3.6 ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 117-118 (Είδη συναρτήσεων)

1.

(α) ΣΩΣΤΟ: Έχουμε ότι

$$\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$$

και

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$$

(β) ΣΩΣΤΟ: Έστω f η εν λόγω συνάρτηση. Έχουμε f *άρτια* και $(\rho, 0) \in Gr(f)$, τότε $\rho \in D(f)$ και $f(-\rho) = \underbrace{f(\rho)}_{0}$ δηλ. $(-\rho, 0) \in Gr(f)$.

(γ) ΛΑΘΟΣ: Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + x^{-2} = x + \frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ δεν είναι πολυωνυμική γιατί $-2 \notin \mathbb{N}$

(δ) ΛΑΘΟΣ: Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x| - x, x \in \mathbb{R}$ γράφεται

$$f(x) = |x| - x = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

και αρα δεν είναι σταθερή.

(ε) ΣΩΣΤΟ: Η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = x^2 - (x-1)^2 - x + 1, \qquad x \in \mathbb{R}$$

είναι ταυτοτική συνάρτηση αφού $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - (x-1)^2 - x + 1 = x^2 - (x^2 - 2x + 1) - x + 1 = x$$

2.

(α) Είναι άρτια:
$\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^4 + 5x^2 = f(x)$
Είναι άρτια: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

(γ) Ούτε Άρτια ούτε Περιττή. Πράγματι $f(1) = 2 \neq -f(1) = -2$ και $f(-2) = 1 \neq -f(-2) = -1$

(δ) Είναι περιττή: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$,

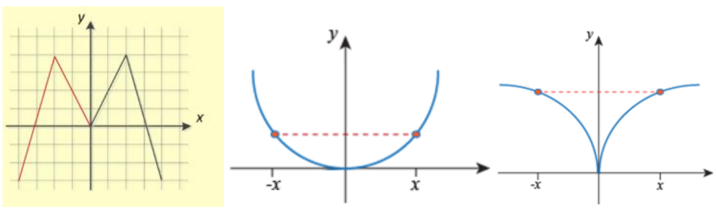
$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -x^3 + 3x^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f(x)$$

(ε) Είναι περιττή: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \frac{(-x)^3}{1+(-x)^2} = -\frac{x^3}{1+x^2} = -f(x)$

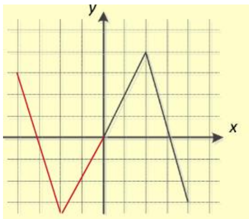
(στ) Είναι άρτια: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = |-x-2| + |-x+2| = |x+2| + |x-2| = f(x)$

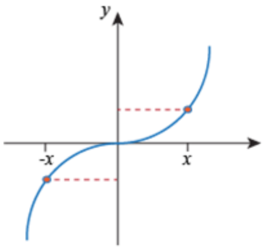
3.

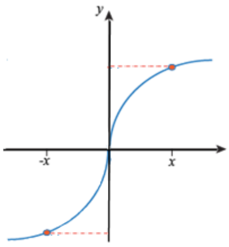
(α) Άρτια



(β) Περιττή







4. (α) Ούτε Άρτια ούτε Περιττή. Πράγματι,
$D(f) = [4, +\infty)$ και αρα η πρόταση $x \in D(f) \Rightarrow (-x) \notin D(f)$ είναι αληθής

(β) Είναι περιττή. Πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 3(-x)^3 + (-x) = -3x^3 - x$$
$$= -(3x^3 + x) = -f(x)$$

(γ) Είναι άρτια. Πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^6 + (-x)^4 = x^6 + x^4 = f(x)$$

5. Είναι άρτια, πράγματι, $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2 = f(x)$.

6. (α) Είναι περιττή: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$

(β) Είναι άρτια: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

(γ) Ούτε Άρτια ούτε Περιττή. Πράγματι, ξέρουμε ότι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = |x - a| + \beta$ δεν είναι περιττές και άρτιες αν και μόνο αν $a = 0$. Εδώ $a \neq 0$.

(δ) Είναι άρτια: $\forall x \in \mathbb{R} = D(f) \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R} = D(f)$ και $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ (δες και το προηγούμενο ερώτημα)

(ε) Ούτε Άρτια ούτε Περιττή. Πράγματι, $f(1) = 4 \neq -f(1) = -4$ και $f(1) = 4 \neq f(-1) = 1$

(στ) Ούτε Άρτια ούτε Περιττή. Πράγματι, $f(3) = 0 \neq -f(3) = -1$ και $f(-2) = 0 \neq f(2)$ αφού $f(2) < 0$.

(ζ) Είναι περιττή

(η) Είναι άρτια

7.

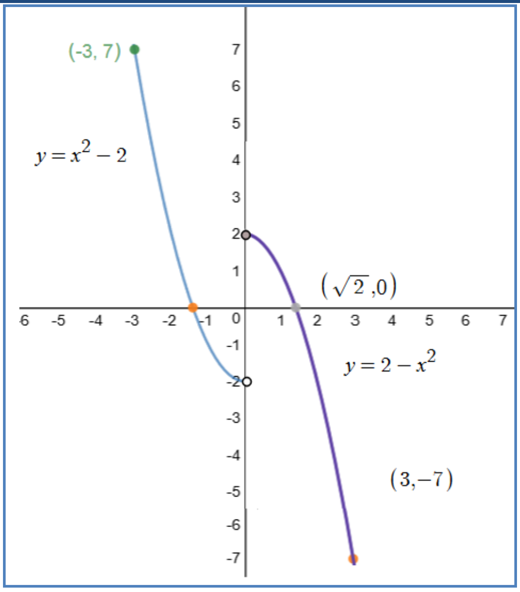
$$\begin{aligned}
& g \equiv id \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x \\
& \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (x+2)^2 + f(x) = x \\
& \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 4x + 4 + f(x) = x \\
& \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 3x + 4 + f(x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -(x^2 + 3x + 4) = -\frac{1}{4}(2x+3)^2 + \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

8. $f: [-3,3] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, -3 \leq x < 0 \\ 2 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Για$-3 \leq x < 0$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$. Για $0 \leq x \leq 3$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$. Τέλος,

$$f(3) = -7 = -f(-3).$$



9.

(α) $f(3)=4 \Leftrightarrow 3\cdot 3-\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=5.$

(β) Για το $\alpha=5$. Έχουμε

$$2x^2-1\geq 0,\qquad x\leq 2$$
$$\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cap(-\infty,2]$$
$$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},2\right]$$

και

$$3x-5\geq 0,\qquad x>2\Leftrightarrow x>\frac{5}{3}.$$

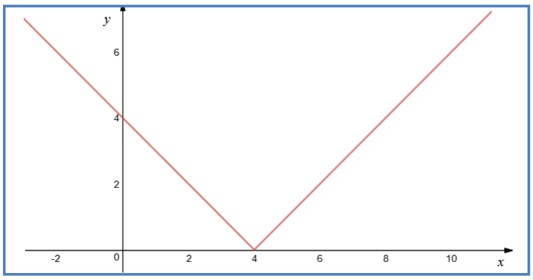
Άρα, $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

10.

❾ (α) $f(x)=|x-4|, x\in\mathbb{R}$. Είναι τμηματική:

$$f(x)=|x-4|=\begin{cases}x-4, x\geq 4\\ 4-x, x<4\end{cases}$$

και αποτελεί οριζόντια μεταφορά κατα 4 μονάδες δεξιά της συνάρτησης $x\mapsto|x|, x\in\mathbb{R}$. Έτσι, το γράφημά της είναι:



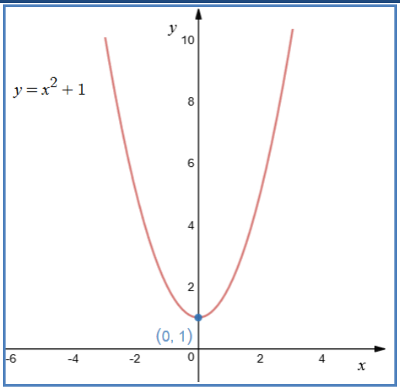
(β) $f(x)=|x-4|+x, x\in\mathbb{R}$. Είναι τμηματική:

$$f(x)=|x-4|+x=\begin{cases}x-4+x, x\geq 4\\ 4-x+x, x<4\end{cases}=\begin{cases}2x-4, x\geq 4\\ 4, x<4\end{cases}$$

(γ) $f(x)=|x^2+1|, x\in\mathbb{R}$. Δεν είναι τμηματική:

$$f(x)=|x^2+1|=x^2+1, x\in\mathbb{R}.$$

Είναι παραβολή με κορυφή στο σημείο $(0,1)$ στο οποίο έχει ελάχιστο.


$y = x^2 + 1$
y
10
8
6
4
2
(0, 1)
-6
-4
-2
0
2
4
x