3.9 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 138-139 (Πράξεις Συναρτήσεων)

1.	(α) ΛΑΘΟΣ: $D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}-\{0\}$ $$f(x)=\frac{2x^3+3}{x}=\frac{2x^3}{x}+\frac{3}{x}=2x^2+\frac{3}{x}=g(x)$$ Έτσι, $f=g$ (β) ΣΩΣΤΟ: $D(f-g)=D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$ και αρα $f(x)\neq g(x)$ για $x\in(-\infty,0)$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται. (γ) ΛΑΘΟΣ: Το $0\notin D(g)$ (δ) ΣΩΣΤΟ: Αφού $D\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}-\{10\}$, έπεται ότι $g(10)=0$. (ε) ΣΩΣΤΟ: Ορίζεται αλλα για $x\in D(f)\cap D(g)=[-2,2]\cap[-1,1]=[-1,1]$.
2.	Έχουμε ότι $D(f)=D(g)=\mathbb{R}$ και αρα $D(f-g)=D(f+g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}$ με $$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x-5+x+3=3x-2, x\in\mathbb{R}$$ και $$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x-5-(x+3)=x-8, x\in\mathbb{R}$$
3.	Έχουμε ότι $D(f)=[0,+\infty)$ και $$D(g)=\{x\in\mathbb{R}\mid -1-x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq -1\}=(-\infty,-1]$$ Είναι λοιπόν $D(f)\cap D(g)=[0,+\infty)\cap(-\infty,-1]=\emptyset$ και αρα δεν ορίζεται η $f+g$.
4.	Έχουμε ότι $D(f)=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-25\neq 0\}$ $$=\{x\in\mathbb{R}\mid (x-5)(x+5)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{\pm 5\}$$ και $$D(g)=\{x\in\mathbb{R}\mid x+2\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq -2\}=\mathbb{R}-\{-2\}$$ Άρα, $D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)=\mathbb{R}-\{\pm5,-2\}$ με τύπο $$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{4x}{x^2-25}\cdot\left(1-\frac{7}{x+2}\right)$$ $$=\frac{4x}{(x-5)(x+5)}\cdot\frac{x+5}{x+2}=\frac{4x}{(x-5)(x+2)},\qquad x\in\mathbb{R}-\{\pm5,-2\}$$ Επίσης, $D\left(\frac{f}{g}\right)=\big(D(f)\cap D(g)\big)-\{g(x))=0\}$. Αλλά, $$\{x\in\mathbb{R}\mid g(x)=0\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\vert\,1-\frac{7}{x+2}=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle\vert\,\frac{x+5}{x+2}=0\right\}=\{-5\}$$ και αρα αφού $(-5)\notin\big(D(f)\cap D(g)\big)$, έχουμε ότι $D\left(\frac{f}{g}\right)=\{\pm5,-2\}$. Επίσης, για κάθε $x\in D\left(\frac{f}{g}\right)=\mathbb{R}-\{\pm5,-2\}$ είναι $$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{4x}{(x-5)(x+5)}}{1-\frac{7}{x+2}}=\frac{\frac{4x}{(x-5)(x+5)}}{\frac{x+5}{x+2}}=\frac{4x(x+2)}{(x-5)^2(x+5)}.$$

5. Έχουμε ότι $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x-1} > 0\} = (1, +\infty)$ και ομοίως $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | \sqrt{x-1} > 0\} = (1, +\infty)$.

Έτσι, $D(f+g) = D(f) \cap D(g) = (1, +\infty)$ και για κάθε $x \in D(f+g) = (1, +\infty)$ είναι

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 2$$

Τώρα, $D\left(\frac{g}{f}\right) = \big(D(f) \cap D(g)\big) - \{f(x) = 0\} = (1, +\infty) - \{f(x) = 0\}$

Αλλά,

$$\{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | 2\sqrt{x-1} - 1 = 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{x-1} = \frac{1}{2}\right\}$$

Είναι

$$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

και αρα $D\left(\frac{g}{f}\right) = (1, +\infty) - \left\{\frac{5}{4}\right\}$. Επίσης, για κάθε $x \in D\left(\frac{g}{f}\right) = (1, +\infty) - \left\{\frac{5}{4}\right\}$ είναι

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}{\frac{2\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1} - 1}$$

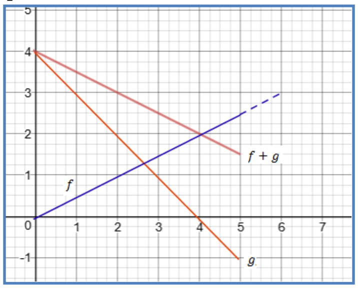
Σημείωση: η f μπορεί να θεωρηθεί και ως το άθροισμα 2 συναρτήσεων (ποιών;)

6. Έχουμε ότι $D(f) = [5, +\infty)$ και στο σύνολο αυτό η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη. Ομοίως $D(g) = (0, +\infty)$ και στο σύνολο αυτό η συνάρτηση g είναι καλά ορισμένη. Άρα, $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = (0, +\infty) \cap [5, +\infty) = [5, +\infty)$ με τύπο

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x-5}{x}} = \sqrt{1 - \frac{5}{x}}, \qquad x \in [5, +\infty)$$

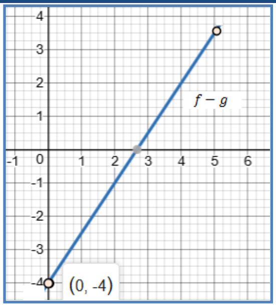
7. Έστω οι συναρτήσεις $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x \in (2, +\infty)$ και $g(x) = 1 + x \in (-\infty, 0)$. Είναι $D(f) = (2, +\infty)$ και $D(g) = (-\infty, 0)$ και αρα $D(f) \cap D(g) = \emptyset$. Συνεπώς δεν ορίζεται πουθενά η $f + g$.

8. **(α)** Είναι $D(f) = [0,6]$ και $D(g) = [0,5]$



(β) Το $3 \in D(f) \cap D(g) = [0,5]$. Άρα, $(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$ και $3 \in D(f) \cap D(g) = [0,5]$, άρα,

$$(f-g)(5) = f(5) - g(5) = 2{,}5 - (-1) = 3{,}5$$



(γ) Κατά τα γνωστά (εύρεση εξίσωσης ευθείας), έχουμε

$$f(x)=\frac{x}{2}, x\in[0,6], \qquad g(x)=4-x, x\in[0,5]$$

και αρα

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=4-\frac{x}{2}, x\in[0,5]$$