5. ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

Δραστηριότητες σελ. 74-76 (Ενότητας)

1.

(α) ΣΩΣΤΟ: Θεωρία (αφού τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους, τότε θα είναι ίσα με το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό)

(β) ΣΩΣΤΟ: Αφού τα όρια $\lim_{x\to 1} f(x)$ και $\lim_{x\to 1} g(x)$ υπάρχουν, τότε θα υπάρχει και το $\lim_{x\to 1}[f(x)\cdot g(x)]$ και θα ισούται με το

$$\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x) = 0\cdot 5 = 0$$

(γ) ΛΑΘΟΣ: Για παράδειγμα, $f(x) = x-1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{f(x)}, f(x)\neq 0$, δηλ. $g(x) = \frac{1}{x-1}, x\neq 1$

(δ) ΣΩΣΤΟ: Αφού το όριο $\lim_{x\to -1} f(x)$ υπάρχει και είναι >0, τότε από τη γνωστή Ιδιότητα έχουμε

$$\lim_{x\to -1}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to -1} f(x)} = \sqrt{9} = 3.$$

(ε) ΣΩΣΤΟ: Είναι

$$\lim_{x\to 0}(\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x\to 0}\eta\mu x + 2\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu 0 + 2\sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

και

$$\lim_{x\to 0}|x+2| = \left|\lim_{x\to 0}(x+2)\right| = |2| = 2$$

(στ) ΛΑΘΟΣ: Το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

(ζ) ΛΑΘΟΣ: Δες ορισμό ορίου συνάρτησης

(η) ΣΩΣΤΟ: Ως σύνθεση 2 συνεχών συναρτήσεων

(θ) ΛΑΘΟΣ: Η υπόθεση της συνέχειας είναι ουσιώδης στην ισχύ του αποτελέσματος του ΘΕΤ. Για παράδειγμα, η f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -1, -1\leq x\leq 0 \\ 1, \quad\quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

(ι) ΣΩΣΤΟ: Αν υπήρχε $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, τότε από το Θεώρημα του Bolzano, θα είχαμε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0) = 0$, άτοπο από υπόθεση.

2.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\nexists \lim_{x\to 1} f(x)\,,\alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$$

$\nexists \lim_{x\to -3} f(x)\; \alpha\varphi o\acute{\upsilon}$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty \neq \lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$$

3.

(α) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(-x+5) = -1+5 = 4$

(β) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+3) = 1^2+3 = 4$

(γ) Έπεται από τα προηγούμενα δυο ότι $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

4.

(α) $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} g(x) = 0+3 = 3$

(β) $\lim_{x\to 2}|f(x)+g(x)| = \left|\lim_{x\to 2}\big(f(x)+g(x)\big)\right| = |3| = 3$

(γ) $\lim_{x\to 2}\big(3f^{10}(x) - 2g^3(x)\big) = \lim_{x\to 2}\big(3f^{10}(x)\big) - \lim_{x\to 2}\big(2g^3(x)\big)$

$$= 3\lim_{x\to 2}\big(f^{10}(x)\big) - 2\lim_{x\to 2}\big(g^3(x)\big) = 3\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)^{10} - 2\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right)^3$$
$$= 3\cdot 0^{10} - 2\cdot 3^3 = -54$$

(δ) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\big(f(x)\cdot g(x)\big)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\big(f(x)\cdot g(x)\big)} = \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 2} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 2} g(x)\right)} = \sqrt[3]{0\cdot 3} = 0$

5.

(α) $\lim_{x\to +\infty}(x^2-x+1) = \lim_{x\to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty.$

(β) $\lim_{x\to 8}\frac{x^2-64}{x-8} = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(x+8)}{x-8} = \lim_{x\to 8}(x+8) = 16$ (αφού το αρχικό όριο ήταν Α.Μ. τύπου $\frac{0}{0}$)

(γ) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(3x)\sigma\upsilon\nu(5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(3x)}{x}\cdot\sigma\nu(5x)\right) = 3\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(3x)}{3x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\big(\sigma\upsilon\nu(5x)\big)$

$$= (3\cdot 1)\cdot\sigma\upsilon\nu(5\cdot 0) = 3$$

(δ) $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2+2x+2}{3x^2+x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2}{3x^2} = \frac{5}{3}$

(ε) $\lim_{x\to -\infty}\frac{3-5x-x^2}{4+6x^2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2}{6x^2} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to -\infty} 1 = -\frac{1}{6}$

(στ) Το όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου $\frac{0}{0}$. Γι'αυτό θα απαλείψουμε τη ρίζα του παρονομαστή (λόγω του ότι έχουμε ρητή συνάρτηση)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^3-4x} = \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2}\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4}$$

(ζ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφη τύπου $(+\infty)+(-\infty)$. Άρα εφαρμόζουμε τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας (συζυγή παράσταση)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x+3-x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{3}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}} = 0$$

(η) $\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu(7x)-\eta\mu x}{2x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu(7x)}{2x}-\frac{\eta\mu x}{2x}\right)$.

Αλλά,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu(7x)}{2x}=\frac{7}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu(7x)}{7x}=\frac{7}{2}\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu(u)}{u}=\frac{7}{2}$$

(αφού $1=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu(u)}{u}=\lim_{u\to0^+}\frac{\eta\mu(u)}{u}$) και

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{2}$$

Έτσι, το $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu(7x)}{2x}-\frac{\eta\mu x}{2x}\right)$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu(7x)}{2x}-\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x}{2x}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

(θ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

(ι) Το όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου $\frac{0}{0}$. Γι'αυτό θα απαλείψουμε τη ρίζα του παρονομαστή (λόγω του ότι έχουμε ρητή συνάρτηση)

$\lim_{x\to9}\frac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x+9)}{\sqrt{x}-3}$

$=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(x+9)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to9}[(\sqrt{x}+3)(x+9)]$

$=(\sqrt{9}+3)(9+9)=108$

(ια) Για $2<x<4$ είναι $|x-2|=x-2$ και $|x-4|=4-x$. Έτσι (θεωρώντας βέβαια τη συνάρτηση $x\mapsto\frac{x^2-7|x-2|-2}{|x-4|}$)

$\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-7|x-2|-2}{|x-4|}=\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-7(x-2)-2}{4-x}$

$=\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-7x+14-2}{4-x}$

$=\lim_{x\to4^-}\frac{x^2-7x+12}{4-x}=-\lim_{x\to4^-}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}$

$=-\lim_{x\to4^-}(x-3)=-1$

(ιβ) Το όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου $\frac{0}{0}$. Έχουμε

$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu(4x)}{x}}{\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$

Αλλά, $\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{x}=4\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{4x}=4\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}=4$ και το $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ είναι Α.Μ. τύπου $\frac{0}{0}$, άρα

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Έτσι,

$$\frac{\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$$

(ιγ) Το όριο αποτελεί Α.Μ. τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x-1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{9x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x-1}}{\sqrt{9x+5}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{9x+5}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{9x+5}}+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x-3}{9x+5}}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{9x}}+\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{9x}}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}}+\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

(ιδ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της παρεμβολής: για $x\neq 0$

$$-1\leq \eta\mu 4x\leq 1\Rightarrow -\frac{1}{2x}\leq\frac{\eta\mu 4x}{2x}\leq\frac{1}{2x}$$

και αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x}\right)=0=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x},$$

από το κριτήριο της παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 4x}{2x}=0.$$

6.

(α) θεωρούμε τη συνάρτηση

$$x\mapsto\frac{|x^2-2x+1|-2}{x-1}=\frac{|(x-1)^2|-2}{x-1}=\frac{(x-1)^2-2}{x-1}$$

$$=\frac{x^2-2x-1}{x-1},x\neq 1$$

και αρα

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-2x+1|-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-1}{x-1}=0$$

(β) θεωρούμε τη συνάρτηση

$$x\mapsto\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)\\[2ex] -\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}, & x\in(-2,1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x+2, & x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)\\ -(x+2), & x\in(-2,1)\end{cases}$$

Έτσι,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+2)=3$$

$$\text{ενω}\ \lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}(x+2)=-3$$

και αφού τα πλευρικά αυτά όρια είναι διαφορετικά, έπεται ότι το $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x-2|}{x-1}$ δεν υπάρχει.

7.

Το $\lim_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει $\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1^-}(5x-2\alpha+1)=\lim_{x\to 1^+}(\alpha^2x+7x)$$

$$\Leftrightarrow 5-2\alpha+1=\alpha^2+7\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha+1=0$$

	$$\Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -1}$$
8.	Λόγω της συνέχειας της f στο σύνολο $(-\infty,3]$ και αφού $0 \in (-\infty,3]$, έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Άρα, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 \Leftrightarrow f(0) = 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot 0 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 2$. Τώρα, $$\lim_{x\to 3} f(x) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$$ Είναι $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$ $$\Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-}(\alpha x + \beta) = \lim_{x\to 3^+}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$$ $$\Leftrightarrow 3\alpha + 2 = 9\alpha + 3\cdot\beta + \gamma$$ $$\Leftrightarrow 0 = 6\alpha + 2\cdot\beta + \gamma \Leftrightarrow 0 = 6\alpha + 2\cdot 2 + \gamma$$ $$\Leftrightarrow \gamma = -6\alpha - 4, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
9.	**(α)** Η f είναι παντού συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x \mapsto \lvert x\rvert$ και $x \mapsto 7x+3$. **(β)** Είναι $D(f) = \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ και η f είναι παντού συνεχής στο Π.Ο. της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $x \mapsto \sqrt{x}$ και $x \mapsto 3x-5$. **(γ)** Είναι $$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu(2x) \neq 0\} = \left\{x \neq k\frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$ και η f είναι παντού συνεχής στο Π.Ο. της ως πηλίκο των συνεχών συναρτήσεων συναρτήσεων $x \mapsto \eta\mu(2x)$ και $x \mapsto \sigma\upsilon\nu(2x)$. **(δ)** Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ και η f είναι παντού συνεχής στο Π.Ο. της ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων συναρτήσεων $x \mapsto \sigma\upsilon\nu x$ και $x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$. **(ε)** Για $x < 3$ είναι $f(x) = x^2 - 2$ και αρα στο σύνολο $(-\infty, 3)$ είναι συνεχής ως **πολυωνυμική.** Ομοίως, για $x > 3$ είναι $f(x) = 2x+1$ και αρα στο σύνολο $(3, +\infty)$ είναι συνεχής ως **πολυωνυμική.** Μένει ο έλεγχος της συνέχειας στο σημείο $x = 3$: Είναι $f(3) = 3^2 - 2 = 7$ και $$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2-2) = 7$$ $$\text{και} \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(2x+1) = 7$$ Άρα υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f(x)$ και είναι ίσο με $7 = f(3)$. Συνεπώς, συνάρτηση ειναι συνεχής στο σημείο $x = 3$. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$. **(στ)** Είναι $D(f) = [0, 2\pi]$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\pi)$ αλλά και στο διάστημα $(\pi, 2\pi]$. Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x = \pi$. Είναι $$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$$ $$\text{και} \lim_{x\to \pi^+} f(x) = \lim_{x\to \pi^+} \eta\mu x = \eta\mu\pi = 0$$ και αρα το $\lim_{x\to\pi} f(x)$ δεν υπάρχει. Έτσι, η f δεν είναι συνεχής στο $x = \pi$.
10.	Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $$f(x) = 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x - 1.$$ Η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων. Είναι $f(0) = 3 > 0$ και $f(\pi) = -5 < 0$ και αρα $f(0)\cdot f(\pi) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[0,\pi]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $3\eta\mu x_0 + 4\sigma\upsilon\nu x_0 - 1 = 0$.

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2\sqrt{x} + 5x - 3x^2 + \frac{96}{x} - 1.$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων. Είναι $f(4) = -1 < 0$ και $f(16) = -675 < 0$ και αρα $f(4) \cdot f(16) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[4,16]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (4,16)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (4,16)$ τέτοιο ώστε

$$2\sqrt{x_0} + 5x_0 + 1 = -3{x_0}^2 - \frac{96}{x_0}.$$

12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 7.$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων. Είναι $f(3) = -4 < 0$ και $f(4) = 13 > 0$ και αρα $f(3) \cdot f(4) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[3,4]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε ${x_0}^3 - 3{x_0}^2 + x_0 - 7 = 0$. Βάζοντας τιμές εντός του διαστήματος αυτού, βρίσκουμε ότι μια προσέγγιση της ρίζας αυτής είναι η τιμή 3.33.

13. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = f(x) - 1 = x^2 + \eta\mu(2x) - 1.$$

Είναι $h(0) = -1 < 0$ και $h(\pi) = \pi^2 - 1 > 0$ και αφού η h είναι συνεχής (ως σύνθεση τέτοιων) ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την h στο διάστημα $[0,\pi]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) - 1 = 0$, δηλ. ώστε $f(\xi) = 1$.

14. **(α)** $f(x) = x^2 - 6x + 2,\ x \in [0,7]$.

Η συνάρτηση f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[0,7]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[0,7]$. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε αλγεβρικούς χειρισμούς, είτε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γράφημα αυτής αποτελεί παραβολή. Με τον πρώτο τρόπο:

$$f(x) = x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7 \quad (\mathbf{1})$$

και άρα $x \in [0,7] \Rightarrow (x-3) \in [-3,4] \Rightarrow (x-3)^2 \in [0,16] \Rightarrow \underbrace{((x-3)^2 - 7)}_{f(x)} \in [-7,9]$, δηλ. $f_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = 9$ και $f_{\varepsilon\lambda.} = -7$. Με το δεύτερο τρόπο, από την (**1**) παρατηρούμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι στο σημείο $(3,-7)$ στην οποία λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή (άσχετα αν αυτή περιοριστεί στο διάστημα $[0,7]$), δηλ. $f_{\varepsilon\lambda.} = -7$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(0) = 2$ και $f(7) = 9$ αρα, $f_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = 9$.
Δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-7,9]$.

(β) $f(x) = 2\eta\mu x + 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

Η συνάρτηση f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής, ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ είναι

$$0 \le \eta\mu x \le \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow 0 \le \eta\mu x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le 2\eta\mu x \le 1 \Rightarrow 1 \le \underbrace{2\eta\mu x + 1}_{f(x)} \le 2$$

και άρα $f_{\varepsilon\lambda.} = 1$ και $f_{\mu\acute{\varepsilon}\gamma.} = 2$, δηλαδή το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[1,2]$.