3.7 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ, ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 125 (Πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών)

1.

(α) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
$D(f) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.

(β) $f(x) = \frac{3}{x-4}$.
Είναι $x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4$ και άρα $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$.

(γ) $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^3-1}$.
Είναι
$$x^3 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1,$$
αφού $x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

(δ) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+1}$.
Είναι
$$x^3 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$
αφού $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

(ε) $f(x) = \sqrt{x+2}$.
Είναι
$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$
και άρα $D(f) = [-2, +\infty)$.

(στ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$.
Η f ορίζεται στο σύνολο
$$\{x \in \mathbb{R} | x+3 \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x-1 \neq 0\} = [-3,+\infty) \cap \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$$
$$= [-3,+\infty) \cap (\mathbb{R} - \{1\}) = [-3,+\infty) - \{1\} = [-3,1) \cup (1,+\infty)$$

(ζ) $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{x+2}}$.
Η f ορίζεται στο σύνολο
$$\{x \in \mathbb{R} | 1-2x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} | x+2 > 0\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cap (-2,+\infty) = \left(-2, \frac{1}{2}\right]$$

(η) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
Είναι $D(f) = \mathbb{R}$ αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + |x| \neq 0$.

(θ)
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x^3-x} = \frac{\sqrt{(x-4)(x-3)}}{x(x^2-1)} = \frac{\sqrt{(x-4)(x-3)}}{x(x-1)(x+1)}.$$
Από τον πίνακα προσήμου του τριωνύμου $(x-4)(x-3)$ βρίσκουμε ότι
$$(x-4)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3] \cup [4, +\infty).$$
Επίσης,
$$x(x-1)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, \pm 1.$$
Συνεπώς,
$$D(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,3] \cup [4,+\infty).$$

2.

i. $y = 7x - 4, x \in \mathbb{R}$. $D(f) = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.
Είναι
$$y = 7x - 4 \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{7}$$
και άρα

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{y+4}{7} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$R(f) = \mathbb{R}.$$

ii. $y = 2x - 1, x \in [-3,2]$. Έχουμε

$$x \in [-3,2] \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -7 \leq 2x - 1 \leq 3$$

και άρα $R(f) = [-7,3]$

iii. $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}, x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Έχουμε

$$w \in f\left(\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}: f(x) = w \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}: \frac{x+2}{3x-1} = w \Leftrightarrow x = \frac{w+2}{3w-1}$$

Άρα, $R(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

iv. $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}, x \in (2, +\infty)$. Έχουμε:

$$w \in f\big((2,+\infty)\big) \Leftrightarrow \exists x \in (2,+\infty): f(x) = w$$

$$\Leftrightarrow \exists x \in (2,+\infty): \frac{3x-1}{x-2} = w \Leftrightarrow x = \frac{2w-1}{w-3} \quad (w \neq 3)$$

Αλλά, $x > 2$ και άρα

$$\frac{2w-1}{w-3} > 2 \Leftrightarrow \frac{2w-1}{w-3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{w-3} > 0 \Leftrightarrow w > 3$$

Συνεπώς, $R(f) = (3, +\infty)$

v. $f(x) = \sqrt{3-x} \geq 0, \ \forall x \leq 3$

και άρα

$$R(f) = [0, +\infty)$$

vi. Είναι για $x \geq 2$

$$\sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-2} \leq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x-2} \leq 1$$

και άρα

$$R(f) = (-\infty, 1].$$

vii. $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, x \in \mathbb{R}$

$$y = 3x^2 - 5x + 7 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 7 - y = 0$$

Αντιμετωπίζουμε την τελευταία εξίσωση ως μια παραμετρική εξίσωση (με παράμετρο το y) και άγνωστο το x. Για να έχει λύσεις η εξίσωση αυτή (η οποία είναι 2ου βαθμού ως προς το x) αρκεί η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 12(7-y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{59}{12}$$

Άρα, $R(f) = \left[\frac{59}{12}, +\infty\right)$

viii. $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \alpha\nu\ x \geq 0 \\ -x, \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$.

Αν $\underbrace{x}_{=f(x)} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ ενω αν $x < 0 \Rightarrow -\underbrace{x}_{=f(x)} > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Άρα, $R(f) = [0, +\infty)$

ix. $f(x) = 2|x-1| + 3, \ x \in \mathbb{R}$.

Είναι

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x-1| \geq 0 \Rightarrow 2|x-1| \geq 0 \Rightarrow 2|x-1| + 3 \geq 3,$$

δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geq 3$. Άρα, $R(f) = [3, +\infty)$.

	x. $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & x\in[1,2) \\ 3x-2, & x\in[2,6)\end{cases}$ Αν $x\in[1,2)\Rightarrow x^2\in[1,4)\Rightarrow 3x^2\in[3,12)$ ενω αν $x\in[2,6)\Rightarrow 3x\in[6,18)\Rightarrow(3x-2)\in[3,16)$. Άρα, $R(f)=[3,12)\cup[3,16)=[3,16)$
3.	Αφού $x^2-2x+10>0, \forall x\in\mathbb{R}$, είναι $$D(f)=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x+10\geq 0\}=\mathbb{R}$$ Τώρα, $$y=\sqrt{x^2-2x+10}\Leftrightarrow y^2=x^2-2x+10 \\ \Leftrightarrow x^2-2x+10-y^2=0$$ Αντιμετωπίζουμε την τελευταία εξίσωση ως μια παραμετρική εξίσωση (με παράμετρο το y) και άγνωστο το x. Για να έχει λύσεις η εξίσωση αυτή (η οποία είναι 2ου βαθμού ως προς το x) πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0: $$\Delta\geq 0\Leftrightarrow 4-4(10-y^2)\geq 0\Leftrightarrow y^2-9\geq 0 \\ \Leftrightarrow y\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$$ Αλλά, $y=\sqrt{x^2-2x+10}\geq 0$ ήτοι $y\in[0,+\infty)$. Έτσι, τελικά, $y\in[3,+\infty)$.