1. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Αν ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, τότε οι α και β δεν μπορούν να είναι και οι δυο ταυτόχρονα περιττοί.

Λύση

Υποθέτουμε ότι και οι δυο αριθμοί α και β είναι περιττοί. Αφού ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, θα είναι της μορφής $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ για κάποιον ακέραιο αριθμό c . Από υπόθεση, έχουμε ότι

$$\alpha = 2\mu + 1 \;\; \kappa\alpha\iota \; \beta = 2\lambda + 1, \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o\upsilon\varsigma \; \mu, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Τότε,

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (2\mu + 1)^2 + (2\lambda + 1)^2 = 2 \cdot [2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1]$$

δηλ. ο $\;^2$ είναι άρτιος, άρα και ο c (γιατί;). Συνεπώς, $c = 2\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{Z}$. Έτσι, η πιο πάνω ισότητα δίνει

$$c^2 = (2\xi)^2 = 2 \cdot [2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1],$$

δηλ. $2\xi^2 = 2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1$, δηλ. ο $2\xi^2$ είναι περιττός. Έτσι, ο $c = 2\xi$ είναι ταυτόχρονα και άρτιος και περιττός, πρόταση η οποία είναι ψευδής.

2. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε ο α να διαιρεί το β και τον $(\beta^2 - \gamma)$. Να δείξετε ότι ο α διαιρεί το γ.

Λύση (με ευθεία απόδειξη)

Αφού ο α διαιρεί το β, έχουμε ότι $\beta = \alpha\mu$ για κάποιο $\mu \in \mathbb{Z}$ και αρα $\beta^2 = \alpha^2\mu^2$

Αφού ο α διαιρεί τον $(\beta^2 - \gamma)$, έχουμε ότι $\beta^2 - \gamma = \alpha\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{Z}$.

Αφαιρούμε την πρώτη από τη δεύτερη σχέση και έχουμε $\gamma = \alpha^2\mu^2 - \alpha\xi = \alpha \underbrace{(\alpha\mu^2 - \xi)}_{\in\mathbb{Z}}$ και αρα ο γ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού α, δηλ. ο α διαιρεί το γ.