Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$.		
(α)	Αν $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ και $g(x) = \frac{2x^2+3}{x}$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R} - \{0\}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν $f(x) = 2\|x\|$ και $g(x) = 2x$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, τότε $f = g$ στο $\{-1, 0, 1\}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν $f(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$, τότε η f είναι ένας περιορισμός της συνάρτησης g στο $\mathbb{R} - \{10\}$, όπου $g(x) = x + 10$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Αν $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

2. Να εξετάσετε αν οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = g$.

(α) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 9x}{x^2 + 3}$, $g(x) = 3x$

(β) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$, $g(x) = x - 2$

(γ) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$, $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f: \{-2, 0, 2\} \to \mathbb{R}$ και $g: \{-2, 0, 2\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 4x + 10$ και $g(x) = 10$ είναι ίσες.

4. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ και $g(x) = |x| + 1$ είναι ίσες.

5. Να βρείτε, σε κάθε περίπτωση, ίσες πραγματικές συναρτήσεις με τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{|x|}{x}$ και πεδίο ορισμού το σύνολο:

(α) $A = (0, +\infty)$

(β) $A = (-10, -1]$

6. Να αναφέρετε μια συνάρτηση $g: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, η οποία να είναι ίση με τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x-6}{|x-3|}$ στο ευρύτερο πεδίο ορισμού της.

3.8 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 131 (Ισότητα συναρτήσεων)

1.	(α) ΣΩΣΤΟ: Έχουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = D(f) = D(g)$, $$f(x) = \frac{2x^3+3}{x} = \frac{2x^3}{x} + \frac{3}{x} = 2x^2 + \frac{3}{x} = g(x)$$ Έτσι, $f = g$ (β) ΛΑΘΟΣ: Έχουμε $$f(x) = 2\|x\| = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$ και αρα $f(x) \neq g(x)$ για $x \in (-\infty, 0)$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται. (γ) ΣΩΣΤΟ: Είναι $f(-1) = 1 = g(-1)$, $f(0) = 0 = g(0)$ και $f(1) = 1 = g(1)$. Συνεπώς, $f \equiv g$ στο σύνολο $\{-1,0,1\}$. (δ) ΣΩΣΤΟ: Έχουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R} - \{10\} = D(f) = D(g)$, $$f(x) = \frac{x^2-100}{x-10} = \frac{(x-10)(x+10)}{x-10} = x + 10 = g(x)$$ Έτσι, $f = g$. (ε) ΛΑΘΟΣ: Έχουμε $f(x) = \sqrt{x^2} = \|x\| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ και αρα $f(x) \neq g(x)$ για $x \in (-\infty, 0)$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται.
2.	(α) Έχουμε ότι $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in D(f) = D(g) = \mathbb{R}$ $$f(x) = \frac{3x^3+9x}{x^2+3} = 3x\frac{x^2+3}{x^2+3} = 3x = g(x)$$ Έτσι, $f = g$. (β) Είναι $f(x) = \sqrt{(x-2)^2} = \|x-2\| = \begin{cases} x-2, & x \geq 0 \\ 2-x, & x < 0 \end{cases}$ και αρα $f(x) \neq g(x)$ για $x \in (-\infty, 2)$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται. Όμως, ο περιορισμός της f στο σύνολο $[2, +\infty)$ ισούται με την g. (γ) Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ ενώ $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται. Αλλά, για $x \in (\mathbb{R} - \{-3,1\})$ έχουμε $$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{(x+3)(x-2)}{x+3} = x - 2 \quad \textit{και}$$ $$g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x - 2$$ και αρα $f = g$ στο σύνολο $\mathbb{R} - \{-3,1\}$.
3.	Έχουμε ότι $D(f) = D(g) = \{-2,0,2\}$ και $f(-2) = 10 = g(-1)$, $f(0) = 10 = g(0)$ και $f(2) = 10 = g(2)$. Συνεπώς, $f = g$.
4.	Έχουμε $$f(x) = \frac{x^2-1}{\|x\|-1} = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x > 0, x \neq 1 \\ -\frac{x^2-1}{x-1}, & x < 0 \end{cases}$$

	$$= \begin{cases} x+1, & x>0, x\neq 1 \\ -x-1, & x<0, x\neq -1 \end{cases}$$ και $$g(x) = \|x\|+1 = \begin{cases} x+1, & x>0 \\ -x-1, & x<0 \end{cases}$$ Είναι $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ ενώ $D(g) = \mathbb{R}$. Συνεπώς οι f και g δεν ισούνται.
5.	Έχουμε $$f(x) = \frac{\|x\|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x}, & x>0 \\ -\frac{x}{x}, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$ **(α)** Άρα, ο περιορισμός της συνάρτησης στο σύνολο $(0,+\infty)$ είναι η συνάρτηση g με τύπο $$g(x) = 1, x \in (0,+\infty)$$ **(β)** Επίσης, ο περιορισμός της συνάρτησης στο σύνολο $(-10,-1]$ είναι η συνάρτηση g με τύπο $$g(x) = -1\,, x \in (-10,-1]$$
6.	Έχουμε $$f(x) = \frac{2x-6}{\|x-3\|} = 2\frac{x-3}{\|x-3\|} = \begin{cases} 2\frac{x-3}{x-3}, & x>3 \\ -2\frac{x-3}{x-3}, & x<3 \end{cases} = \begin{cases} 2, & x>3 \\ -2, & x<3 \end{cases}$$ Η g που ψάχνουμε είναι η $$g(x) = \begin{cases} 2, & x>3 \\ -2, & x<3 \end{cases}.$$