ΛΥΚΕΙΟ ΑΡΧ. ΜΑΚΑΡΙΟΥ Γ΄ - ΔΑΣΟΥΠΟΛΗ **ΒΑΘΜΟΣ:**

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2022-2023

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 20΄ **ΥΠΟΓΡ. ΚΑΘΗΓ.:** …………………………..

ΘΕΜΑ/ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΚΘΕΤΙΚΗ-ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ **ΥΠΟΓΡ. ΚΗΔΕΜ.:** …………………………..

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **08/03/2023**

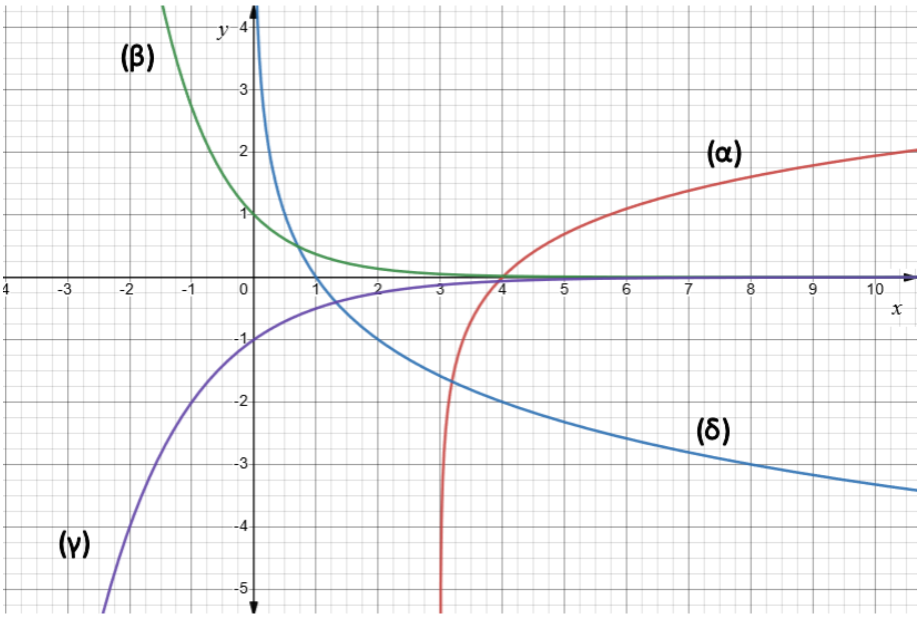
ΤΜΗΜΑ: Β32 **ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:** **Γ. Ιωακείμ**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων οι οποίες είναι είτε εκθετικές είτε λογαριθμικές. Αντιστοιχήστε, στον πίνακα που ακολουθεί, την κάθε γραφική παράσταση με τον τύπο της.



$h(x) = e^{-x}$	$k(x) = -2^{-x}$	$f(x) = \ln(x-3)$	$g(x) = -\log_2 x$
(β)	**(γ)**	**(α)**	**(δ)**

[Μ:4x1=4]

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε την τιμή του αγνώστου x στις πιο κάτω ισότητες:

(α) $\log_{27} x = \frac{1}{3},\ x > 0$

(β) $\ln(x-1) = 3, x > 1$

(γ) $e^{\ln(2x-1)} = 3,\ x > \frac{1}{2}$

(δ) $\log_x 4 = \log_4 16,\ x > 0, x \neq 1$ **[Μ:4x1=4]**

Απάντηση

(α) $\log_{27} x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (27)^{\frac{1}{3}} = 3.$

(β) $\ln(x-1) = 3 \Leftrightarrow x - 1 = e^3 \Leftrightarrow x = e^3 + 1.$

(γ) $\mathrm{e}^{\ln(2x-1)} = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2.$

(δ) $\log_x 4 = \log_4 16 \Leftrightarrow \log_x 4 = \log_4 4^2 \Leftrightarrow \log_x 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$, αφού $x > 0$.

Άσκηση 3

(α) Έστω $A > 0$ και $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\log_\alpha A^{2023} = 2023 \cdot \log_\alpha A.$$

(β) Έστω $x > 0$ και $\alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \neq 1,\ \alpha \cdot \beta \neq 1$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{(\log_\alpha x) \cdot (\log_\beta x)}{\log_\alpha x + \log_\beta x} = \log_{\alpha\beta} x.$$

[M:2.5/2.5]

Απάντηση

(α) Θέτουμε $x = \log_\alpha A$. Τότε

$$x = \log_\alpha A \Leftrightarrow A = a^x \Leftrightarrow A^{2023} = a^{2023x} \Leftrightarrow \log_\alpha A^{2023} = 2023x \Leftrightarrow \log_\alpha A^{2023} = 2023 \cdot \log_\alpha A.$$

(β)

$$\frac{(\log_\alpha x) \cdot (\log_\beta x)}{\log_\alpha x + \log_\beta x} = \frac{\frac{(\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} \alpha)} \cdot \frac{(\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} \beta)}}{\frac{\log_{\alpha\beta} x}{\log_{\alpha\beta} \alpha} + \frac{\log_\beta x}{\log_{\alpha\beta} \beta}} = \frac{\frac{(\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} \alpha)} \cdot \frac{(\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} \beta)}}{\frac{(\log_{\alpha\beta} x)(\log_{\alpha\beta} \beta) + (\log_\beta x)(\log_{\alpha\beta} \alpha)}{(\log_{\alpha\beta} \alpha)(\log_{\alpha\beta} \beta)}}$$

$$= \frac{(\log_{\alpha\beta} x) \cdot (\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} x)(\log_{\alpha\beta} \beta) + (\log_{\alpha\beta} \alpha)(\log_\beta x)} = \frac{(\log_{\alpha\beta} x) \cdot (\log_{\alpha\beta} x)}{(\log_{\alpha\beta} x)(\log_{\alpha\beta} \beta + \log_{\alpha\beta} \alpha)}$$

$$= \frac{\log_{\alpha\beta} x}{\log_{\alpha\beta} \beta + \log_{\alpha\beta} \alpha} = \frac{\log_{\alpha\beta} x}{\log_{\alpha\beta}(\alpha\beta)} = \log_{\alpha\beta} x.$$

Άσκηση 4

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $2\log_3(x-1) = \log_3(x+2) + \log_3(x-3)$

Περιορισμοί: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1,\ x+2>0 \Leftrightarrow x>-2,\ x-3>0 \Leftrightarrow x>3$. Άρα, $x>3$.

$$2\log_3(x-1) = \log_3(x+2) + \log_3(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(x-1)^2] = \log_3[(x+2)(x-3)]$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (x+2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = x^2-x-6$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \text{ δεκτή λύση.}$$

(β) $\log_3 x + 2\log_x 3 - 3 = 0$.

Περιορισμοί: $x>0, x\neq 1$

$$\log_3 x + 2\log_x 3 - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{\log_x x}{\log_x 3} + 2\log_x 3 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 3} + 2\log_x 3 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\log_x 3)^2 - 3\log_x 3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\log_x 3 - 1)(\log_x 3 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_x 3 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9 \\ \log_x 3 = 1 \Leftrightarrow x = 3. \end{cases}$$

(γ) $4^x - 3\cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 6\cdot 2^x + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^x-4)(2^x-2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \\ 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1. \end{cases}$$

(δ) $\log_5(7+9^{x-1}) - \log_5 4 = \log_5(3^{x-1}+1)$

$$\Leftrightarrow \log_5(7+9^{x-1}) - \log_5(3^{x-1}+1) = \log_5 4$$

$$\Leftrightarrow \log_5 \frac{7+9^{x-1}}{3^{x-1}+1} = \log_5 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{7+9^{x-1}}{3^{x-1}+1} = 4 \Leftrightarrow 7+9^{x-1} = 4\cdot 3^{x-1} + 4$$

$$\Leftrightarrow 9^{x-1} - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x-1})^2 - 4\cdot 3^{x-1} + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^{x-1}-3)(3^{x-1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 2 \\ 3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1. \end{cases}$$

[M:1/2/2/2]