5.7 ΟΡΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 52 (Όρια τριγωνομετρικών συναρτήσεων)

1.

(α) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^4}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pi}x^4}{\lim\limits_{x\to\pi}\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{\pi^4}{\sigma\upsilon\nu\pi}=-\pi^4$

αφού τα $\lim\limits_{x\to\pi}x^4$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\sigma\upsilon\nu x$ υπάρχουν
και ισούνται με π^4 και $\sigma\upsilon\nu\pi=-1$ αντίστοιχα.

(β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\eta\mu x}{\lim\limits_{x\to0}(x+1)}=0$

αφού τα $\lim\limits_{x\to0}\eta\mu x$ και $\lim\limits_{x\to0}(x+1)$
υπάρχουν και ισούνται με $\eta\mu0=0$ και $0+1=1$ αντίστοιχα.

(γ) $\lim\limits_{x\to0}\tau\epsilon\mu x=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu0}=1$

αφού τα $\lim\limits_{x\to0}1$ και $\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu x$ υπάρχουν και

ισούνται με 1 και $\sigma\upsilon\nu0=1$ αντίστοιχα.

2.

α) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu(3x)}{x}=3\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu(3x)}{3x}=3\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu(u)}{u}=3\cdot1=3$

(αφού το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}$ υπάρχει και ισούται με 1, τότε $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\eta\mu(x)}{x}=1$)

(β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(2x)}{\eta\mu(4x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{4}\dfrac{\frac{\eta\mu(2x)}{2x}}{\frac{\eta\mu(4x)}{4x}}=\dfrac{2}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\eta\mu(2x)}{2x}}{\frac{\eta\mu(4x)}{4x}}$

$=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(2x)}{2x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(4x)}{4x}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{1}{2}$

(γ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi(2x)}{x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi(2x)}{2x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu(2x)}{2x\sigma\upsilon\nu(2x)}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\eta\mu(2x)}{2x}}{\sigma\upsilon\nu(2x)}=2\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(2x)}{2x}}{\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu(2x)}$

$=2\dfrac{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu(2x)}=2\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu(2\cdot0)}=2\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu0}=2$

αφού τα $\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to0}\sigma\upsilon\nu(2x)$ υπάρχουν και ισούνται με 1 και συν0 = 1 αντίστοιχα.

(δ) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x^3-4x^2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x^2(x-4)}=\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\eta\mu(x-4)}{x-4}\right)$

Όμως,

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to4}x^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}\ \text{και}\ \lim_{x\to4}\frac{\eta\mu(x-4)}{x-4}=\lim_{u\to0}\frac{\eta\mu(u)}{u}=1$$

(εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $u(x)=x-4$). Άρα

$$\left(\lim_{x\to4}\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\lim_{x\to4}\frac{\eta\mu(x-4)}{x-4}\right)=\frac{1}{16}$$

(ε) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2=1^2=1$ (κατα τα γνωστά)

(στ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(2x)}{x\cdot \eta\mu(2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\eta\mu^2 x}{x\cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)$

και κατα τα γνωστά,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$$

3.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0$. Είναι $-1\le \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\le 1,\quad x\neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας με x^4, παίρνουμε (για $x\neq 0$)

$$\underbrace{-x^4}_{g(x)}\cdot\le\underbrace{x^4\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}_{f(x)}\le\underbrace{x^4}_{h(x)}\cdot$$

Αλλά, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ και $\lim_{x\to 0} h(x)=0$ και άρα, από το Κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι και $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, δηλ.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} x^4\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)=0.}$$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}}{\frac{x-5}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\eta\mu x}{x}}{1-\frac{5}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)}=0,$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)=1$

Απόδειξη του πρώτου ισχυρισμού: Είναι $-1\le\eta\mu x\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Αν $x>0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{x}$, παίρνουμε

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{g(x)}\le\underbrace{\frac{1}{x}\cdot\eta\mu(x)}_{f(x)}\le\underbrace{\frac{1}{x}}_{h(x)}\cdot$$

Αλλά, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$ και $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$ και άρα, από το Κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι και $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$, δηλ.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0.}$$

(γ) Είναι $-1\le\sigma\upsilon\nu(3x)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Αν $x<0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{x^3+x}$, παίρνουμε

$$\underbrace{-\frac{1}{x^3+x}}_{g(x)}\le\underbrace{\frac{\sigma\upsilon\nu(3x)}{x^3+x}}_{f(x)}\le\underbrace{\frac{1}{x^3+x}}_{h(x)}\cdot$$

Αλλά, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ και $\lim_{x\to-\infty} h(x)=0$ και άρα, από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, δηλ.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(3x)}{x^3+x}=0.}$$

(δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=(x^2-2x+1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right),\qquad x\neq 1.$$

Είναι για κάθε $x\neq 1$

$$f(x)=(x^2-2x+1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)=(x-1)^2\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Έχουμε: $-1\le\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)\le 1,\ \ \forall x>1$. Άρα, αν $x>1$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $(x-1)^2>0$, παίρνουμε

$$\underbrace{-(x-1)^2}_{g(x)}\le\underbrace{(x-1)^2\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)}_{f(x)}\le\underbrace{(x-1)^2}_{h(x)}$$

Άρα, $(x^2-2x+1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$. Ομοίως, δείχνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2x+1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)=0$. Έτσι,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x-1}\right)=0.}$$