5. ΕΜΠΛΟΥΤΙΣΜΟΣ

Δραστηριότητες σελ. 77 (Εμπλουτισμού)

1. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\right)$$

Από τη γνωστή μας ταυτότητα $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ για $\alpha=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ και $\beta=x^{\frac{1}{3}}$

$$(x+1)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=\frac{\left((x+1)^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}$$

και αρα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)=0.$$

2. Αφού $\alpha+\beta+\gamma=0$ έχουμε $\gamma=-(\alpha+\beta)$. Συνεπώς

$$\lim_{x\to1}\frac{\alpha x^4+\beta x^3+\gamma}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\alpha x^4+\beta x^3-(\alpha+\beta)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\alpha x^4+\beta x^3-\alpha-\beta}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x^4-1)+\beta(x^3-1)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x^4-1)+\beta(x^3-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Ταυτότητα*

$$=\lim_{x\to1}\frac{\alpha(x^2+x+1)+\beta(x^3+x^2+x+1)}{x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1}[\alpha(x^2+x+1)+\beta(x^3+x^2+x+1)]}{\lim_{x\to1}(x+1)}=\frac{3\alpha+4\beta}{2}$$

* Για $\alpha\neq\beta$, ισχύει($\nu\in\mathbb{N}$)

$$\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha-\beta}=\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+\cdots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}$$

3. Έστω f μια συνάρτηση για την οποία

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

και η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x=0$. Καταρχάς, από την υπόθεση για την f, έχουμε ότι $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+0)=f(x)+f(0)$ δηλ. $f(0)=0$. Τώρα, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\lim_{h\to0}f(\alpha+h)-f(\alpha)=\lim_{h\to0}\big(f(\alpha)+f(h)\big)-f(\alpha)$$

$$=\lim_{h\to0}\big(f(\alpha)+f(h)-f(\alpha)\big)=\lim_{h\to0}f(h)$$

f συνεχής στο $x=0$

$$=f(0)=0$$

Έτσι, για το (τυχόν) α έχουμε ότι

$$\lim_{h\to0}f(\alpha+h)-f(\alpha)=0$$

δηλ. ισοδύναμα ότι $\lim_{h\to0}f(\alpha+h)=f(\alpha)$. Αυτό όμως είναι και ο ορισμός της συνέχειας στο (τυχόν) α.

4.	Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h = f - g$. Τότε $$h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$ Η συνάρτηση h είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = -1 < 0$ και αρα $h(0) \cdot h(1) < 0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την h στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$, δηλ. υπάρχει ενα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) = g(x_0)$.
5.	Είναι $$\frac{x^2 - \alpha}{\lvert x-2 \rvert} = \begin{cases} \dfrac{\alpha - x^2}{x-2}, & x < 2 \\ \dfrac{x^2 - \alpha}{x-2}, & x > 2 \end{cases}$$ και αρα αν $\alpha = 4$, τότε $$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - \alpha}{\lvert x-2\rvert} = -\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = -\lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$ και ομοίως $$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{\lvert x-2\rvert} = 4$$ Έτσι, για $\alpha = 4$, το όριο δεν υπάρχει. Αν τώρα $\alpha \neq 4$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\alpha > 4$ και $\alpha < 4$. Σε κάθε περίπτωση, τα πλευρικά όρια στο $x = 2$ βγαίνουν αντίθετα και $+\infty$ ή $-\infty$ (εύκολη άσκηση). Συνεπώς, και στην περίπτωση αυτή το $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-\alpha}{\lvert x-2\rvert}$ δεν υπάρχει και αρα το όριο δεν υπάρχει για καμιά τιμή του πραγματικού αριθμού α.
6.	Θα αποδείξουμε με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου ότι $$\lim_{x\to a} x^3 = a^3$$ Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα x τέτοια ώστε $$0 < \lvert x + \alpha \rvert < \delta \text{ να ισχύει } \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$$ Αλλά $$\begin{aligned} \lvert f(x) - L \rvert = \lvert x^3 - a^3 \rvert &= \lvert (x-\alpha)(x^2 + \alpha x + a^2) \rvert \\ &= \lvert x - \alpha \rvert \cdot \lvert x^2 + \alpha x + a^2 \rvert. \end{aligned}$$ Αν $\lvert x - \alpha \rvert < 1$ τότε $\alpha - 1 < x < \alpha + 1$ και αρα $x^2 < (\alpha+1)^2$. Επομένως, $$\begin{aligned} \lvert x^2 + \alpha x + a^2 \rvert &\le x^2 + \lvert \alpha x \rvert + a^2 \\ &< (\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+1) + a^2 \\ &= 3a^2 + 3\alpha + 1 \end{aligned}$$ Θέτουμε λοιπόν $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3a^2 + 3\alpha + 1}\right\}$ (ο αναγνώστης να το επαληθεύσει!)
7.	Θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $$h(x) = f(x) - f(x+a), x \in [0, \alpha].$$ Τότε $$h(0) = f(0) - f(a) \text{ και}$$ $$h(\alpha) = f(\alpha) - f(2a) = f(\alpha) - f(0)$$ δηλ. $h(0) = -h(\alpha)$ και αρα οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, δηλ. $h(0) \cdot h(\alpha) < 0$. Το αποτέλεσμα έπεται τότε από το Θεώρημα του Bolzano (αφού η f είναι συνεχής στο $[0,2\alpha]$, θα είναι και συνεχής στο $[0,\alpha]$ και αρα και η h θα είναι συνεχής στο διάστημα αυτό ως διαφορά 2 τέτοιων). Έτσι, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0,\alpha)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$, δηλ. $f(\xi) - f(\xi + a) = 0$. δηλ. $f(\xi) = f(\xi + a)$.

8.	Αναδιατύπωση (ευκολότερη για μαθητές) **Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\lvert f(x)\rvert = 1, \forall x\in[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.** Είναι $$\lvert f(x)\rvert = 1, \forall x\in[\alpha,\beta] \Leftrightarrow f(x)=\pm 1, \forall x\in[\alpha,\beta]$$ Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε $\exists x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=-1$. Τότε, λόγω της συνέχειας της f, από το **Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής**, η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_2)=-1$ και $f(x_1)=1$. Άτοπο, αφού $f([\alpha,\beta]) \subseteq \{\pm 1\}$. Για παράδειγμα, θα υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}\in[-1,1]$, άτοπο.