5.6 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Δραστηριότητες σελ. 45-46 (Όριο συνάρτησης στο άπειρο)

1.

$(\boldsymbol{\alpha})\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty, \qquad (\boldsymbol{\beta})\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^7 = -\infty$

$(\boldsymbol{\gamma})\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 = +\infty, \qquad (\boldsymbol{\delta})\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$(\boldsymbol{\varepsilon})\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \qquad (\boldsymbol{\sigma\tau})\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^5} = 0$

2.

(α) ΛΑΘΟΣ. Για παράδειγμα η $f(x) = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$.

(β) ΣΩΣΤΟ: Για παράδειγμα το πολυώνυμο $p(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

(γ) ΣΩΣΤΟ:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^6}$$

3.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

4.

$(\boldsymbol{\alpha}) \lim\limits_{x\to-\infty} (5x^4 + 3x^2 - 3x - 3) = \lim\limits_{x\to-\infty} (5x^4) = 5 \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

$(\boldsymbol{\beta}) \lim\limits_{x\to+\infty} (2x - 3x^4) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^4) = -3 \lim\limits_{x\to+\infty} (x^4) = -3(+\infty) = +\infty$

$(\boldsymbol{\gamma}) \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^5 - 3x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$(\boldsymbol{\delta})\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2 - x - 7} = 3 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$(\boldsymbol{\varepsilon}) \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4 - x^{10}}{x^3 + 5x^{10}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^{10}}{5x^{10}} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$

$(\boldsymbol{\sigma\tau})\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^7 - x^4}{x - 2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^7}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$

5.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha x^3 + 2x^2 + 2}{1 - x^2 - x^3} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\alpha x^3}{-x^3} = 4 \Leftrightarrow \alpha \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x^3} = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 4}$$

6.

(α) Έχουμε

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 4} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} (3x^2 - 5x + 4)} = +\infty$$

(β) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty) + (-\infty)$. Άρα εφαρμόζουμε τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας (συζυγή παράσταση)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2-x^2}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = 0$$

(γ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Άρα εφαρμόζουμε τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας. Αφού $x \to +\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε για αρκετά μεγάλα x ότι $|x| = x$.

Έτσι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= 3\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 3\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

$$= 3\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{1} = 3\sqrt{1} = 3$$

(δ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)+(-\infty)$. Άρα εφαρμόζουμε *τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας* (συζυγή παράσταση)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+1-(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}$$

Αφού $x \to -\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε για αρκετά μεγάλα x ότι $|x| = -x$. Έτσι το πιο πάνω γίνεται

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 2\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

7. Έχουμε: (υποθέτουμε ότι $\alpha\beta \neq 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2+3\alpha x+\beta}{\beta x^2-4\alpha x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2}{\beta x^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$$

και

	$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha^2-x^2}{\alpha\beta^2-x\beta^2}=6\Leftrightarrow\lim_{x\to\alpha}\frac{(a-x)(a+x)}{\beta^2(a-x)}=6$$ $$\Leftrightarrow\frac{1}{\beta^2}\lim_{x\to+\infty}(a+x)=6\Leftrightarrow\frac{2\alpha}{\beta^2}=6\Leftrightarrow\alpha=3\beta^2$$ Άρα, $\beta^2=\beta$ και αρα $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{1}$ (αφού $\beta\neq 0$) και $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{3}$.
8.	Έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)+(-\infty)$. Άρα εφαρμόζουμε τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας (συζυγή παράσταση): $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{\sqrt{x+1}+1}\right)$$ $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\sqrt{x-1}+1}-\sqrt{\sqrt{x+1}+1}\right)\left(\sqrt{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+1}\right)}{\sqrt{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}$$ $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}+1-\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\sqrt{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}$$ $$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}$$ το οποίο αποτελεί απροσδιόριστη μορφή. Εφαρμόζουμε (ξανά) τεχνική απαλοιφής της απροσδιοριστίας (συζυγή παράσταση) και βρίσκουμε ότι το όριο = 0.