5.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 27-28 (Ιδιότητες ορίων)

1.

(α) Είναι

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5)=2^2-5=-1$$

(β) Είναι

$$\lim_{x\to 0}(x^{10}-5x^4+3x^2-7x+3)=0^{10}-5\cdot 0^4+3\cdot 0^2-7\cdot 0+3=3$$

(γ) Αφού το $\lim_{x\to -1}(2x+1)$ **υπάρχει** και είναι ίσο με $2\cdot(-1)+1=-1\neq 0$, έπεται από τη γνωστή μας ιδιότητα[1] ότι

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2)}{\lim\limits_{x\to -1}(2x+1)}=\frac{(-1)^3-(-1)^2}{-1}=2$$

(δ) Αφού το $\lim_{x\to 3}(x+2)$ **υπάρχει** και είναι ίσο με $3+1=4\neq 0$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 3}\frac{5}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}5}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)}=\frac{5}{5}=1$$

και αρα, αφού το ανωτέρω όριο υπάρχει, όπως επίσης και το $\lim\limits_{x\to 3}x^2=3^2=9$, έπεται από τη γνωστή μας πρόταση ότι το $\lim_{x\to 3}\left(x^2-\frac{5}{x+2}\right)$ **υπάρχει** και είναι ίσο με

$$\lim_{x\to 3}x^2-\lim_{x\to 3}\frac{5}{x+2}=9-1=8$$

2.

(α) ΣΩΣΤΟ: Αφού τα 2 όρια υπάρχουν, από την πρότασή μας, έχουμε ότι και το όριο $\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει και είναι ίσο με το

$$\lim_{x\to 3}f(x)+\lim_{x\to 3}g(x)$$

Αλλά, αφού $\lim_{x\to 3}f(x)=-4$ και $\lim_{x\to 3}g(x)=4$, έπεται ότι

$$\lim_{x\to 3}[f(x)+g(x)]=0.$$

(β) ΛΑΘΟΣ: Για παράδειγμα, αν $g(x)=-2, \forall x\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\frac{1}{2-x}$.

(γ) ΣΩΣΤΟ: Είναι Πρόταση.

3.

Έχουμε

(α) $$\lim_{x\to 4}(x^2-4x+1)^5=\left(\lim_{x\to 4}(x^2-4x+1)\right)^5=(4^2-4\cdot 4+1)^5=1$$

(β) $$\lim_{x\to -5}|x^2-3x+1|=\left|\lim_{x\to -5}(x^2-3x+1)\right|=|(-5)^2-3\cdot(-5)+1|=|41|=41$$

(γ) $$\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{x^2+4}=\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x^2+4)}=\sqrt[3]{(-2)^2+4}=\sqrt[3]{8}=2$$

αφού το $\nu=3$ είναι περιττός αριθμός

(δ) $$\lim_{x\to 0}\frac{|x-2|}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}|x-2|}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}=\frac{\left|\lim\limits_{x\to 0}(x-2)\right|}{\lim\limits_{x\to 0}(x+1)}$$

[1] Έστω $c\in\mathbb{R}$. Έστω $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ (I διάστημα) συναρτήσεις και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του I τέτοιο ώστε τα όρια $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)$ να υπάρχουν. Τότε, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}$, αν $\lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0$ και $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x)$

$$= \frac{|0-2|}{0+1} = 2$$

αφού ο παρονομαστής δε μηδενίζεται στο $x = 0$

4. Αφού τα όρια $\lim_{x\to -2} f(x)$ και $\lim_{x\to -2} g(x)$ υπάρχουν, εφαρμόζουμε απευθείας την Πρόταση:

(α) $\lim\limits_{x\to -2}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim\limits_{x\to -2} f(x) - \lim\limits_{x\to -2} g(x)$
$= \ 1-(-3) \ = \ 4$

(β) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{6f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to -2}[6f(x)]}{\lim\limits_{x\to -2} g(x)}$

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to -2} f(x)}{\lim\limits_{x\to -2} g(x)} = \frac{6\cdot 1}{-3} = -2$$

(γ) $\lim\limits_{x\to -2}(f^{10}(x)\cdot |g(x)|)$
$= \left(\lim\limits_{x\to -2}\big(f^{10}(x)\big)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to -2}(|g(x)|)\right)$

$$= \left(\lim_{x\to -2}\big(f(x)\big)\right)^{10}\cdot\left(\left|\lim_{x\to -2} g(x)\right|\right) = 1^{10}\cdot|-3| = 3$$

(δ) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[7]{\big(3f(x)\big)+g(x))}$

αφού το $\nu = 7$ είναι περιττός αριθμός

$$= \sqrt[7]{3\lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} g(x)} = \sqrt[7]{3\cdot 1+(-3)} = 0$$

5. **(α)** Έχουμε

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2-x) = 2^2-2 = 4-2 = 2$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(3x-4) = 3\cdot 2-4 = 2$$

και άρα το $\lim_{x\to 2} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 2

(β) Αφού

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, x\le 2 \\ \\ 2-x, x>2 \end{cases}, \quad \text{έπεται ότι}$$

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|, x\le 3 \\ \\ \dfrac{3}{x}+1, x>3 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & 2\le x\le 3 \\ 2-x, & x<2 \\ \dfrac{3}{x}+1, x>3 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x-2) = 3-2 = 1$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{3}{x}+1\right) = \frac{3}{3}+1 = 2$$

και αρα αφού

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x),$$

έπεται ότι το όριο $\lim_{x\to 3} f(x)$ δεν υπάρχει.

6. Έχουμε:

(α) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3}(x+1) = 3+1 = 4$

(β) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^2+3x+9)}{\lim_{x\to 3}(x+3)}$

$=\frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

(γ) $f(x)=\frac{|x|}{x}$. Τότε $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$. Είναι

$$\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x}, x>0\\ -\frac{x}{x}, x<0\end{cases}=\begin{cases}1, x>0\\ -1, x<0\end{cases}$$

και αρα

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

Έτσι, αφού $\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)$, έπεται ότι το όριο $\lim_{x\to 0}f(x)$ δεν υπάρχει.

(δ) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

Αφού ο παρονομαστής δε μηδενίζεται στο $x=1$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}1}$

$=\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1}x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$

(ε) $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x^2+x)(\sqrt{x^2+3}-2)}$

Αφού ο παρονομαστής μηδενίζεται στο $x=-1$, πολλαπλασιάζω με συζυγή παράσταση

$=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3-4}{(x^2+x)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$

Αφού ο παρονομαστής δε μηδενίζεται στο $x=-1$,

$=\frac{\lim_{x\to -1}(x-1)}{\left(\lim_{x\to -1}x\right)\left(\lim_{x\to -1}(\sqrt{x^2+3}+2)\right)}$

$=\frac{-2}{(-1)\left(\sqrt{\lim_{x\to -1}(x^2+3)}+2\right)}=\frac{1}{2}$

(στ) $f(x)=\frac{|x-2|+x^2-4}{x-2}$. $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. Αφού

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, x>2\\ 2-x, x\leq 2\end{cases}$$

έπεται ότι

$$\frac{|x-2|+x^2-4}{x-2}=\begin{cases}\frac{x-2+x^2-4}{x-2}, x>2\\ \frac{2-x+x^2-4}{x-2}, x<2\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, x>2 \\ \\ \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, x<2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}, x>2 \\ \\ \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}, x<2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+3, x>2 \\ \\ x+1, x<2 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|+x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+1) = 3$$

και

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|+x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+3) = 5$$

Έτσι, το $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|+x^2-4}{x-2}$ δεν υπάρχει.

7. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 4 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = 4$$

Αλλά

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to -1^-}(2\alpha x+\beta) = \lim_{x\to -1^-}(\alpha x^2+\beta x) \Leftrightarrow -2\alpha = \alpha - \beta \Leftrightarrow \beta = 3\alpha$$

Αλλά

$$\lim_{x\to -1^-}(2\alpha x+\beta) = \lim_{x\to -1} f(x) \Leftrightarrow -2\alpha = 12 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = -3}$$

και $\boldsymbol{\beta = 3\alpha = -12}$.