3.10 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 148-149 (Σύνθεση Συναρτήσεων)

1.	(α) $(gof)(-6) = g(f(-6)) = g(-1) = \lvert -1\rvert = 1$ (β) $(gof)\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ $(fog)(0) = f(g(0)) = f(0) = \eta\mu 0 = 0.$
2.	$f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = 3x - 4.$ Είναι $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές συναρτήσεις. Επίσης, $D(fog) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (3x-4) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R} = D(fog)$ είναι $(fog)(x) = f(g(x)) = (3x-4)^2 + 1 = 9x^2 - 24x + 17$ Επίσης, $D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2+1) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R} = D(gof)$ είναι $(gof)(x) = g(f(x)) = 3(x^2+1) - 4 = 3x^2 - 1$ Είναι $fog \neq gof$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με δυο τρόπους. Παρατηρούμε ότι το σύνολο τιμών της fog περιέχεται στο σύνολο $(0, +\infty)$ αφού το τριώνυμο $9x^2 - 24x + 17$ έχει αρνητική διακρίνουσα με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου θετικό αριθμό, ενώ η gof έχει σύνολο τιμών το σύνολο $[-1, +\infty)$. Διαφορετικά, παρατηρήστε ότι π.χ. $(gof)(2) = 11 \neq 5 = (fog)(2)$. **Παρατήρηση:** Αυτό δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν σημεία στο (ίδιο) πεδίο ορισμού τους στα οποία οι τιμές των δυο συνθέσεων να είναι ίσες: π.χ. $(gof)(1) = 2 = (fog)(1)$ ή $(gof)(3) = 26 = (fog)(3)$
3.	Από το σχήμα έχουμε ότι $f(0) = 5,\ g(5) = 4,\ g(4) = 3$ και $f(3) = 3$. Συνεπώς, $(gof)(0) = g(f(0)) = g(5) = 4$ $(fog)(4) = f(g(4)) = f(3) = 3.$
4.	$f(x) = 2x - 1,\ x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0.$ Είναι $D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle\vert x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ και $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) = D(gof)$ είναι $(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x-1}$

5.	$f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0,\ \ g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$. Είναι $D(f)=\mathbb{R}_*$ και $D(g)=\mathbb{R}-\{1\}$. Είναι $$D(fof)=\{x\in D(f)\vert f(x)\in D(f)\}=\left\{x\in\mathbb{R}_*\middle\vert \frac{1}{x}\in\mathbb{R}_*\right\}=\mathbb{R}_*$$ και $\forall x\in\mathbb{R}_*=D(fof)$ είναι $$(fof)(x)=f\big(f(x)\big)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x.$$ Είναι $$D(gog)=\{x\in D(g)\vert g(x)\in D(g)\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{1\}\middle\vert \frac{2x+1}{x-1}\in\mathbb{R}-\{1\}\right\}$$ Αλλά, αν $x\neq 1,$τότε $$\frac{2x+1}{x-1}\neq 1\Leftrightarrow x\neq -2$$ και έτσι $D(gog)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$. Έχουμε για $x\in D(gog)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$ $$(gog)(x)=g\big(g(x)\big)=\frac{2g(x)+1}{g(x)-1}=\frac{2\frac{2x+1}{x-1}+1}{\frac{2x+1}{x-1}-1}=\frac{5x+1}{x+2}$$
6.	$f(x)=\sqrt{1-x}$ και $g(x)=3x^2+2.$ Είναι $D(f)=(-\infty,1]$ και $D(g)=\mathbb{R}$. Είναι $$\begin{aligned}D(fog)&=\{x\in D(g)\vert g(x)\in D(f)\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\vert(3x^2+1)\in(-\infty,1]\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\vert 3x^2\in(-\infty,-1]\}=\emptyset\end{aligned}$$ αφού $3x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα δεν ορίζεται η fog. Τώρα, $$D(gof)=\{x\in D(f)\vert f(x)\in D(g)\}=\left\{x\in(-\infty,1]\middle\vert\sqrt{1-x}\in\mathbb{R}\right\}=(-\infty,1]$$ και $\forall x\in(-\infty,1]=D(gof)$ είναι $$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=3\big(\sqrt{1-x}\big)^2+2=5-3x.$$ Τέλος, $$D(fof)=\{x\in D(f)\vert f(x)\in D(f)\}=\left\{x\in(-\infty,1]\middle\vert\sqrt{1-x}\in(-\infty,1]\right\}=[0,1]$$ όπως μπορούμε εύκολα να δούμε με ενα πολύ απλό επιχείρημα. Αρα για $x\in[0,1]=D(fof)$ είναι $$(fof)(x)=f\big(f(x)\big)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$$
7.	$\varphi(x)=x^2-3,\ \sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$. Είναι $D(\varphi)=\mathbb{R}$ και $D(\sigma)=\{1-x^2\geq 0\}=[-1,1]$. Είναι $$\begin{aligned}D(\varphi o\sigma)&=\{x\in D(\sigma)\vert\sigma(x)\in D(\varphi)\}\\&=\left\{x\in[-1,1]\middle\vert\sqrt{1-x^2}\in\mathbb{R}\right\}=[-1,1]\end{aligned}$$ και $\forall x\in[-1,1]=D(\varphi o\sigma)$ είναι $$(\varphi o\sigma)(x)=\varphi\big(\sigma(x)\big)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-3=-(x^2+2)$$ Επίσης, $$D(\sigma o\varphi)=\{x\in D(\varphi)\vert\varphi(x)\in D(\sigma)\}=\{x\in\mathbb{R}\vert(x^2-3)\in[-1,1]\}$$ Αλλά, $(x^2-3)\in[-1,1]\Leftrightarrow -1\leq x^2-3\leq 1$

	$\Leftrightarrow 2 \le x^2 \le 4$ $\Leftrightarrow (2 \le x^2) \wedge (x^2 \le 4)$ $\Leftrightarrow (0 \le x^2 - 2) \wedge (x^2 - 4 \le 0)$ Έχουμε κατά τα γνωστά, $0 \le x^2 - 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ και $x^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2,2]$. Έτσι, $$D(\sigma o \varphi) = [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$$ και $\forall x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2] = D(\sigma o \varphi)$ είναι $$(\sigma o \varphi)(x) = \sigma(\varphi(x)) = \sqrt{1 - (x^2 - 3)^2}$$
8.	$f(x) = x^2 - 8x + 13,\ g(x) = \sqrt{x - 6}$. Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επίσης, $$D(g) = \{x - 6 \ge 0\} = [6, +\infty)$$ Τώρα, $D(fog) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$ $= \{x \in [6, +\infty) \mid \sqrt{x - 6} \in \mathbb{R}\} = [6, +\infty)$ αφού $\sqrt{x - 6} \in \mathbb{R}, \forall x \in [6, +\infty)$. Έχουμε $\forall x \in [6, +\infty) = D(fog)$ $$(fog)(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt{x - 6}\right)^2 - 8\sqrt{x - 6} + 13 = x - 8\sqrt{x - 6} + 7$$ Επίσης, $$D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 8x + 13) \in [6, +\infty)\}$$ Αλλά, $$(x^2 - 8x + 13) \in [6, +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 13 \ge 6$$ $$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 \ge 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 7) \ge 0$$ $$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$$ και $\forall x \in (-\infty, 1] \cup [7, +\infty) = D(gof)$ είναι $$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 6} = \sqrt{x^2 - 8x + 13 - 6} = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$$
9.	$$f(x) = 3x + 4, x \in [1, 16)$$ **(α)** $g(x) = f(x + 1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση G με τύπο $G(x) = x + 1$. Είναι $D(G) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επίσης, $$D(foG) = \{x \in D(G) \mid G(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x + 1) \in [1, 16)\}$$ Αλλά, $$(x + 1) \in [1, 16) \Leftrightarrow 1 \le x + 1 < 16 \Leftrightarrow x \in [0, 15)$$ και αφού $g(x) = f(x + 1) = (foG)(x)$, έχουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση έχει νόημα για $x \in D(foG) = [0, 15)$. Έχουμε για $x \in D(foG) = [0, 15)$ $$g(x) = f(x + 1) = (foG)(x) = f(G(x))$$ $$= 3G(x) + 4 = 3(x + 1) + 4 = 3x + 7$$ **(β)** $h(x) = f(2x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 2x$. Είναι $D(g) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επίσης, $$D(fog) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x) \in [1, 16)\}$$ Αλλά,

	$$(2x) \in [1,16) \Leftrightarrow 1 \leq 2x < 16 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right)$$ και αφού $h(x) = f(2x) = (fog)(x)$, έχουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση έχει νόημα για $x \in D(h) = D(fog) = \left[\frac{1}{2}, 8\right)$. Έχουμε για $x \in D(g) = \left[\frac{1}{2}, 8\right)$ $$g(x) = f(2x) = 3(2x) + 4 = 2(3x + 2)$$ **(γ)** $F(x) = f\big(f(x)\big)$. Είναι $$D(fof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(f)\} = \{x \in [1,16) \mid f(x) \in [1,16)\}$$ Έχουμε: $$(3x+4) \in [1,16) \Leftrightarrow 1 \leq 3x + 4 < 16 \Leftrightarrow -3 \leq 3x < 12 \Leftrightarrow x \in [-1,4)$$ και $\forall x \in [-1,4) = D(fof)$ είναι $$F(x) = (fof)(x) = 3f(x) + 4 = 3(3x+4) + 4 = 9x + 16.$$
10.	$f(x) = 2x - 1$ και $(fog)(x) = x^2 - 2x + 3$. Έχουμε $$(fog)(x) = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = x^2 - 2x + 3$$ $$\Leftrightarrow 2g(x) - 1 = x^2 - 2x + 3$$ $$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$
11.	$f(x) = 2x + 1, x \in [0,3)$ *και* $g(x) = \frac{1}{2}(x-1), x \in [1,7)$. Είναι $$D(fog) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\} = \left\{x \in [1,7) \middle\| \frac{1}{2}(x-1) \in [0,3)\right\}$$ Για $x \in [1,7)$, $$\frac{1}{2}(x-1) \in [0,3) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2}(x-1) < 3 \Leftrightarrow 0 \leq x - 1 < 6 \Leftrightarrow 1 \leq x < 7$$ και άρα $$D(fog) = [1,7)$$ και $$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2\frac{1}{2}(x-1) + 1 = x.$$ Τώρα, $$D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \{x \in [0,3) \mid (2x+1) \in [1,7)\}$$ Για $x \in [0,3)$, $$(2x+3) \in [1,7) \Leftrightarrow 1 \leq 2x + 1 < 7 \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 6 \Leftrightarrow 0 \leq x < 3$$ και άρα $$D(gof) = [0,3).$$ Αρα για $x \in [0,3)$ είναι $$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{1}{2}(2x + 1 - 1) = x.$$ Είναι $D(fog) \neq D(gof)$ και άρα $$fog \neq gof.$$

12.	$f(x) = 2x + 3, \quad \kappa\alpha\iota\ g(x) = 4x + 9. E\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ D(fog) = \mathbb{R} = D(gof)$ και $$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = 4f(x) + 9 = 4(2x+3) + 9 = 8x + 21$$ και $$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2g(x) + 3 = 2(4x+9) + 3 = 8x + 21$$ Συνεπώς, οι συναρτήσεις gof και fog είναι ίσες.
13.	**(α)** $f(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1$και $g(x) = x^2, x \in [-1,1]$. Είναι $$D(gof) = A^{\prime} = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \left\{x \geq 1 \middle\| \sqrt{x-1} \in [-1,1]\right\}$$ Έστω $x \geq 1$. Τότε $$\sqrt{x-1} \in [-1,1] \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 \leq 1$$ $$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$ Άρα $D(gof) = [1,2]$ και $$gof: [1,2] \to \mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ (gof)(x) = x - 1.$$ **(β)** $f(x) = \sqrt{x} + 4, x \geq 4$ και $g(x) = \sqrt{1-x}, x \leq 1$. Είναι $$D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \left\{x \in [4, +\infty) \middle\| (\sqrt{x} + 4) \in (-\infty, 1]\right\} = \emptyset$$ αφού $\sqrt{x} \geq 0$. Συνεπώς, δεν ορίζεται η gof. **(γ)** $f(x) = \sqrt{5 - x^2}, x \in [-2,2]$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-3}, x \neq 3$. Είναι $$D(gof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(g)\} = \left\{x \in [-2,2] \middle\| \sqrt{5-x^2} \in \mathbb{R} - \{3\}\right\} = [-2,2]$$ Έχουμε $\forall x \in [-2,2]$ $$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{\sqrt{5-x^2}+1}{\sqrt{5-x^2}-3}.$$
14.	$f: [1,6) \to \mathbb{R}$. Είναι $D(f) = [1,6)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = x^2 - 3$. Είναι $D(g) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επίσης, $$D(fog) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\}$$ $$= \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3) \in [1,6)\}$$ Αλλά, $$(x^2 - 3) \in [1,6) \Leftrightarrow 1 \leq x^2 - 3 < 6$$ $$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 < 9$$ $$\Leftrightarrow (4 \leq x^2) \wedge (x^2 < 9)$$ $$\Leftrightarrow (0 \leq x^2 - 4) \wedge (x^2 - 9 < 0)$$ Έχουμε κατά τα γνωστά, $0 \leq x^2 - 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ και $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3,3)$. Έτσι, $(0 \leq x^2 - 4) \wedge (x^2 - 9 < 0) \Leftrightarrow x \in (-3,-2] \cup [2,3)$ και αφού $f(x^2 - 3) = (fog)(x)$, έχουμε ότι η δοθείσα συνάρτηση έχει νόημα για $x \in D(fog) = (-3,-2] \cup [2,3)$.

15.	$f(x) = 5x - 4, x \in [1,6]$. Είναι (κατα τα γνωστά) $D(fof) = \{x \in D(f) \mid f(x) \in D(f)\} = \{x \in [1,6] \mid (5x-4) \in [1,6]\} = [1,2]$ και αρα για $x \in [1,2] = D(fof)$ είναι $(fof)(x) = f\big(f(x)\big) = 5f(x) - 4 = 5(5x-4) - 4 = 25x - 24$ Επίσης, $D(fofof) = D\big(fo(fof)\big)\{x \in D(fof) \mid (fof)(x) \in D(f)\} = \{x \in [1,2] \mid (5x-4) \in [1,6]\} = \left[1, \frac{6}{5}\right]$ και αρα για $x \in \left[1, \frac{6}{5}\right] = D(fofof)$ είναι $(fofof)(x) = f\big((fof)(x)\big) = f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ $= f(25x - 24) = 5(25x - 24) - 4 = 125x - 24$