5.9 ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 68-69 (Βασικά Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων)

1.	Η συνάρτηση είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $f(0)=1>0, f(1)=-2<0$ και αρα $f(0)\cdot f(1)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.
2.	**(α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $\mathrm{f(x)=x^5-3x-2}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $\mathrm{f}(1)=-4<0$ και $\mathrm{f}(3)=232>0$ και αρα $\mathrm{f}(1)\cdot\mathrm{f}(3)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[1,3]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\mathrm{x_0}\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{f(x_0)}=0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\mathrm{x_0}\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{x_0}^5-3\mathrm{x_0}-2=0$. **(β)** Δοκιμάζουμε τιμές στο διάστημα $(1,3)$: Μια προσεγγιστική τίμη είναι η 1,44.
3.	**(α) ΛΑΘΟΣ:** Για παράδειγμα, η f με τύπο $$f(x)=1,\qquad x\in[0,1]$$ **(β) ΣΩΣΤΟ:** Από το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.
4.	Έχουμε $f(0)=1$ και $f(\pi)=\pi-1$. Άρα $f(0)\neq f(\pi)$. Επίσης, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και το $\lambda=2\in[0,\pi]$, έπεται από το ΘΕΤ ότι υπάρχει $\xi\in[0,\pi]$ με $f(\xi)=2$.
5.	**(α)** Η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$ ως πολυωνυμική. Είναι $\mathrm{f}(0)=1>0$ και $\mathrm{f}(3)=-8<0$ και αρα $\mathrm{f}(0)\cdot\mathrm{f}(3)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[0,3]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\mathrm{x_0}\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $-3x_0+1=0$. **(β)** Η συνάρτηση h είναι συνεχής το διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$. Είναι $\mathrm{h}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ και $\mathrm{h}\left(2\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}<0$ και αρα $\mathrm{h}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\mathrm{h}\left(2\frac{\pi}{3}\right)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την h στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\mathrm{x_0}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{h(x_0)}=0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\mathrm{x_0}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu\mathrm{x_0}=0$.
6.	Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-x^2+3x+1$. Η συνάρτηση είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Είναι $f(-2)=7>0$ και $f(-1)=-2<0$ και αρα $f(-2)\cdot f(-1)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-2,-1]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0\in(-2,-1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0\in(-2,-1)$ τέτοιο ώστε $x_0{}^4-x_0{}^2+3x_0+1=0$. Επίσης, $f(-1)=-2<0$ και $f(0)=1>0$ και αρα $f(-1)\cdot f(0)<0$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano για την f στο διάστημα $[-1,0]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$, δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $x_1{}^4-x_1{}^2+3x_1+1=0$. Έτσι, η εξίσωση $x^4-x^2+3x+1=0$ έχει τουλάχιστον 2 λύσεις στο διάστημα $(-2,0)$.
7.	**(α)** Είναι $g(0)=(0-1)\cdot f(0)-2=-f(0)-2$ και $g(1)=(1-1)\cdot f(1)-2=-2$. Έτσι, $$g(0)\cdot g(1)=2(f(0)+2).$$ Αλλά $R(f)=[-5,-3]$ και αρα $$-5\le f(0)\le -3\Rightarrow -3\le f(0)+2\le -1$$ $$\Rightarrow g(0)\cdot g(1)\le -2<0$$ **(β)** Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, έπεται ότι και η g (ως σύνθεση συνεχών) είναι συνεχής

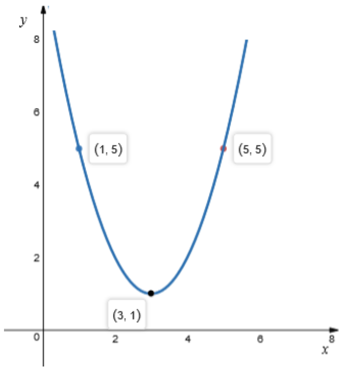
στο [0,1].

(γ) Από τα προηγούμενα δυο ερωτήματα, έχουμε ότι ικανοποιείται το Θεώρημα του Bolzano για την f στο διάστημα [0,1]: δηλ. υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

(δ) Έχουμε ότι αν $x \in (0,1)$, τότε $(x-1) \in (-1,0)$. Το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα.

8. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2-6x+10$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα [1,5]. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο (κλειστό) διάστημα [1,5]. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε αλγεβρικούς χειρισμούς, είτε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γράφημα αυτής αποτελεί παραβολή. Με τον πρώτο τρόπο:

$$f(x)=x^2-6x+10=(x-3)^2+1 \quad (\mathbf{1})$$



και αρα $x \in [1,5] \Rightarrow (x-3) \in [-2,2] \Rightarrow (x-3)^2 \in [0,4] \Rightarrow \underbrace{((x-3)^2+1)}_{f(x)} \in [1,5]$, δηλ. $f_{μέγ.}=5$ και $f_{ελ.}=1$. Με το δεύτερο τρόπο, από την (**1**) παρατηρούμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι στο σημείο (3,1) στην οποία λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή (άσχετα αν αυτή περιοριστεί στο διάστημα [1,5]), δηλ. $f_{ελ.}=1$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(1)=5=f(5)$ και αρα, αφού τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, ότι $f_{μέγ.}=f(1)=f(5)=5$.

9. **(α)** $f_2(x)=3x+2, x \in [0,3]$. Αν $0 \le x \le 3 \Rightarrow 0 \le 3x \le 9 \Rightarrow 2 \le \underbrace{3x+2}_{f_2(x)} \le 11$ και αρα $R(f)=[2,11]$. Συγκεκριμένα, $f_1(0)=2$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και $f_1(3)=11$ είναι η μέγιστη τιμή της. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

(β) $f_3(x)=x^2+x+1, x \in [-1,4]$. Γράφουμε $f_3(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}, x \in [-1,4]$. Το γράφημα της συνάρτησης $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ εκφράζει παραβολή με ελάχιστη τιμή την $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$. Τότε, αν $-1 \le x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow \underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{4}} \le f(x) \le \underbrace{f(-1)}_{1}$ ενω αν $-\frac{1}{2} \le x \le 4 \Rightarrow \underbrace{f\left(-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{4}} \le f(x) \le \underbrace{f(4)}_{21}$. Η ένωση των διαστημάτων $\left[\frac{3}{4},1\right]$ και $\left[\frac{3}{4},21\right]$, δηλ. το $\left[\frac{3}{4},21\right]$ είναι το σύνολο τιμών της f_3. Συγκεκριμένα, $f_3\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και $f_3(4)=21$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής. **Παρατηρήστε** ότι $f_3(-1)=1=f_3(0)$.

(γ) $f_4(x)=συνx, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Ξέρουμε από τη θεωρία ότι αν $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, τότε $συν\frac{\pi}{2} \le συνx \le συν0$, δηλ. $0 \le συνx \le 1$ και αρα $R(f_4)=[0,1]$. Συγκεκριμένα, $f_4(0)=1$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και $f_4\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με το Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής.

10.	$f:[3,7]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αφού m είναι η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της f αντίστοιχα, τότε $m\le f(x)\le M, \forall x\in[3,7]$. Έτσι, $$\begin{cases}3\in[3,7]\Rightarrow m\le f(3)\le M\Rightarrow 3m\le 3f(3)\le 3M\\ 7\in[3,7]\Rightarrow m\le f(7)\le M\Rightarrow 7m\le 7f(7)\le 7M\end{cases}$$ $$\Rightarrow \underbrace{3m+7m}_{10m}\le 3f(3)+7f(7)\le \underbrace{3M+7M}_{10M}$$ $$\Rightarrow \frac{10m}{10}\le\frac{3f(3)+7f(7)}{10}\le\frac{10M}{10}$$ $$\Rightarrow m\le\frac{3f(3)+7f(7)}{10}\le M$$