3.11 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1-1, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ

Δραστηριότητες σελ. 155-156 (Συναρτήσεις 1-1, συναρτήσεις επί)

1.

(α) ΛΑΘΟΣ. [1] Το ότι αν $x_1, x_2 \in D(f)$ με $x_1 = x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ ΔΕΝ συνεπάγεται πως η συνάρτηση f είναι (κατανάγκην) 1-1, αφού αυτό ισχύει για κάθε συνάρτηση (από τον ορισμό μιας αντιστοιχίας ως συνάρτηση).

(β) ΣΩΣΤΟ. Έστωσαν $x_1, x_2 \in (0,3]$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \Leftrightarrow {x_1}^2 - {x_2}^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee (x_1 = -x_2)$.
Αλλά, $x_1, x_2 \in (0,3]$ και άρα $x_1 \neq -x_2$. Συνεπώς, $x_1 = x_2$.

(γ) ΛΑΘΟΣ. Παρατηρούμε ότι $f(-1) = (-1)^2 = 1 = (+1)^2 = f(+1)$. Έτσι, αφού υπάρχουν δύο (τουλάχιστον) σημεία στο πεδίο ορισμού της τα οποία έχουν την ίδια εικόνα, έπεται οτι η f δεν είναι 1-1.΄

(δ) ΛΑΘΟΣ. Δεν ορίζεται πάντα η $f + g$.

(ε) ΛΑΘΟΣ. Παρατηρούμε (π.χ.) ότι $f(-1) = 5 = f(+1)$.

(στ) ΣΩΣΤΟ. Το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$. Πράγματι,

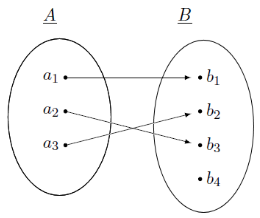
$$w \in f(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: f(x) = w \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x^3 = w$$

Όμως, η εξίσωση $x^3 = w$ (η οποία είναι ισοδύναμη με την $x = \sqrt[3]{w}$) έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$.

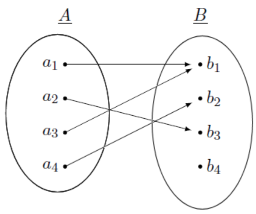
(ζ) ΣΩΣΤΟ. Είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$ [2]

2.

(α) Με βελοειδές διάγραμμα

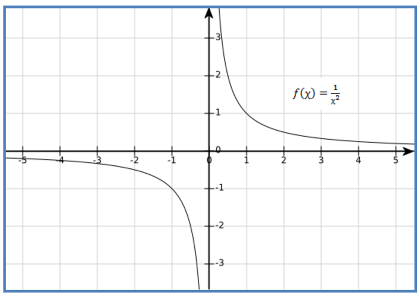


1-1



Οχι 1-1

(β) Με γραφική παράσταση

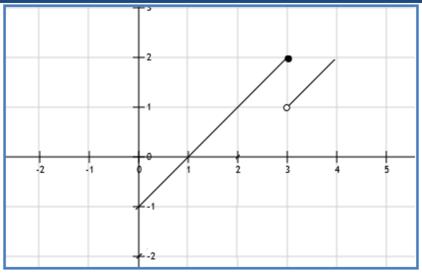


1-1

---

[1] Η πιο πάνω συνθήκη για το 1-1 μιας συνάρτησης f είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Μια συνάρτηση $f: A \to B$ δεν είναι 1-1 αν $\exists x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$, αλλά $f(x_1) = f(x_2)$ δηλ. υπάρχουν δύο σημεία του Π.Ο. της τα οποία έχουν την ίδια εικόνα.

[2] Κάθε συνάρτηση $f: A \to f(A)$ είναι επί



Οχι 1-1

(γ) Με τύπο:

$$\mathbf{1-1}: f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$
$$\mathbf{Οχι\ 1-1}: f(x) = x^2 + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

3. (α) $f(x) = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι η f είναι 1-1. Έστωσαν, $x_{1,}x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε $f(x_{1,}) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

(β) $f(x) = x^2 + 2,\ x \in \mathbb{R}$. Η f δεν ειναι 1-1, αφού π.χ. $f(-1) = (-1)^2 = 1 + 2 = 3 = (+1)^2 + 2 = f(+1)$

(γ) $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι η f είναι 1-1.Έστωσαν, $x_{1,}x_2 \neq 0$ με $f(x_{1,}) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_{1,}) = f(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^3 = {x_2}^3 \Leftrightarrow {x_1}^3 - {x_2}^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_1}^3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(γ) $f(x) = \frac{x-1}{x+1},\ x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.
Είναι

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow x = -\frac{y+1}{y-1}, \qquad y \in \mathbb{R} - \{1\}$$

και άρα για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο x του πεδίου ορισμού της, άρα είναι 1-1.

(δ) $f(x) = 2 + \sqrt{x+1},\ x \geq -1$.
Επαληθεύεται, με χρήση του ορισμού ότι η f είναι 1-1.

(ε) $f(x) = |x - 3| + 1,\ x \in \mathbb{R}$.
Η f δεν ειναι 1-1, αφού π.χ. $f(0) = 4 = f(6)$.

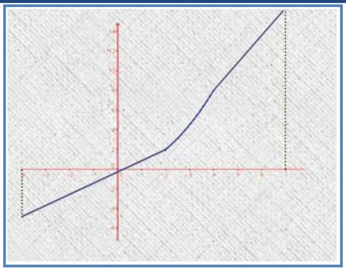
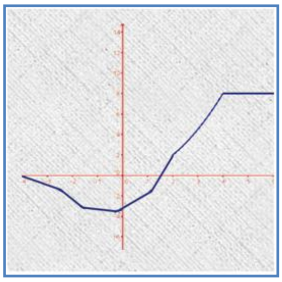
4. (α) $f(x) = ημx, x \in \mathbb{R}$
Δεν είναι 1-1 αφού $ημ(\boldsymbol{x}) = ημ(\boldsymbol{x} + 2\pi), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

(β) $f(x) = x^3 + x,\ x \in \mathbb{R}$
Είναι 1-1 αφού δεν υπάρχουν οποιαδήποτε σημεία του Π.Ο. της τα οποία έχουν την ίδια εικόνα.

(γ) $f(x) = x^3 - x,\ x \in \mathbb{R}$
Δεν είναι 1-1 αφού πχ $f(1) = f(-1) = 0$

(δ) $f(x) = 2^x,\ x \in \mathbb{R}$
Είναι 1-1 αφού δεν υπάρχουν οποιαδήποτε σημεία του Π.Ο. της τα οποία έχουν την ίδια εικόνα.

(ε) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1},\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$
Δεν είναι 1-1 αφού υπάρχουν (τουλάχιστον) δύο (διακεκριμένα) σημεία του Π.Ο. της τα οποία έχουν την ίδια εικόνα.

5.	 1-1  Οχι 1-1