) Η συνάρτηση έχει π.ο. το $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{x\eta\mu x}{e^x + 1} \right)' = \frac{(x\eta\mu x)' \cdot (e^x + 1) - x\eta\mu x \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{[(x)' \cdot \eta\mu x + x \cdot (\eta\mu x)'] \cdot (e^x + 1) - x\eta\mu x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(\eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x) \cdot (e^x + 1) - x\eta\mu x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot \eta\mu x + \eta\mu x + x \cdot e^x \sigma\upsilon\nu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot e^x \cdot \eta\mu x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

(θ)

$$y' = [(6x^2 - 5)^{12}]' = 12(6x^2 - 5)^{11}(6x^2 - 5)' = 12 \cdot 12(6x^2 - 5)^{11} = 144(6x^2 - 5)^{11},$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

(ι)

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\epsilon\phi(x^2) + \sigma\phi 2^x + \ln^3 x)' \\ &= (x^2)' \epsilon\mu^2(x^2) + (2^x)'(-\sigma\epsilon\mu^2(x^2)\sigma\phi 2^x) + 3 \ln^2 x (\ln x)' \\ &= 2x\epsilon\mu^2(x^2) - 2^x \ln 2 \sigma\epsilon\mu^2 2^x \sigma\phi 2^x + \frac{3 \ln^2 x}{x}, \end{aligned}$$

για $x > 0$.

(ια) Είναι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) > 0\} = \{x > 1\} = (1, +\infty)$$

και η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$y'(x) = [\ln(x^3 - 1)]' = \frac{(x^3 - 1)'}{x^3 - 1} = \frac{3x^2}{x^3 - 1}, \quad \forall x \in (1, +\infty).$$

(ιβ) Είναι ⁶

$$D(f) = [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup [3\pi, 4\pi] \dots$$

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ με

$$y'(x) = \left((\eta\mu x)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} \cdot (\eta\mu x)' \cdot (\eta\mu x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot \sqrt{\eta\mu x}$$

⁶Θυμηθείτε τη γνωστή σύμβαση για τον ορισμό της ρητής δύναμης

$\forall x \in D(f)$.

(ιγ)

$$y'(x) = (\sqrt{x+1})' \operatorname{συν}(\sqrt{x+1}) = \frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}} \operatorname{συν}(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \operatorname{συν}(\sqrt{x+1}),$$

$x > -1$.

(ιδ) $y' = (\operatorname{συν}x)'(-\operatorname{στεμ}^2(\operatorname{συν}x)) = -\eta\mu x(-\operatorname{στεμ}^2(\operatorname{συν}x)) = \eta\mu x \cdot \operatorname{στεμ}^2(\operatorname{συν}x)$.

(ιε)

$$\begin{aligned} y'(x) &= (e^{\operatorname{συν}x} \cdot 3^{7x})' = (e^{\operatorname{συν}x})' \cdot 3^{7x} + e^{\operatorname{συν}x} \cdot (3^{7x})' \\ &= (\operatorname{συν}x)' e^{\operatorname{συν}x} \cdot 3^{7x} + e^{\operatorname{συν}x} \cdot (7x)' \ln 3 \cdot 3^{7x} \\ &= -\eta\mu x e^{\operatorname{συν}x} \cdot 3^{7x} + 7e^{\operatorname{συν}x} \ln 3 \cdot 3^{7x} \\ &= e^{\operatorname{συν}x} \cdot 3^{7x} (7 \ln 3 - \eta\mu x). \end{aligned}$$

(ιε) Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ και (πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με e^x)

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο π.ο. της με

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)' = \frac{(e^{2x} - 1)' \cdot (e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \cdot (e^{2x} + 1)'}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} \cdot (e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = 2e^{2x} \cdot \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(ιζ)

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{3} (\ln \sqrt[3]{x^3 + 8})' = \frac{1}{3} \cdot \frac{[(x^3 + 8)^{1/3}]'}{\sqrt[3]{x^3 + 8}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot (x^3 + 8)^{-2/3} \cdot (x^3 + 8)'}{\sqrt[3]{x^3 + 8}} \\ &= \frac{x^2}{3(x^3 + 8)^{2/3}(x^3 + 8)^{1/3}} \\ &= \frac{x^2}{3(x^3 + 8)}. \end{aligned}$$

(ιη) Έχουμε για κάθε $x > 0$ (λογαριθμική παράγωγος)

$$y(x) = x^{e^x} \iff \ln(y(x)) = \ln(x^{e^x}) \iff \ln(y(x)) = e^x \ln(x)$$

$$\iff \frac{d(\ln(y(x)))}{dx} = \frac{d(e^x \ln(x))}{dx}$$

$$\iff \frac{y'(x)}{y(x)} = (e^x \ln(x))' = (e^x)' \cdot \ln(x) + (e^x) \cdot (\ln(x))' = e^x \cdot \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\iff y'(x) = \underbrace{y(x)}_{=x^{e^x}} \cdot e^x \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right) = x^{e^x} \cdot e^x \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{x} \right)$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 11$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , η οποία να:

- (α) είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$.
- (β) είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2017$.
- (γ) είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$.
- (δ) έχει σημείο επαφής το σημείο $A(6, -2)$.

Λύση

Είναι

$$f'(x) = 2(x - 2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ακόμα ότι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 4x + 11 = (x - 2)^2 + 7$$

δηλ. η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2, 7)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) μέγιστο.

(α) Είναι

$$f'(x) = 0 \iff 2(x - 2) = 0 \iff x = 2$$

Επίσης, $f(2) = 7$. Άρα, η εξίσωση της ευθείας η οποία είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων είναι η $y = 7$.

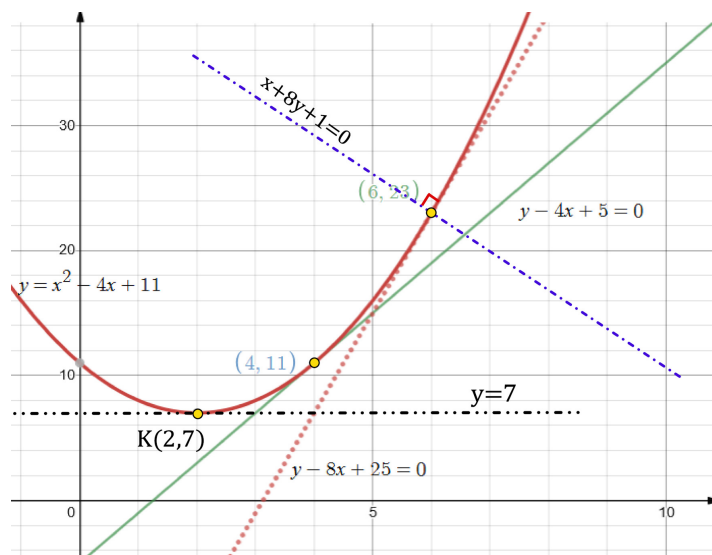
(β) Η κλίση της ευθείας με την οποία ζητούμε να είναι παράλληλη η εφαπτομένη είναι $\lambda = 4$. Έτσι, οι κλίσεις είναι ίσες στα σημεία $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x) = 4$, δηλ. στο $x = 4$. Είναι $f(4) = 11$. Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2017$ είναι η $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4)$, δηλ. η $y - 11 = 4(x - 4)$, δηλ. η (εφ.): $y - 4x + 5 = 0$

(γ) Η ευθεία με εξίσωση $x + 8y + 1 = 0$ έχει κλίση $\lambda = -1/8$. Έτσι, μια ευθεία η οποία είναι κάθετη στην ευθεία αυτή και εφάπτεται του γραφήματος της f , θα έχει κλίση αντιθετοαντίστροφη της κλίσης της πιο πάνω ευθείας. Συνεπώς,

$$f'(x) = 8 \iff x = 6.$$

Είναι $f(6) = 23$. Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f η οποία είναι κάθετη με την ευθεία με εξίσωση $x+8y+1=0$ είναι η $y-f(6) = f'(6) \cdot (x-6)$, δηλ. η $y-23 = 8(x-6)$, δηλ. η (εφ.): $y-8x+25=0$

(8) Το σημείο $A(6, -2)$ ΔΕΝ ανήκει στο γράφημα της f .



Σχήμα 10.23: Άσκηση 11.

Άσκηση 12

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x \ln x - \alpha x, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

στο σημείο της $A(1, f(1))$, διέρχεται από σταθερό σημείο για κάθε τιμή του α .

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε τιμή της παραμέτρου α με

$$f'(x) = \ln x + 1 - \alpha, \quad \forall x > 0.$$

Η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ έχει κλίση $\lambda = f'(1) = 1 - \alpha$. Επίσης, $f(1) = -\alpha$. Συνεπώς, η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, δηλ. η $y + \alpha = (\alpha - 1)(x - 1)$, δηλ. η $y + (1 - \alpha)x + 1 = 0$

Η ευθεία αυτή περνά από το σημείο $(0, -1)$ για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου α .

Άσκηση 13

Δίνονται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ και η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει η σχέση

$$g^2(x) + (g'(x))^2 = 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και αν $M(\alpha, \beta)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h , όπου $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

(α) $g'(\alpha) = 1$ και $g(\alpha) + g''(\alpha) = 0$.

(β) $g(\alpha) = 0$.

Λύση

(α) Είναι $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ και άρα $f(\alpha) \neq 0$. Τώρα,

$$f(\alpha) = h(\alpha) \iff f(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha) \iff (1 - g'(\alpha)) \cdot f(\alpha) = 0 \xrightarrow{f(\alpha) \neq 0} 1 - g'(\alpha) = 0 \iff g'(\alpha) = 1$$

Τώρα, $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$g^2(x) + [g'(x)]^2 = 1 \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} 2g(x) \cdot g'(x) + 2g'(x) \cdot g''(x) = 0$$

$$\iff 2g'(x) \cdot [g(x) + g''(x)] = 0$$

$$\iff g'(x) \cdot [g(x) + g''(x)] = 0$$

και για $x = \alpha$ έχουμε

$$g'(\alpha) \cdot [g(\alpha) + g''(\alpha)] = 0,$$

δηλ. (αφού $g'(\alpha) = 1$),

$$g(\alpha) + g''(\alpha) = 0$$

(β) Είναι

$$g^2(x) + [g'(x)]^2 = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff g^2(\alpha) + \underbrace{[g'(\alpha)]^2}_{=1} = 1 \iff g^2(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) = 0.$$

Άσκηση 14

Το ύψος (x) της στάθμης του νερού σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης 2 cm ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi \text{ cm/sec}$.

(α) Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει τον όγκο (V) του νερού με το ύψος της στάθμης του (x) .

(β) Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος του νερού μέσα στο κυλινδρικό δοχείο.

Λύση

(α) Έστω

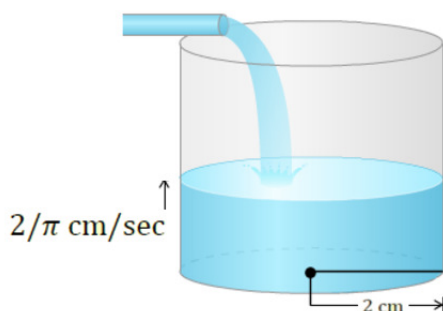
$$V : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad t \rightarrow V(t) = \pi R^2 \cdot x(t)$$

η συνάρτηση που δίνει τον όγκο του νερού σε κυλινδρικό δοχείο με ακτίνα βάσης $R\text{ cm}$ και ύψος στάθμης $x(t)$. Αφού $R = 2\text{ cm}$ έπεται ότι $V(t) = 4\pi \cdot x(t)$, $t > 0$.

(β) Το ύψος της στάθμης του νερού ανεβαίνει με ρυθμό $2/\pi\text{ cm/sec}$, δηλ. $x'(t) = 2/\pi\text{ cm/sec}$, $\forall t > 0$.

Έτσι, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$V'(t) = 4\pi \cdot x'(t) = 8 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$$



Σχήμα 10.24: Άσκηση 14.

Άσκηση 15

Σε ένα ισοπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ η περίμετρος αυξάνεται με ρυθμό 3 m/sec . Να βρείτε:

(α) τον ρυθμό μεταβολής της πλευράς του τριγώνου.

(β) τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου, όταν αυτό είναι ίσο με $\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

Λύση

Έστω

$$\Pi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad x \mapsto \Pi(x) = 3x$$

η συνάρτηση που δίνει την περίμετρο του ισοπλεύρου τριγώνου.

(α) Από τα δεδομένα της άσκησης, είναι $\Pi'(x) = 3\text{ cm/sec}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Αν α δηλώνει το (μεταβαλλόμενο) μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου, τότε αυτό είναι συνάρτηση του χρόνου, δηλ. $t \mapsto \alpha(t)$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(\Pi \circ \alpha)'(x) = \Pi'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 3\alpha'(t), \forall t \in (0, +\infty)$$

Έτσι,

$$\Pi'(t) = 3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \forall t \in (0, +\infty) \iff 3\alpha'(t) = 3, \forall t \in (0, +\infty) \iff \alpha'(t) = 1, \forall t \in (0, +\infty)$$

(β) Η συνάρτηση E που δίνει το εμβαδόν είναι η

$$E : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad t \mapsto E(t) = \frac{\alpha^2(t) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2(t)\sqrt{3}}{4}$$

Αν τη χρονική στιγμή $t = t_0$ το εμβαδόν $E(t_0)$ είναι ίσο με $\sqrt{3} \text{ cm}^2$, τότε

$$\sqrt{3} = \frac{\alpha^2(t_0)\sqrt{3}}{4} \iff \alpha(t_0) = 2 \text{ cm},$$

αφού $\alpha(t) > 0, \forall t > 0$. Συνεπώς, ο ρυθμός μεταβολής είναι

$$E'(t_0) = \frac{2\alpha(t_0) \cdot \alpha'(t_0)}{2} = \sqrt{3} \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}.$$

Άσκηση 16

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που ορίζονται από τις πιο κάτω:

(α) $x^2 + y^2 = 9$

(β) $x^3 - xy + y^2 = 7$

(γ) $x^3y^3 - y = x$

(δ) $\sqrt{xy} = x^2y + 1$

(ε) $y = \eta\mu(xy)$

(στ) $(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y))^2 = 2$

Λύση (α)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 9 &\iff \frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d(9)}{dx} \\ &\iff \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0 \\ &\iff 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\iff \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0) \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} x^3 - xy + y^2 = 7 &\iff \frac{d(x^3 - xy + y^2)}{dx} = \frac{d(7)}{dx} \\ &\iff \frac{d(x^3)}{dx} - \frac{d(xy)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 0 \\ &\iff 3x^2 - \left(x' \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\iff 3x^2 - y - x \cdot \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \\ &\iff (2y - x) \cdot \frac{dy}{dx} = y - 3x^2 \\ &\iff \frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{2y - x} \quad \left(y \neq \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

(γ)

$$x^3y^3 - y = x \iff \frac{d(x^3y^3 - y)}{dx} = \frac{d(x)}{dx}$$

$$\iff \frac{d(x^3y^3)}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\iff 3x^2y^3 + 3x^3y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\iff (3x^3y^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2y^3$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 3x^2y^3}{3x^3y^2 - 1}$$

(δ)

$$\sqrt{xy} = x^2y + 1 \iff \frac{d(\sqrt{xy})}{dx} = \frac{d(x^2y + 1)}{dx}$$

$$\iff \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 2xy + x^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{4xy\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{y}}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{4x\sqrt{xy} - 1}{1 - 2x\sqrt{xy}}$$

(ε)

$$y = \eta\mu(xy) \iff \frac{dy}{dx} = \frac{d(xy)}{dx} \cdot \sigma\upsilon\nu(xy)$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = y\sigma\upsilon\nu(xy) \frac{dy}{dx} + x \cdot \sigma\upsilon\nu(xy)$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{y \cdot \sigma\upsilon\nu(xy)}{1 - x \cdot \sigma\upsilon\nu(xy)}$$

(στ)

$$(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y))^2 = 2$$

$$\iff 2(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y)) \cdot \frac{d(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y))}{dy} = 0$$

$$\iff 2(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y)) \cdot \left(\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x) - \pi \cdot \eta\mu(\pi y) \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y)) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi x)}{(\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu(\pi y)) \cdot \eta\mu(\pi y)}$$

$$\iff \frac{dy}{dx} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi x)}{\eta\mu(\pi y)}$$

Άσκηση 17

Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = a + \sigma\upsilon\nu(\pi x)$ και $g(x) = x^2 + 3\beta x + 1$, αντίστοιχα, να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0 = 1$.

Λύση Είναι κατ' αρχάς,

$$f(1) = a + \sin(\pi) = a - 1$$

και

$$g(1) = 1 + 3\beta + 1 = 2 + 3\beta.$$

Τότε

$$f(1) = g(1) \Leftrightarrow a - 1 = 2 + 3\beta \Leftrightarrow a = 3 + 3\beta.$$

Επίσης,

$$f'(x) = -\pi \eta \mu(\pi x) \Rightarrow f'(1) = -\pi \eta \mu(\pi) = 0$$

και

$$g'(x) = 2x + 3\beta \Rightarrow g'(1) = 2 + 3\beta.$$

Τότε (πρέπει οι κλίσεις των εφαπτομένων στο εν λόγω σημείο να ισούνται)

$$f'(1) = g'(1) \Leftrightarrow 2 + 3\beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{2}{3}}.$$

Αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην $a = 3 + 3\beta$ και βρίσκουμε $\boxed{a = 1}$.

Άσκηση 18

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, ώστε :

$$f(x) + f(-x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $f''(0) = 1$.

Λύση Παραγωγίζουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας) και τα δύο μέλη της $f(x) + f(-x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) + (-x)' f'(-x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) - f'(-x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ξαναπαραγωγίζουμε :

$$f''(x) - (-x)' f''(-x) = 2 \Leftrightarrow f''(x) + f''(-x) = 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αντικαθιστούμε $x = 0$:

$$f''(0) + f''(0) = 2 \Rightarrow 2f''(0) = 2 \Rightarrow f''(0) = 1.$$

Άσκηση 19

Να δείξετε ότι η κάθετη ευθεία της καμπύλης με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$ σε οποιοδήποτε σημείο της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση Έχουμε

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας του γραφήματος της πιο πάνω καμπύλης σε τυχαίο σημείο $A(\alpha, \beta)$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$ είναι

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(\alpha, \beta)} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

και άρα (κατά τα γνωστά) η κλίση της καθέτου στο σημείο αυτό είναι $\frac{\beta}{\alpha}$. Έτσι, η εξίσωση της καθέτου είναι

$$y - \beta = \frac{\beta}{\alpha} \cdot (x - \alpha), \quad \text{δηλ. η} \quad y = \frac{\beta}{\alpha}x$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Αν $\alpha = 0$, τότε $A(\alpha, \beta) \equiv A(0, \beta)$ και άρα η κλίση της καθέτου δεν ορίζεται, δηλ. η κάθετη είναι ο άξονας των τεταγμένων.

Αν $\beta = 0$, τότε $A(\alpha, \beta) \equiv A(\alpha, 0)$ και άρα η κλίση της καθέτου είναι 0, δηλ. η κάθετη είναι ο άξονας των τεταγμένων.

Άσκηση 20

Να βρείτε τις συνεταγμένες των σημείων της καμπύλης με εξίσωση $y^4 = y^2 - x^2$, στα οποία η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια.

Λύση Είναι

$$y^4 = y^2 - x^2 \xrightarrow{\text{παραγωγίζω}} 4y^3 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} - 2x \iff \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y(1 - 2y^2)}$$

για $y \neq 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Αν $A(\alpha, \beta)$ είναι σημείο του γραφήματος της καμπύλης που καθορίζεται από την πιο πάνω καμπύλη στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι 0, τότε

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{A(\alpha, \beta)} = 0 \iff \frac{\alpha}{\beta(1 - 2\beta^2)} = 0 \iff \alpha = 0.$$

και αφού $\beta \neq 0$,

$$\beta(1 - 2\beta^2) \neq 0 \iff \beta \neq \pm 1.$$

Έτσι, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0, 1)$ και $(0, -1)$.

Άσκηση 21

Αν

$$e^{5y} = e^x + e^{-x},$$

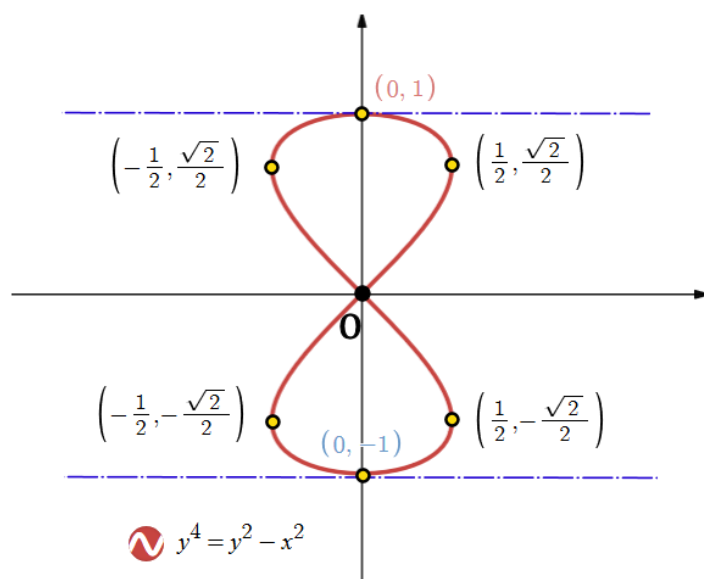
να δείξετε ότι

$$5 \frac{d^2y}{dx^2} + 25 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 = 0.$$

Λύση

Παραγωγίζω πεπλεγμένα την δοθείσα εξίσωση:

$$5 \frac{dy}{dx} e^{5y} = e^x - e^{-x}.$$



Σχήμα 10.25: Άσκηση 20

Παραγωγίζω ξανά πεπλεγμένα την εξίσωση που βρήκα :

$$5 \frac{d^2 y}{dx^2} e^{5y} + 5 \cdot 5 \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} e^{5y} = e^x + e^{-x},$$

δηλαδή

$$e^{5y} \left(5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 25 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = \underbrace{e^x + e^{-x}}_{=e^{5y}},$$

δηλαδή

$$e^{5y} \left(5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 25 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) = e^{5y}$$

και διαιρώντας με το $e^{5y} \neq 0$,

$$5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 25 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1,$$

δηλαδή

$$5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 25 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 1 = 0.$$

Άσκηση 22

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπύλων :

$$(α) \begin{cases} x = \sin t \\ y = \eta \mu t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \quad (β) \begin{cases} x = t^2 \\ y = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

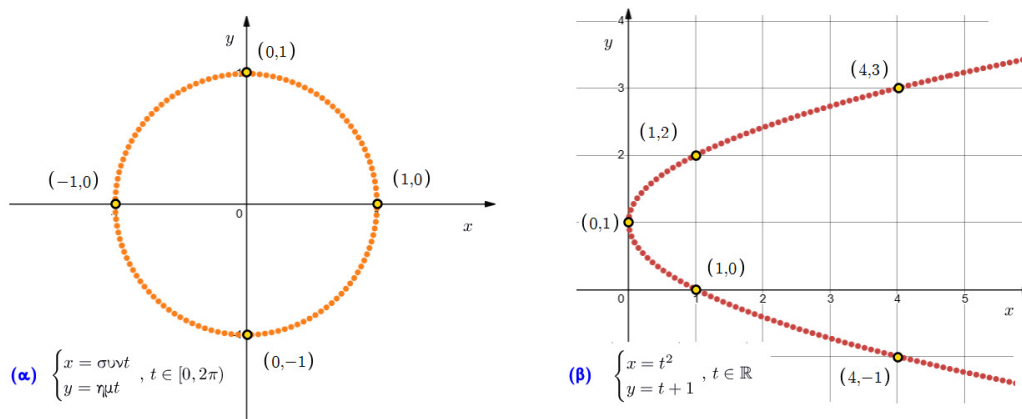
Λύση (α) Βάζοντας τιμές στην παράμετρο t βρίσκουμε ότι η τροχιά της καμπύλης είναι κύκλος με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνας $r = 1$. Ας βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης:

$$\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu t \\ y = \eta\mu t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \iff \begin{cases} x^2 = \sigma\upsilon\nu^2 t \\ y = \eta\mu^2 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \iff x^2 + y^2 = 1$$

(β) Αφού $t \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $(t+1) \in \mathbb{R}$ και $t^2 \in [0, +\infty)$. Έτσι, το Π.Ο. της είναι το $[0, +\infty)$ και το Σ.Τ. της το $\mathbb{R}$. Είναι $y(t) = t+1 \Rightarrow y-1 = t$ και αρα $x(t) = t^2 = (y(t)-1)^2$. Έτσι η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης είναι η

$$(y-1)^2 = x \quad (y \in \mathbb{R})$$

Αρχικό σημείο το $(x(0), y(0)) = (0, 1)$.



Σχήμα 10.26: Άσκηση 22

Άσκηση 23

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}, t \neq \frac{1}{2}$$

Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Λύση Είναι $\forall t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$,

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

και άρα για $\forall t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, η dx/dt ορίζεται και δεν είναι =0 και άρα

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dots = \frac{2(3t^2 + 3t + 1)}{(1 - 2t)^3}$$

Τώρα,

$$x(t) = 0 \iff \frac{2+t}{1+2t} = 0 \iff t = -2$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0} = \frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=-2} = \frac{9}{4}.$$

Άσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική. Είναι αντιστρέψιμη ως 1-1 αλλά και επί του συνόλου $(2, +\infty)$ (δες θεωρία και παραδείγματα). Τώρα,

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \iff (x-5)(x+1) = 0, x \in (2, +\infty) \iff x = 5.$$

Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{6}$$

αφού $f'(x) = 2(x-2), \forall x > 2 \Rightarrow f'(5) = 6$.

Άσκηση 24

Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(α) Να δείξετε ότι το ίχνος της καμπύλης δε δέχεται κατακόρυφες εφαπτομένες.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης, στα οποία δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

(γ) Να δείξετε ότι:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{9}y = 0.$$

Λύση

(α) Έχουμε για κάθε $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{dx}{dt} = 3e^{3t} \neq 0$$

και άρα το ίχνος της καμπύλης δε δέχεται κατακόρυφες εφαπτομένες.

(β) Έχουμε για κάθε $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{dy}{dt} = -\eta\mu t$$

και άρα

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu t = 0 \Leftrightarrow t = 0,$$

στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι

$$x(0) = e^0 = 1, \quad y(0) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

και συνεπώς το σημείο στο οποίο η καμπύλη δέχεται οριζόντια εφαπτομένη είναι το $A(0, 1)$.

(γ) Είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\eta\mu t}{3e^{3t}}$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

Είναι

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-\sigma\upsilon\nu t 3e^{3t} + \eta\mu t 9e^{3t}}{9(e^{3t})^2} = \frac{3\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t}{3e^{3t}}$$

και άρα

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t}{9(e^{3t})^2}.$$

Συνεπώς,

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{9}y = \frac{3\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t}{9} - \frac{\eta\mu t}{3} + \frac{\sigma\upsilon\nu t}{9} = 0.$$

Άσκηση 25

Δίνεται η συνάρτηση $f : (2, +\infty) \rightarrow (-9, +\infty)$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x - 5$. Να βρείτε την τιμή $(f^{-1})'(0)$.

Λύση

Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως πολυωνυμική. Είναι αντιστρέψιμη ως 1-1 αλλά και επί του συνόλου $(-9, +\infty)$ (δες θεωρία και παραδείγματα). Τώρα,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) = 0, \quad x \in (2, +\infty) \Leftrightarrow x = 5.$$

Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{6}$$

αφού $f'(x) = 2(x - 2), \forall x > 2 \Rightarrow f'(5) = 6$.

Άσκηση 26

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$, η οποία αντιστρέφεται. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0, 0)$ και η κλίση της στο A ισούται με 2, να βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} για $x = 0$.

Λύση

Είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$. Πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος παραγωγίσιμης αντίστροφης συνάρτησης:

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 27

Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $a \in \mathbb{R}$ με $f'(a) = 1 + a$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θα την αναγάγουμε σε συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy⁷ Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow$

7

Ορισμός 10.11.1. Συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy λέγεται κάθε συναρτησιακή εξίσωση η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (10.4)$$

Κάθε συνάρτηση η οποία αποτελεί λύση της (10.4) (ισοδύναμα της $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$) λέγεται **προσθετική συνάρτηση**.

Αποδεικνύουμε μερικά στοιχεία των συναρτησιακών εξισώσεων τύπου Cauchy, τα οποία εμπίπτουν στην ύλη της Β Λυκείου:

(1) Όλες οι συναρτησιακές εξισώσεις τύπου Cauchy στο πεδίο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ακριβώς οι γραμμικές συναρτήσεις της μορφής $f(q) = c \cdot q$.

Απόδειξη. Για $x = 0$, η συνθήκη της υπόθεσης δίνει (για σταθεροποιημένο $y \in \mathbb{Q}$) $f(0+y) = f(0) + f(y)$, δηλ. $f(0) = 0$.

1η περίπτωση: Αν $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, δηλ. $q = m/n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά (επαγωγικά) την υπόθεση, έχουμε για $x \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} f(nx) &= f(x + (x + \dots + x)) = f(x) + f(x + (x + \dots + x)) \\ &= f(x) + f(x) + f(x + \dots + x) = \dots = f(x) + f(x) + \dots + f(x) = n \cdot f(x) \quad (*) \end{aligned}$$

Θέτοντας $y = x/n \Leftrightarrow ny = x$, το πιο πάνω δίνει $nf(y/n) = f(y)$ και πολλαπλασιάζοντας αμφότερα μέλη με m/n έχουμε

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{m}{n} f(y) \stackrel{(*)}{=} f\left(\frac{m}{n} y\right)$$

δηλ. $f(qy) = qf(y)$, $\forall y \in \mathbb{Q}$. Για $x = 1$, η τελευταία δίνει $f(q) = q \cdot f(1)$, δηλ. $f(q) = c \cdot q$, όπου $c = f(1) \in \mathbb{Q}$ σταθερά.

Αν $q \in \mathbb{Q}$ με $q < 0$, τότε το αποτέλεσμα έπεται από το προηγούμενο βήμα και το ότι $f(0) = 0$:

για $y = -x$, η συναρτησιακή εξίσωση δίνει $f(0) = f(-x) + f(x)$, δηλ. $f(-x) = -f(x)$ και αρα, αφού $(-q) \in \mathbb{Q}$, $(-q) > 0$, έπεται ότι

$$f(q) = -f(-q) = -(c \cdot (-q)) = c \cdot q.$$

□

(2) Δεν ισχύει πάντα ότι η συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy (όπου $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) είναι της μορφής $f(x) = c \cdot x$. Σε ειδικές όμως περιπτώσεις, αυτό όμως ισχύει. Μια από αυτές είναι και η (επιπλέον) υπόθεση η f να είναι συνεχής σε ένα σημείο (Darboux-1875):

• **Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι παντού συνεχής:**

Πράγματι, λόγω της συνέχειας της f στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (10.5)$$

Έστω $y \in \mathbb{R}$, $y \neq x_0$. Τότε η σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ δίνει

$$\begin{aligned} f(x-x_0+y) &= f((x-x_0)+y) = f(x-x_0) + f(y) \\ &= f(x) + f(-x_0) + f(y) = f(x) - f(x_0) + f(y) \end{aligned}$$

και αρα

$$f(x-y+x_0) - f(x_0) = f(x) - f(y).$$

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x-x_0+y) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0) + f(y)] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) + f(y) \\ &= f(x_0) - f(x_0) + f(y) = f(y) \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$

Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(x+y) &= f(x+y) - \frac{(x+y)^2}{2} = f(x) + f(y) + xy - \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) \\ &= \left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right) + \left(f(y) - \frac{y^2}{2}\right) = g(x) + g(y) \end{aligned}$$

και αρα η g είναι μια συναρτησιακή εξίσωση τύπου Cauchy. Έτσι, αφού είναι παραγωγίσιμη στο a θα είναι και συνεχής εκεί (Θεωρία από την επόμενη παράγραφο) και αρα (αποδεικνύεται) θα είναι παντού συνεχής στο π.ο. της. Έτσι, (αποδεικνύεται) ότι $g(x) = c \cdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, δηλ.

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + c \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι, η f είναι παραγωγίσιμη (στο $\mathbb{R}$) με

$$f'(x) = c + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Αλλά, $f'(a) = 1 + a$ και αρα $c = 1$. Έτσι,

$$f'(x) = 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση: Αν θέλαμε να κάνουμε την άσκηση πιο εύκολη (για μαθητές Β Λυκείου) μπορούμε π.χ. να βάλουμε ισχυρότερες συνθήκες για την f . Για παράδειγμα,

► **Παράδειγμα 10.11.1.** Μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$, να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Ας παρατηρήσουμε καταρχάς ότι $f(0) = 0$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1$$

και αρα συνεχής στο $x = y$.

• **Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε η f είναι της μορφής $f(x) = c \cdot x$ για κάποια πραγματική σταθερά c .**

Έπεται από τα προηγούμενα με ένα από επιχείρημα συνέχειας (λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς):

Έστω $x \in \mathbb{R}$ τυχόν. Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, θα υπάρχει μια ακολουθία $(q_n)_n$ ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \rightarrow x$. Τότε,

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n\right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) \stackrel{q_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1) \cdot q_n) = \underbrace{f(1)}_{\equiv c} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (q_n) = c \cdot x.$$

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + xh - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + xh}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h}}_{=f'(0)=1} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{xh}{h} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0} x = 1 + x \end{aligned}$$

και αρα η παράγωγος συνάρτηση f' της f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα

$$f'(x) = 1 + x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

10.12 Δραστηριότητες εμπλουτισμού

Δραστηριότητες σελ. 145-146 (εμπλουτισμού)

Άσκηση 1

Η μια διάσταση (x) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου αυξάνεται με ρυθμό $3m/sec$ και η άλλη (y) μειώνεται με ρυθμό $2m/sec$. Όταν $x = 24m$ και $y = 10m$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής:

(α) του εμβαδού του (β) της περιμέτρου του (γ) του μήκους της διαγωνίου του.

Λύση

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $t \mapsto x(t)$ και $t \mapsto y(t)$ οι οποίες αντιστοιχούν στις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η διάσταση x αυξάνεται με (σταθερό) ρυθμό $3m/sec$ έχουμε ότι $dx/dt = x'(t) = 3m/sec$ και αφού η διάσταση y μειώνεται με (σταθερό) ρυθμό $2m/sec$ έχουμε ότι $dy/dt = y'(t) = -2m/sec$. Η δε συνάρτηση E που δίνει το εμβαδόν είναι η

$$E : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad E(t) = (x \cdot y)(t) = x(t) \cdot y(t)$$

Είναι παραγωγίσιμη (ως γινόμενο τέτοιων) με

$$E'(t) = x'(t) \cdot y(t) + x(t) \cdot y'(t).$$

Επίσης, η συνάρτηση Π που δίνει την περίμετρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι η

$$\Pi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \Pi(t) = (2(x + y))(t) = 2x(t) + 2y(t).$$

Είναι παραγωγίσιμη (ως άθροισμα τέτοιων) με

$$\Pi'(t) = 2(x'(t) + y'(t)), \quad \forall x > 0.$$

Τέλος, η συνάρτηση δ που δίνει το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι η

$$\delta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad \delta(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

Είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του π.ο. της (δηλ. στο $(0, +\infty)$) (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\delta'(t) = \frac{2(x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t))}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Αν για μια χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 24m$ και $y(t_0) = 10m$, τότε

(α)

$$E'(t_0) = x'(t_0) \cdot y(t_0) + x(t_0) \cdot y'(t_0) = 3 \cdot 10 + 24 \cdot (-2) = -18 \text{ m}^2/sec$$

(β)

$$\Pi'(t_0) = 2(x'(t_0) + y'(t_0)) = 2 \cdot (3 - 2) = 2 \text{ m/sec}$$

(γ)

$$\delta'(t_0) = \frac{x(t_0) \cdot x'(t_0) + y(t_0) \cdot y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{24 \cdot 3 + 10 \cdot (-2)}{\sqrt{(24)^2 + (10)^2}} = \frac{52}{26} \text{ m/sec} = 2 \text{ m/sec}.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + f(x^2) = 3 \ln x + 4$, $x > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Λύση

[Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη]

Για $x = 1$, η υπόθεση για την f δίνει $f(1) + f(1^2) = 4$ και άρα $f(1) = 2$. Αφού συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$, παραγωγίζοντας αμφότερα μέλη της $f(x) + f(x^2) = 3 \ln x + 4$ έχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f'(x) + (x^2)' \cdot f'(x^2) = \frac{3}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Έτσι, η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1)) = A(1, 2)$ είναι η $y - 2 = x - 1$, δηλ. η $y = x + 1$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι $f'(x) + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Καταρχάς, η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη, αφού $e^{2x} + 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης, είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1)2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) + f^2(x) &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} + \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} + \frac{(e^{2x} - 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} + \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2} = 1. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, είναι $f^{(\nu)}(x) = (x + \nu) \cdot e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Με επαγωγή στο $\nu \in \mathbb{N}$.

Ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ του οποίου θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αλήθειας είναι το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι ο

$$P(\nu) : f^{(\nu)}(x) = (x + \nu) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Βήμα 1: Για $\nu = 1$, είναι

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλ. ο $P(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N}$ με $k > 1$, δηλ. ότι ο $P(k)$ είναι αληθής, δηλ. ότι η $f^{(k-1)}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f^{(k)}(x) = (x + k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{ε.υ.})$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = k + 1$, δηλ. ότι ο $P(k + 1)$ είναι αληθής, δηλ. ότι η $f^{(k)}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f^{(k+1)}(x) = (x + k + 1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Από την επαγωγική υπόθεση (ε.υ.), έχουμε ότι η k -παράγωγος συνάρτηση της f υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\begin{aligned} (f^{(k)}(x))' &= (x + k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = (x + k)' \cdot e^x + (x + k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f^{(k+1)}(x) = e^x + (x + k) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f^{(k+1)}(x) = (x + k + 1) \cdot e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

και αρα το ζητούμενο ισχύει.

Βήμα 3: Από την **Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής**, το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, δηλ. ο προτασιακός τύπος $P(\nu)$ έχει σύνολο αλήθειας το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Άσκηση 5

Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$f(x^3) = 5x^4, \quad x \in \mathbb{R},$$

να υπολογίσετε το $f''(27)$.

Λύση

Έχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f(x^3) = 5x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^3)' \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

δηλ. $3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Έχουμε (χρησιμοποιώντας ξανά τον κανόνα της αλυσίδας)

$$3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (3x^2)' \cdot f'(x^3) + 3x^2 \cdot (x^3)' \cdot f''(x^3) = 60x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$6x \cdot f'(x^3) + 9x^4 \cdot f''(x^3) = 60x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (10.6)$$

Επιλύουμε κατά τα γνωστά την εξίσωση $x^3 = 27$: έχει μοναδική λύση, την $x = 3$. Επίσης, αφού $3x^2 \cdot f'(x^3) = 20 \cdot x^3$, για $x = 3$, έχουμε $3 \cdot 3^2 \cdot f'(3^3) = 20 \cdot 3^3$, δηλ. $27f'(27) = 20 \cdot 3^3$, δηλ. $f'(27) = 20$. Έτσι, από την (10.6) για $x = 3$ έχουμε $6 \cdot 3 \cdot f'(3^3) + 9 \cdot 3^4 \cdot f''(3^3) = 60 \cdot 3^2$, δηλ. $2 \cdot 20 + 81 \cdot f''(27) = 60$, δηλ.

$$f''(27) = \frac{20}{81}.$$

Άσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ είναι οριζόντια.
- (β) Να υπολογίσετε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_1 = 3$.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(3, f(3))$.
- (δ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(3, 1)$ έχει κλίση ίση με $\frac{4}{9}$.

Λύση

(α) Έχουμε (με χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$f(x^2 + x + 1) = x^3, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x^2 + x + 1)' \cdot f'(x^2 + x + 1) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$(2x + 1) \cdot f'(x^2 + x + 1) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (10.7)$$

και για $x = 0$, η σχέση αυτή δίνει $f'(1) = 0$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $x = 1$ είναι οριζόντια (παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων).

(β) Για $x = 1$, η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος δίνει $(2 \cdot 1 + 1) \cdot f'(1^2 + 1 + 1) = 3 \cdot 1^2$, δηλ. $f'(3) = 1$. Έτσι, η κλίση της εφαπτομένης του γραφήματος της f στο σημείο $x_1 = 3$ είναι ίση με 1.

(γ) Θέτοντας $x = 1$ στη σχέση που ικανοποιεί η f , έχουμε $f(3) = 1^3 = 1$ και επίσης, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f'(3) = 1$. Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, 1)$ είναι η $y - 1 = f'(3) \cdot (x - 3)$, δηλ. η

$$y = x - 2.$$

(δ) Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη της (10.7) (και κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας)

$$(2x + 1)' \cdot f'(x^2 + x + 1) + (2x + 1) \cdot (x^2 + x + 1)' \cdot f''(x^2 + x + 1) = 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

δηλ.

$$2 \cdot f'(x^2 + x + 1) + (2x + 1)^2 f''(x^2 + x + 1) = 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 1$, η σχέση αυτή δίνει

$$2 \cdot f'(1^2 + 1 + 1) + (2 \cdot 1 + 1)^2 \cdot f''(1^2 + 1 + 1) = 6 \cdot 1$$

δηλ. $2 \cdot \underbrace{f'(3)}_{=1} + 9 \cdot f''(3) = 6$, δηλ.

$$f'(3) = \frac{4}{9}.$$

Άσκηση 7

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ικανοποιεί τη σχέση:

$$2x \cdot \eta\mu x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$

(β) $f'(0) = 2$

Λύση

(α) Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $x > 0$, τότε

$$2x \cdot \eta\mu x \leq xf(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2 \implies 2 \cdot \frac{\eta\mu^2 x}{x} \leq xf(x) \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x} + x$$

και αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\eta\mu x) = 2 \cdot \eta\mu 0 = 0$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + x \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \\ &= 0 \cdot 1^2 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έπεται λοιπόν ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Εντελώς όμοια δείχνουμε ότι αν $x < 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Αλλά, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, δηλ. $f(0) = 0$.

(β) Είναι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Για $x \neq 0$ έχουμε

$$2x \cdot \eta\mu x \leq x f(x) \leq \eta\mu^2 x + x^2 \implies 2 \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + 1$$

και αφού $2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και (ακολουθώντας ίδια επιχειρήματα όπως στο προηγούμενο ερώτημα)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + 1 \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

έπεται από το Κριτήριο της Παρεμβολής ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

δηλ. $f'(0) = 2$.