6.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Δραστηριότητες σελ. 90 (Μονότονες ακολουθίες)

1.

(α) ΣΩΣΤΟ Κάθε σταθερή ακολουθία είναι και αύξουσα και φθίνουσα.
(β) ΣΩΣΤΟ Δες παρατήρηση μετα τον αντίστοιχο ορισμό

(γ) ΛΑΘΟΣ Πάρτε για παράδειγμα οποιαδήποτε σταθερη ακολουθία

(δ) ΣΩΣΤΟ Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια τέτοια ακολουθία, τότε, για κάθε $\forall\nu\in\mathbb{N}$ είναι $\alpha_{\nu+1}\geq\alpha_\nu$ και $\alpha_{\nu+1}\leq\alpha_\nu$, δηλ. $\alpha_\nu=\alpha_{\nu+1}$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ και το συμπέρασμα έπεται.

(ε) ΣΩΣΤΟ Αφού κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι και αύξουσα, άρα μονότονη

2.

(α) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2-2=0\Rightarrow\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu$$
και αρα η ακουλουθία είναι σταθερή.

(β) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=5-(\nu+1)-(5-\nu)=5-\nu-1-5+\nu=-1<0\Rightarrow\alpha_{\nu+1}<\alpha_\nu$$
και αρα η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

(γ) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=(\nu+1)^3-1-(\nu^3-1)=\nu^3+3\nu^2+3\nu+1-1-\nu^3+1=3\nu^2+3\nu+1>0$$
αφού $\nu\in\mathbb{N}$ και άρα $\alpha_{\nu+1}>\alpha_\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

3.

(α) $\alpha_\nu=3\nu-5,\forall\nu\in\mathbb{N}$
Έχουμε $\forall\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=3(\nu+1)-5-(3\nu-5)=3\nu+3-5-3\nu+5=3>0$$
και αρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

(β) $\alpha_\nu=4^\nu,\forall\nu\in\mathbb{N}$
Έχουμε $\forall\nu\in\mathbb{N}$,
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=4^{\nu+1}-4^\nu=4\cdot4^\nu-4^\nu=3\cdot4^\nu>0$$
και αρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

(γ) $\alpha_\nu=(-3)^\nu,\nu\in\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\alpha_1=-3,\alpha_2=3,\alpha_3=-3$. Έτσι, $\alpha_1<\alpha_2$ ενώ $\alpha_2>\alpha_3$. Έτσι, η ακολουθία δεν είναι μονότονη. Διαφορετικά, με τη μέθοδο των διαφορών, παρατηρούμε ότι για $\nu\in\mathbb{N}$ σταθεροποιημένο, είναι
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=(-3)^{\nu+1}-(-3)^\nu=(-3)^\nu\cdot[(-3)-1]$$
$$=-4\cdot(-3)^\nu=\begin{cases}-4\cdot3^{\nu+1},\text{για }\nu\text{ άρτιο}\\ \\ 4\cdot3^{\nu+1},\text{για }\nu\text{ περιττό}\end{cases}$$
και αρα η διαφορά $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu$ δε διατηρά σταθερό πρόσημο. Αφού το ν ήταν τυχόν, έπεται ότι η ακολουθία δεν είναι μονότονη.

(δ) $\alpha_\nu=\frac{2\nu+3}{2\nu+1},\nu\in\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\forall\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_\nu=\frac{2\nu+3}{2\nu+1}=\frac{2\nu+1+2}{2\nu+1}=\frac{2\nu+1}{2\nu+1}+\frac{2}{2\nu+1}=1+\frac{2}{2\nu+1}$$
και αρα $\forall\nu\in\mathbb{N}$
$$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=1+\frac{2}{2\nu+3}-\left(1+\frac{2}{2\nu+1}\right)=\frac{2}{2\nu+3}-\frac{2}{2\nu+1}=\frac{-2}{(2\nu+1)(2\nu+3)}$$

Αλλά για $\nu\in\mathbb{N}$, είναι προφανώς $(2\nu+1)(2\nu+3)>0$ και αρα $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu>0$. Αφού το ν ήταν τυχόν,

	έπεται ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα. **(ε)** $\alpha_\nu = (\nu - 1) \cdot 3^{\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N}$ Έχουμε $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \nu \cdot 3^{\nu+2} - (\nu - 1) \cdot 3^{\nu+1} = 3^{\nu+1}(3\nu - \nu + 1) = 3^{\nu+1}(2\nu + 1) > 0$$ και αρα η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.
4.	$\alpha_{\nu+1} = {\alpha_\nu}^2 + 2\ (\nu \in \mathbb{N}), \alpha_1 = 3$. Έστω $\nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 1$ σταθεροποιημένο. Τότε $$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = {\alpha_\nu}^2 + 2 - \alpha_\nu = {\alpha_\nu}^2 - \alpha_\nu + 2$$ Αντιμετωπίζουμε το τελευταίο ως τριώνυμο με 'μεταβλητή' την α_ν. Η διακρίνουσά του Δ είναι $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ και αφού ο συντελεστής του ${\alpha_\nu}^2$ είναι >0, έπεται ότι το τριώνυμο λαμβάνει γνήσια θετικές τιμές για την τιμή του α_ν. Έτσι, $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$. Αφού το ν ήταν τυχόν, έπεται ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.