ΓΡΑΠΤΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ - ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟ[1]
[Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ]
2021 – 2022

-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-

Μέρος Α

Α1

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left(\frac{2}{x} - \text{συν}3x - 4\sqrt{x} + \pi\right) dx.$$

Απάντηση

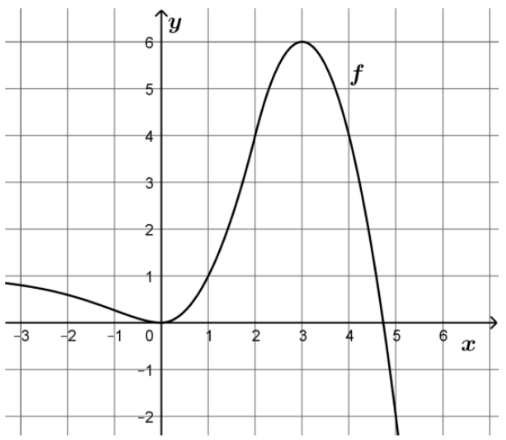
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{x} - \text{συν}3x - 4\sqrt{x} + \pi\right) dx &= 2\int \frac{1}{x}\, dx - \int \text{συν}3x\, dx - 4\int \sqrt{x}\, dx + \pi \int dx \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{3}\text{ημ}3x - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \pi \cdot x + c \\ &= 2\ln|x| - \frac{1}{3}\text{ημ}3x - \frac{8}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \pi \cdot x + c. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Α2

Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$ στο $-\infty$.

(α΄) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f, τα τοπικά και ολικά ακρότατα της f και να τα χαρακτηρίσετε.

(β΄) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3$.



[1] Πηγή θεμάτων:
https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/exetastika-dokimia

Απάντηση

(α') Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ όπως επίσης στο διάστημα $(3, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 3)$.[2]
Το γράφημα της f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0, f(0)) = (0, 0)$ και τοπικό μέγιστο στο $(3, f(3)) = (3, 6)$, το οποίο είναι και ολικό μέγιστο.

(β') Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(1, 2)$, αφού είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού: υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1).$$

Από τη γραφική παράσταση της f βρίσκουμε $f(2) = 4$ και $f(1) = 1$. Συνεπώς,
$f'(\xi) = 4 - 1 = 3$. ■

A3

Δίνεται κύκλος με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

(α') Να βρείτε:

(i) Τις συντεταγμένες του κέντρου του.

(ii) Το μήκος της ακτίνας του.

(iii) Το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο Σ(4,0) προς τον κύκλο.

(β') Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση του σημείου Σ(4,0) από τον κύκλο.

(γ') Να γράψετε τις παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου.

Απάντηση

(α') **(i)** **1ος τρόπος:** $2g = -4 \Rightarrow \boxed{g = -2}$, $2f = -6 \Rightarrow \boxed{f = -3}$
και αρα το κέντρο του κύκλου είναι το $K(-g, -f) = K(2, 3)$.

2ος τρόπος: με συμπλήρωση τελείου τετραγώνου:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{aligned}$$

και αρα το κέντρο του κύκλου είναι το $K(2, 3)$.

(ii) **1ος τρόπος:** Είναι $c = 9$ και αρα

$$R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 9 - 9} = \sqrt{4} = 2.$$

2ος τρόπος: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 = 2^2 \Rightarrow R = 2$.

[2] Μπορούμε βέβαια, λόγω συνέχειας της f, να πάρουμε κλειστά τα διαστήματα: $(-\infty, 0]$, $[0, 3]$ και $[3, +\infty)$.

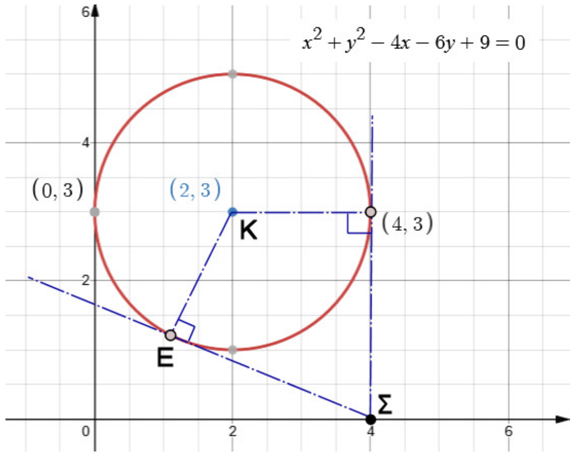
(iii) Είναι:

$$\begin{aligned}(\Sigma K)^2 &= (x_k - x_\Sigma)^2 + (y_k - y_\Sigma)^2 \\ &= (2-4)^2 + (3-0)^2 \;=\; 4+9 \\ &= 13.\end{aligned}$$

Έστω Ε το σημείο (ένα εκ των δύο) επαφής του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο Σ(4,0) προς τον κύκλο. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΣΚΕ έχουμε:

$$(\Sigma K)^2 = R^2 = (\Sigma E)^2 \Rightarrow (\Sigma E) = \sqrt{(\Sigma K)^2 - R^2} = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3.$$

Εναλλακτικά, παρατηρούμε ότι αφού το κέντρο του κύκλου έχει τεταγμένη =2 και η ακτίνα του είναι $R = 2$, τότε το σημείο Ε$(4,3)$ ανήκει στον κύκλο και αφού $x_\Sigma = 4$, έπεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΕΣ είναι κάθετο στον άξονα των τεταγμένων, άρα η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με 3.



(β΄) Η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με (ΣΚ)-$R = \sqrt{13} - 2$.

(γ΄) Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 2\text{συν}t \\ y(t) = 3 + 2\text{ημ}t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

■

Α4

(α΄) Να αποδείξετε ότι $(\text{τοξεφ}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

(β΄) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx.$$

Απάντηση

(α΄) Είναι

$$y = \text{τοξεφ}x,\; x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \text{εφ}y = x,\; \forall y \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Τότε για $x \in \mathbb{R}$, (παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη πεπλεγμένα, δηλαδή με το y να είναι συνάρτηση του x)

$$\text{εφ}y = x \Rightarrow \frac{d(\text{εφ}y(x))}{dx} = \frac{dx}{dx} \Rightarrow y' \cdot \text{τεμ}^2 y = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y}.$$

(Πρέπει να αναφέρουμε ότι $y \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \text{συν}y \neq 0$ και αρα η $\text{τεμ}^2 y$ έχει νόημα για τα y αυτά και είναι $\neq 0$).
Τώρα,

$$1 + \text{εφ}^2 y = \text{τεμ}^2 y \Rightarrow \text{τεμ}^2 y = 1 + x^2$$

και αρα

$$\boxed{y' = (\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}}\,.$$

(β΄) Το τριώνυμο x^2+2x+2 δεν έχει (πραγματικές) ρίζες. Ιδιαίτερα, είναι $x^2+2x+2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-6}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2+2x+2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx..
\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\,dx = \ln(x^2+2x+2) + c_1$$

και για το δεύτερο:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&\overset{u=x+1}{=} \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \text{τοξεφ}u + c_2 \\
&= \text{τοξεφ}(x+1) + c_2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\boxed{\int \frac{x-2}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - 3\text{τοξεφ}(x+1) + c}\,.$$

■

A5

(α΄) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

(β΄) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle.

(γ΄) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

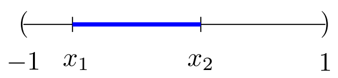
Απάντηση

(α΄) Θεώρημα (του) Rolle:
Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο (a, b) και τέτοια ώστε $f(a) = f(b)$. Τότε υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

(β΄) Γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος (του) Rolle:
Έστω συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle. Τότε, υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη του γραφήματος της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων.

(γ΄) **1ος τρόπος:** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5x + 1$. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = -2 < 0$ και $f(1) = 4 > 0$, άρα $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1, 1]$: υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.
Δηλαδή, η εξίσωση $3x^5 - 5x^3 + 5x + 1 = 0$ έχει **τουλάχιστον** μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι έχει **το πολύ μία** πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1, 1)$.
Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες έστω x_1, x_2 στο διάστημα $(-1, 1)$, δηλαδή $f(x_1) = 0 = f(x_2)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$. Ορίζεται το διάστημα $[x_1, x_2]$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του διαστήματος $[-1, 1]$.



Εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$: υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
Είναι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$,

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 5 = 5[3x^2(x^2 - 1) + 1].$$

Εδώ χρειάζεται μελέτη (μονοτονία/ακρότατα) της συνάρτησης $g(x) = x^2(x^2 - 1)$:
είναι άρτια συνάρτηση, άρα τη μελετάμε στο διάστημα $(-1, 0)$ και βρίσκουμε ότι έχει ολικά ελάχιστη τιμή την $-3/4$ και $\lim_{x \to 0-} g(x) = 0$, δηλαδή $-3/4 \leq g(x) < 0$ και αρα $3x^2(x^2 - 1) + 1 > 1/4 > 0$, δηλαδή $f'(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2)$. Καταλήξαμε σε άτοπο.
Εναλλακτικά, θέτουμε $w = x^2$ και παρατηρούμε ότι το τριώνυμο $3w^2 - 3w + 5$ είναι > 0.
Άρα, τουλάχιστον 1 ρίζα και το πολύ 1 ρίζα $\Rightarrow$ ακριβώς 1 ρίζα.

2ος τρόπος: Δείχνουμε όπως και πρίν ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα και ακολούθως, βρίσκουμε ότι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(-1, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, συνεπώς ή ρίζα αυτή είναι μοναδική.

■

A6

(α') Να δώσετε τον ορισμό της κοίλης συνάρτησης $f : \Delta \to \mathbb{R}$ στο Δ, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα.

(β') Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$g'(x) = f^2(x) - \frac{1}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

να εξετάσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και την ύπαρξη σημείων καμπής.

Απάντηση

(α') **Σημείωση:** Όταν ζητάμε να δοθεί ο ορισμός κάποιου πράγματος στα Μαθηματικά απλά αναφέρουμε το όνομα του αντικειμένου (π.χ. κυρτή συνάρτηση, συνεχής συνάρτηση στο x_0, συνεχής συνάρτηση, ολοκληρώσιμη συνάρτηση κτλ) και μόνο.
Ακόμα και στην περίπτωση όμως που έχουμε ορίσει ένα Μαθηματικό αντικείμενο για μια συγκεκριμένη κλάση (κατηγορία), τότε είμαστε σαφέστατοι για το τι ζητάμε, έτσι ώστε να μας δοθεί ο αντίστοιχος ορισμός. Εφόσον λοιπόν αναφερόμαστε σε κυρτότητα για **συνεχείς** συναρτήσεις ορισμένες σε **διάστημα,** η εκφώνηση θα έπρεπε να είναι:
Πότε μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$ στο Δ, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται κοίλη;
ή
Πότε μια **συνεχής** συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ λέγεται κοίλη;

Επίσης, δε λέμε 'η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για κάθε x στο τάδε σύνολο' αλλά ότι 'η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο αυτό'.

Ορισμός
Μια **συνεχής** συνάρτηση $f : \Delta \to \mathbb{R}$, όπου $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, λέγεται **κοίλη** (στο Δ) αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$\phi(\xi) \leq f(\xi), \quad \forall \xi \in (x_1, x_2),$$

όπου $y = \phi(x)$ είναι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f.

(β') **Σημείωση:** Προχωρώ στη λύση του θέματος με την επιπλέον υπόθεση της παραγωγισιμότητας της f.
Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$, έχουμε ότι η συνάρτηση $h = 1/f$ που εμφανίζεται στην έκφραση της g' έχει νόημα (είναι καλά ορισμένη). Τώρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) = f^2(x) - \frac{1}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad g''(x) &= 2f(x) \cdot f'(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} \\ &= f'(x) \left[2f(x) + \frac{1}{f^2(x)} \right]. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και επίσης $f(x)$, $f^2(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $g''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και άρα η g είναι **παντού κυρτή**, άρα **δεν έχει σημεία καμπής**. ∎