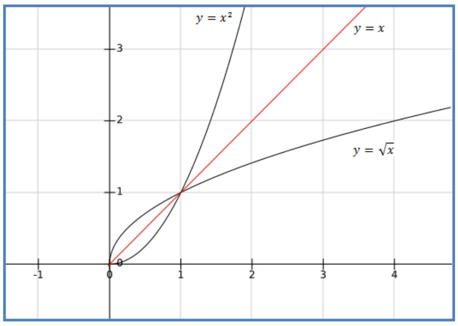
3.12 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Δραστηριότητες σελ. 166 (Αντίστροφη συνάρτηση)

1.	❶ 1ος τρόπος $$y = x^2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{y}) \vee (x = -\sqrt{y})$$ αλλά, αφού $x \in [0, +\infty)$, έπεται ότι $x = \sqrt{y}$ και άρα η f είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την $$g: [0, +\infty) \to [0, +\infty) \text{ με } g(x) = \sqrt{x}$$ 2ος τρόπος Η f είναι επί αφού $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$. Είναι και 1-1 (κατα τα γνωστά). Έτσι, η f είναι αντιστρέψιμη και όπως πρίν βρίσκουμε τον τύπο της. 
2.	(α) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ με $A = \mathbb{R} - \{-3\}$ 1ος τρόπος $$f: \mathbb{R} - \{-3\} \to f(A) \quad με \quad f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$ Είναι επί. Θα δείξουμε οτι είναι και 1-1: Έστω $x_1, x_2 \neq -3$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι $$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 3} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 3}$$ $$\Leftrightarrow (2x_1 - 1)(x_2 + 3) = (2x_2 - 1)(x_1 + 3)$$ $$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + 6x_1 - x_2 - 3 = 2x_2x_1 + 6x_2 - x_1 - 3$$ $$\Leftrightarrow 6x_1 - x_2 = 6x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$ και άρα είναι (και) 1-1. Συνεπώς αντιστρέφεται. Θα βρούμε το $f(\mathbb{R} - \{-3\})$. Έχουμε: $$w \in f(\mathbb{R} - \{-3\}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} - \{-3\}: f(x) = w$$ $$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} - \{-3\}: \frac{2x-1}{x+3} = w$$ $$\Leftrightarrow w(x+3) = 2x - 1$$ $$\Leftrightarrow wx + 3w = 2x - 1$$ $$\Leftrightarrow x = \frac{3w+1}{2-w}$$ Παρατηρούμε ότι $x = -3 \Leftrightarrow w = 2$. Άρα, $f(\mathbb{R} - \{-3\}) = \mathbb{R} - \{2\}$ και η αντίστροφη της f είναι η $$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-3\} \quad με \quad g(w) = \frac{3w+1}{2-w}$$ 2ος Τρόπος Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$. $$y = \frac{2x-1}{x+3} \Leftrightarrow y(x+3) = 2x - 1 \Leftrightarrow yx + 3y = 2x$$ $$\Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{2-y}, \qquad (y \neq 2)$$ Παρατηρούμε οτι σε κάθε x του Π.Ο. αντιστοιχεί ένα μόνο y του Σ.Τ. (Για $x = -3$, η πιο πάνω σχέση δίνει 0=−7, άτοπο) Έτσι, το Σ.Τ. της είναι το $\mathbb{R} - \{2\}$ και η f είναι αντιστρέψιμη με την

αντίστροφή της την

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{-3\} \ \ \mu\varepsilon \ \ g(y) = \frac{3y+1}{2-y}$$

(β) $f: A \to f(A) \ \ \mu\varepsilon \ \ f(x) = \sqrt{x+2}$

1ος τρόπος

Καταρχάς, $A = [-2, +\infty)$. Είναι επί. Θα δείξουμε οτι είναι 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in [-2, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2} \Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

και άρα είναι (και) 1-1. Συνεπώς αντιστρέφεται. Θα βρούμε το $f([-2, +\infty))$. Έχουμε:

$$w \in f([-2, +\infty)) \Leftrightarrow \exists x \in [-2, +\infty): f(x) = w$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in [-2, +\infty): \sqrt{x+2} = w$$

$$\Leftrightarrow w \geq 0$$

Αλλά,

$$\sqrt{x+2} = w \Leftrightarrow x = w^2 - 2 \geq -2 \Leftrightarrow w^2 \geq 0 \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}.$$

Άρα, τελικά, $f([-2, +\infty)) = [0, +\infty)$ και η αντίστροφη της f ειναι η

$$g: [0, +\infty) \to [-2, +\infty) \ \ \mu\varepsilon \ \ g(w) = w^2 - 2$$

2ος Τρόπος

Έστω η συνάρτηση $f: [-2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x+2}$. Η f είναι 1-1 (όπως πρίν). Τώρα,

$$y = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2$$

Αλλά, $x \geq -2 \Rightarrow y^2 - 2 \geq -2 \Rightarrow y^2 \geq 0$ η οποία ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Όμως, $y = \sqrt{x+2} \geq 0, \forall x \in [-2, +\infty)$. Άρα, $f([-2, +\infty)) = [0, +\infty)$ και η αντίστροφη της f ειναι η

$$g: [0, +\infty) \to [-2, +\infty) \ \ \mu\varepsilon \ \ g(w) = w^2 - 2$$

(γ) $f: (3, +\infty) \to f\big((3, +\infty)\big) \ \ \mu\varepsilon \ \ f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

Η f είναι καλά ορισμένη, αφού $x > 3$. (προφανώς είναι και επί). Θα δείξουμε οτι είναι 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in (3, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-3} = \frac{x_2+2}{x_2-3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

και άρα είναι (και) 1-1. Συνεπώς αντιστρέφεται. Θα βρούμε το $f\big((3, +\infty)\big)$. Έχουμε:

$$w \in f\big((3, +\infty)\big) \Leftrightarrow \exists x \in (3, +\infty) : f(x) = w$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in (3, +\infty) : \frac{x+2}{x-3} = w$$

Αλλά, για το $x \in (3, +\infty)$,

$$\frac{x+2}{x-3} = w \Leftrightarrow x = \frac{3w+2}{w-1} \Leftrightarrow \frac{3w+2}{w-1} > 3$$

Θα πρέπει $w \neq 1$. Έχουμε

$$\frac{3w+2}{w-1} > 3 \Leftrightarrow \frac{3w+2}{w-1} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{w-1} > 0 \Leftrightarrow w > 1$$

Συνεπώς, $f(3, +\infty) = (1, +\infty)$ και άρα η αντίστροφη της f ειναι η

$$g: (1, +\infty) \to (3, +\infty) \ \ \mu\varepsilon \ \ g(w) = \frac{3w+2}{w-1}$$

(δ) $f(x) = \frac{1}{x-2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$

$$y = \frac{1}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = 1 \Leftrightarrow yx - 1 = 2y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y}, \qquad (y \neq 0)$$

Παρατηρούμε οτι σε κάθε x του Π.Ο. αντιστοιχεί ένα μόνο y του Σ.Τ. (Για $x = 2$ η πιο πάνω σχέση δίνει 0=1, άτοπο) Έτσι, το Σ.Τ. της είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$ και η f είναι αντιστρέψιμη με την αντίστροφή της την

$$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{2\} \ \ \mu\varepsilon \ \ g(y) = \frac{2y+1}{y}$$

(ε) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in [2, +\infty)$

<u>Η f είναι 1-1:</u>

Έστω $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 - 4x_1 + 3 = x_2^2 - 4x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = 0.$$

Άρα, είτε $x_1 - x_2 = 0$, δηλαδή $x_1 = x_2$ είτε $x_1 + x_2 - 4 = 0$, δηλαδή $x_1 + x_2 = 4$. Αλλά η μόνη περίπτωση να ισχύει το τελευταίο (αφού $x_1, x_2 \geq 4$) είναι όταν $x_1 = x_2 = 2$.
Άρα η f είναι 1-1.
Συνεπώς f 1-1 και επί, άρα αντιστρέφεται.

<u>Εύρεση της f^{-1}:</u>

$$y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

Για να έχει πραγματικές λύσεις η πιο πάνω, πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16 - 12 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $[-1, +\infty)$.
Τώρα,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{1 + y}}{2} = 2 \pm \sqrt{1 + y}$$

και αφού $x \geq 2$, παίρνουμε το $x = 2 + \sqrt{1 + y}$.

Συνεπώς, η αντίστροφη της f ειναι η

$$f^{-1}: [-1, +\infty) \to [2, +\infty) \quad \mu\varepsilon \ f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{1 + x}.$$

(στ) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

Καταρχάς, είναι $A = \mathbb{R}$ αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + |x| \neq 0$. Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε οτι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, \alpha\nu\ x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x}, \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$$

Για $x \geq 0$, είναι

$$y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y(1 + x) = x \Leftrightarrow y + yx - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(y - 1) = -y \Leftrightarrow x = -\frac{y}{y - 1} = \frac{y}{1 - y}$$

Είναι λάθος να πούμε οτι ΜΟΝΟΣ περιορισμός για το y είναι ο $y \neq 1$, γιατί τότε το σύνολο $\{x \geq 0\}$ ΔΕ θα απεικονίζεται με μοναδικό (1-1) τρόπο στο πεδίο τιμών της f, αφού τιμές στο σύνολο θα συμπίπτουν με τιμές του πεδίου τιμών του άλλου κλάδου. Για να βρούμε το σωστό πεδίο τιμών της, λαμβάνουμε υπόψιν τον περιορισμό $x \geq 0$:

$$x = \frac{y}{1-y} \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0,1).$$

Για $x < 0$, είναι

$$y = \frac{x}{1 - x} \Rightarrow y(1 - x) = x \Rightarrow y - yx - x = 0$$
$$\Rightarrow x(-y - 1) = -y \Rightarrow x = -\frac{y}{-y - 1} = \frac{y}{1 + y}$$
$$x = \frac{y}{1+y} < 0 \Leftrightarrow y \in (-1,0].$$

Έτσι, $f(A) = (-1,1)$ και ότι σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί μόνο ένα y, συνεπώς η f είναι 1-1. Επίσης, η αντίστροφη της f ειναι η

$$g: (-1,1) \to \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon \ g(w) = \begin{cases} \dfrac{w}{1 + w}, & w \in (-1,0] \\ \\ \dfrac{w}{1 - w}, & w \in (0,1) \end{cases}$$

	(ζ) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<1\\ x^2-2x+4, & x\geq 1\end{cases}$ $$=\begin{cases}2x+1, & x<1\\ (x-1)^2+3, & x\geq 1\end{cases}$$ Καταρχάς, είναι $A=\mathbb{R}$. Έστωσαν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ • Αν $x_1<x_2<1$, τότε $f(x_1)=2x_1+1<2x_2+1=f(x_2)$ • Αν $1<x_1<x_2$, τότε $$f(x_1)=(x_1-1)^2+3<(x_2-1)^2+3=f(x_2)$$ • Αν $x_1<1<x_2$, τότε $$f(x_1)=2x_1+1<(x_2-1)^2+3=f(x_2)$$ Σε κάθε περίπτωση, είναι $f(x_2)\neq f(x_1)$ και άρα για διαφορετικά στοιχεία του Π.Ο. λαμβάνουμε διαφορετικά στοιχεία του Σ.Τ. και άρα η f είναι 1-1 και επί και έτσι αντιστρέφεται. Για $x<1$, $y=f(x)=2x+1\Rightarrow\frac{y-1}{2}=x$ και αρα $\frac{y-1}{2}<3\Leftrightarrow y<3$ Για $x\geq 1$, $y=f(x)=(x-1)^2+3\Rightarrow y-3=(x-1)^2\Rightarrow\lvert x-1\rvert=\sqrt{y-3}$ και αφού $x\geq 1$, έπεται ότι $x-1=\sqrt{y-3}$ δηλ. $x=\sqrt{y-3}+1$ με περιορισμό $y\geq 3$. Συνεπώς, $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και η αντίστροφη της f ειναι η $$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \ με\ \ g(w)=\begin{cases}\frac{w-1}{2}, & w<3\\ \sqrt{w-3}+1, & w\geq 3\end{cases}$$
3.	Η f είναι καλά ορισμένη, αφού $x^2+1\neq 0,\forall\,x\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι είναι 1-1: Έστωσαν $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$. Είναι $$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow\frac{2x_1}{{x_1}^2+1}=\frac{2x_2}{{x_2}^2+1}\Leftrightarrow {x_1}^2={x_2}^2$$ $$\Leftrightarrow(x_1=x_2)\ \vee\ (x_1=-x_2)$$ αλλά αφού $x_1,x_2\in[1,+\infty)$, έπεται ότι $x_1=x_2$ Η f είναι επί: αρκεί να δείξουμε ότι $f([1,+\infty))=(0,1]$. Πράγματι, $$w\in f([1,+\infty))\Leftrightarrow\exists x\in[1,+\infty):f(x)=w$$ $$\Leftrightarrow\exists x\in[1,+\infty):\frac{2x}{x^2+1}=w$$ $$\Leftrightarrow\exists x\in[1,+\infty):wx^2-2x+w=0$$ Αντιμετωπίζοντας το τελευταίο ως τριώνυμο με συντελεστές w (σταθεροποιημένο w κάθε φορά) θα πρέπει $\forall w$ να είναι η διακρίνουσά του ≥ 0 ήτοι $$4-4w^2\geq 0\Leftrightarrow w^2-1\leq 0\Leftrightarrow w\in[-1,1]$$ Επίσης, αφού $x\in[1,+\infty)\Rightarrow\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{=w}>0$ και άρα λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς αυτούς για το w έχουμε ότι $w\in(0,1]$. Άρα, η f είναι αντιστρέψιμη. Τέλος, $\frac{4}{5}\in(0,1]$ και $$f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=x\Leftrightarrow\frac{4}{5}=f(x)\Leftrightarrow\frac{4}{5}=\frac{2x}{x^2+1}$$ και λύνουμε την εξίσωση αυτή. Διαφορετικά, βρίσκουμε την αντίστροφη: Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης, λύνουμε την wx^2-2x+w για $x\in[1,+\infty)$: $$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4w^2}}{2w}=\frac{1\pm\sqrt{1-w^2}}{w},\qquad w\in(0,1]$$ και αφού $x\in[1,+\infty)$, έχουμε ότι $$x=\frac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}$$ Άρα, η αντίστροφη της f είναι η $$g:(0,1]\to[1,+\infty)\ \ με\ \ g(w)=\frac{1+\sqrt{1-w^2}}{w}$$ και έτσι $f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=g\left(\frac{4}{5}\right)=2$.

Σημείωση: $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 2x \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq 1$