

## 5.8 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Δραστηριότητες σελ. 61 (Συνεχείς συναρτήσεις)

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | <p>(α) Η συνάρτηση <math>f(x) = x^5 - 3x^2</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math> είναι (παντού) συνεχής ως <b>πολυωνυμική</b>.</p> <p>(β) Η συνάρτηση <math>g(x) = \frac{x^2-2}{x+1}</math> έχει Π.Ο. το σύνολο <math>\mathbb{R} - \{-1\}</math> στο οποίο είναι συνεχής ως <b>ρητή</b>.</p> <p>(γ) Η συνάρτηση <math>h(x) = \eta\mu x</math> είναι (παντού) συνεχής (δες θεωρία).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 2. | <p>Η συνάρτηση <math>f</math> είναι συνεχής στα διαστήματα <math>(-\infty, -1)</math>, <math>[-1, 0)</math>, <math>[0, 3)</math> και <math>(3, +\infty)</math> αφού:</p> $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x),$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ <p>Είναι</p> $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ <p>και αρα</p> $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2,$ <p>αλλά</p> $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \neq 4 = f(3)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 3. | <p>(α) <b>ΣΩΣΤΟ</b>: Θεωρία</p> <p>(β) <b>ΛΑΘΟΣ</b>: Για παράδειγμα, έστω οι συναρτήσεις <math>f</math> και <math>g</math> με τύπους</p> $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ <p>αντίστοιχα. Τότε η <math>f + g</math> είναι καλά ορισμένη αφού <math>D(f) = \mathbb{R} = D(g)</math> με</p> $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ <p>αλλά και η <math>f</math> και η <math>g</math> δεν είναι συνεχείς σε όλο το Π.Ο. τους. Συγκεκριμένα έχουν ένα μόνο σημείο ασυνέχειας, το <math>x = 0</math>:</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$ <p>και</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ <p>και</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-1) = -1$ <p>(γ) <b>ΛΑΘΟΣ</b>: Δεν αρκεί. Πρέπει (όπως είδαμε) να ισχύει επιπλέον και</p> $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$ |
| 4. | <p>(α) Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη αφού <math>Z(f) = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}</math> δηλ. οι ρίζες της εξίσωσης <math>\eta\mu x = 0</math> δεν ανήκουν στο δοθέν σύνολο. Στο Π.Ο. της είναι συνεχής συνάρτηση ως <b>πηλίκο</b> συνεχών συναρτήσεων.</p> <p>(β) Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο σύνολο <math>[0, +\infty)</math>. Επίσης είναι συνεχής στο Π.Ο. της ως άθροισμα 2 τέτοιων:</p> <p>Η <math>x \mapsto  \sin x </math> είναι <b>σύνθεση</b> της <math>x \mapsto \sin x</math> και της <math>x \mapsto  x </math> οι οποίες είναι συνεχείς συναρτήσεις από τη θεωρία.</p> <p>Η <math>x \mapsto \sqrt[3]{x}</math> είναι συνεχής από τη θεωρία (στο σύνολο που μας δόθηκε).</p> <p>(γ) Είναι <math>D(f) = \mathbb{R} - \left\{3x^2 - 5 = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}</math>. Στο σύνολο αυτό, η <math>f</math> είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων.</p>                                                                                                                                                                                                                                                            |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. | <p>(α) Για <math>x &lt; 0</math> είναι <math>f(x) = x^2 - 2</math> και αρα στο σύνολο <math>(-\infty, 0)</math> είναι συνεχής ως <b>πολυωνυμική</b>. Ομοίως, για <math>x &gt; 0</math> είναι <math>f(x) = x + 1</math> και αρα στο σύνολο <math>(0, +\infty)</math> είναι συνεχής ως <b>πολυωνυμική</b>. Μένει ο έλεγχος της συνέχειας στο σημείο <math>x = 0</math>: Είναι <math>f(0) = 0 + 1 = 1</math> και</p> $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2) = -2$ <p>και</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$ <p>Άρα αφού <math>\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)</math>, έπεται ότι η συνάρτηση <b>δεν</b> είναι συνεχής στο σημείο <math>x = 0</math>. Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι η <math>f</math> είναι συνεχής στο σύνολο <math>\mathbb{R}_+</math>.</p> <p>(β) Κατ' αρχάς, για <math>x &lt; -1</math> είναι <math>(-16x) &gt; 16 &gt; 0</math> και αρα η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο σύνολο <math>(-\infty, -1)</math>. Επίσης,</p> $g(x) = \begin{cases} \sqrt{-16x}, & x < -1 \\ 4, & x = -1 \\ 3 - x, & -1 < x < 3 \\ x - 3, & x > 3 \end{cases}$ <p>Παρατηρούμε ότι στο διάστημα <math>(-\infty, -1)</math> η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων (ποιών), στο διάστημα <math>(-1, 3)</math> είναι συνεχής ως πολυωνυμική όπως επίσης και στο διάστημα <math>(3, +\infty)</math>. Μένει να ελέγξουμε τη συνέχεια στα σημεία <math>x = -1</math> και <math>x = 3</math> του Π.Ο. της. Είναι</p> $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{-16x} = \sqrt{16} = 4,$ $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - x) = 4$ <p>και αρα το <math>\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 4 = g(-1)</math>. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο <math>x = -1</math>. Τέλος,</p> $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - x) = 0,$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 3) = 0$ <p>και αρα το <math>\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0 = g(0)</math>. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο <math>x = 0</math>. Διαφορετικά, αυτό έπεται απευθείας από τη συνέχεια της <math>x \mapsto  x - 3 </math> στο σημείο <math>x = 3</math>. Έτσι, η συνάρτηση <math>g</math> είναι παντού συνεχής στο <math>\mathbb{R}</math>.</p> |
| 6. | <p>Για οποιεσδήποτε τιμές των <math>\alpha</math> και <math>\beta</math>, η συνάρτηση είναι συνεχής στα διαστήματα <math>(-\infty, -5)</math>, <math>(-5, 2)</math> <math>(2, +\infty)</math> ως πολυωνυμική σε κάθε ένα από αυτά. Για να είναι συνεχής και στα σημεία <math>x = -5, 2</math> πρέπει το <math>\lim_{x \rightarrow -5} f(x)</math> να υπάρχει και να είναι ίσο με <math>f(-5)</math> και το <math>\lim_{x \rightarrow 2} f(x)</math> να υπάρχει και να είναι ίσο με <math>f(2)</math>. Είναι</p> $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -5^-} (\alpha x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x^2 + 2x) \Leftrightarrow -5\alpha = 15 \Leftrightarrow \alpha = -3$ <p>και</p> $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\beta x}{2} - \alpha \right) \Leftrightarrow \frac{\beta 2}{2} - \alpha = 8 \Leftrightarrow \beta + 3 = 8 \Leftrightarrow \beta = 5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |