Δραστηριότητες

1. Αν $|x| \leq 7$ και $|y| \leq 10$, να δείξετε ότι $|2x + 3y| \leq 44$.

2. Να βρείτε αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $|\alpha - 1| + |3 - 3\alpha| = 8$.

3. Αν $x \in \mathbb{R}$, με $x \neq -1$ και $\left|\frac{x+4}{x+1}\right| = 2$, να αποδείξετε ότι $|x| = 2$.

4. Αν $\left|\frac{2\alpha+3\beta}{3\alpha+2\beta}\right| \leq 1$, με $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \leq 1$.

5. Αν $\alpha^2 < 16\beta^2$, με $\alpha\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι:
   (α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 4$
   (β) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{15}{4}$

6. Να αποδείξετε ότι $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. Να αποδείξετε ότι $|2\alpha + \beta|^2 + |\alpha - 2\beta|^2 = 5(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

8. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.
   (α) Αν $\big||\alpha| - |\beta|\big| = |\alpha + \beta|$, να αποδείξετε ότι οι α και β είναι ετερόσημοι.
   (β) Αν $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, να αποδείξετε ότι οι α και β είναι ομόσημοι.

3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

3.2.2 Ιδιότητες απόλυτης τιμής αθροίσματος και γινομένου

Δραστηριότητες σελ. 90 (Ιδιότητες απόλυτης τιμής αθροίσματος και γινομένου)

1.	$\lvert x\rvert \leq 7$ και $\lvert y\rvert \leq 10$ Από την τριγωνική ανισότητα, έχουμε $$\lvert 2x+3y\rvert \leq \lvert 2x\rvert + \lvert 3y\rvert = \lvert 2\rvert\cdot\lvert x\rvert + \lvert 3\rvert\cdot\lvert y\rvert = 2\cdot\lvert x\rvert + 3\cdot\lvert y\rvert$$ $$\leq 2\cdot 7 + 3\cdot 10 = 44$$
2.	$\lvert\alpha-1\rvert+\lvert 3-3\alpha\rvert=8$ $\Leftrightarrow \lvert\alpha-1\rvert+\lvert 3(\alpha-1)\rvert=8$ $\Leftrightarrow \lvert\alpha-1\rvert+\lvert 3\rvert\cdot\lvert\alpha-1\rvert=8$ $\Leftrightarrow \lvert\alpha-1\rvert+3\cdot\lvert\alpha-1\rvert=8$ $\Leftrightarrow 4\lvert\alpha-1\rvert=8 \Leftrightarrow \lvert\alpha-1\rvert=2$ $\Leftrightarrow (\alpha-1=2)\vee(\alpha-1=-2)$ $\Leftrightarrow (\alpha=3)\vee(\alpha=1)$
3.	Έστω $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ με $\left\lvert\frac{x+4}{x-1}\right\rvert=2$. Έχουμε $\left\lvert\frac{x+4}{x-1}\right\rvert=2 \Rightarrow \lvert x+4\rvert=2\lvert x-1\rvert$ $\Rightarrow \big(x+4=2(x-1)\big)\vee\big(x+4=-2(x-1)\big)$ $\Rightarrow (x=2)\vee(x=-2)$ Αλλά, $$(x=2)\vee(x=-2)\Leftrightarrow \lvert x\rvert=2$$
4.	Έστω $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ με $\left\lvert\frac{2\alpha+3\beta}{3\alpha+2\beta}\right\rvert\leq 1$. Έχουμε $\left\lvert\frac{2\alpha+3\beta}{3\alpha+2\beta}\right\rvert\leq 1 \Rightarrow \lvert 2\alpha+3\beta\rvert\leq\lvert 3\alpha+2\beta\rvert$ $\Rightarrow \lvert 2\alpha+3\beta\rvert^2\leq\lvert 3\alpha+2\beta\rvert^2$ $\Rightarrow (2\alpha+3\beta)^2\leq(3\alpha+2\beta)^2$ $\Rightarrow 4\alpha^2+12\alpha\beta+9\beta^2\leq 9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2$ $\Rightarrow \beta^2\leq\alpha^2 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2}\leq 1$ $\Rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\leq 1$ Αλλά, $$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\leq 1 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert\leq 1$$
5.	Καταρχάς, αφού $\alpha\cdot\beta\neq 0$, έπεται ότι $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ και άρα οι παραστάσεις $\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert$ και $\left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert$ έχουν νόημα (οι παρονομαστές δεν είναι μηδέν). Έχουμε **(α)** $$\alpha^2<16\beta^2 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2}<16 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<16$$ Αλλά, $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<16 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert<4$$ **(β)** $$\left\lvert\frac{\alpha}{\beta}\right\rvert<4 \Rightarrow \left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert>\frac{1}{4} \Rightarrow -\left\lvert\frac{\beta}{\alpha}\right\rvert<-\frac{1}{4}$$

	και άρα $$\left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\| - \left\|\frac{\beta}{\alpha}\right\| = \left\|\frac{\alpha}{\beta}\right\| + \left(-\left\|\frac{\beta}{\alpha}\right\|\right) < 16 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$
6.	Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Έχουμε $$\|\alpha - \beta\| = \|\alpha + (-\beta)\| \leq \|\alpha\| + \|-\beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|,$$ από την τριγωνική ανισότητα και το ότι $$\|-x\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}$$
7.	Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\|2\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - 2\beta\|^2 = (2\alpha + \beta)^2 + (\alpha - 2\beta)^2$ $= 4\alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2$ $= 5\alpha^2 + 5\beta^2 = 5(\alpha^2 + \beta^2) = 5(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2)$ αφού $\|x\|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
8.	Έστω $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta \neq 0$. Έχουμε: **(α)** $$\big\|\|\alpha\| - \|\beta\|\big\| = \|\alpha + \beta\| \Rightarrow \big\|\|\alpha\| - \|\beta\|\big\|^2 = \|\alpha + \beta\|^2$$ $\Rightarrow (\|\alpha\| - \|\beta\|)^2 = (\alpha + \beta)^2$ $\Rightarrow \|\alpha\|^2 - 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| + \|\beta\|^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$ $\Rightarrow \alpha^2 - 2\|\alpha \cdot \beta\| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$ $\Rightarrow -\|\alpha \cdot \beta\| = \alpha \cdot \beta$ $\Rightarrow \|\alpha \cdot \beta\| = -\alpha \cdot \beta$ Αλλά, $$\|\alpha \cdot \beta\| = -\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \leq 0$$ Συνεπώς, είτε $\alpha \cdot \beta < 0$ και άρα οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, είτε $\alpha\beta = 0$, δηλ. $\alpha = \beta = 0$ η οποία περίπτωση αποκλείεται αφού $\alpha\beta \neq 0$. Άρα, οι αριθμοί είναι ετερόσημοι. **(β)** $$\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\| \Rightarrow \|\alpha + \beta\|^2 = (\|\alpha\| + \|\beta\|)^2$$ $\Rightarrow (\alpha + \beta)^2 = \|\alpha\|^2 + 2\|\alpha\| \cdot \|\beta\| + \|\beta\|^2$ $\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 = \alpha^2 + 2\|\alpha \cdot \beta\| + \beta^2$ $\Rightarrow \|\alpha \cdot \beta\| = \alpha \cdot \beta$ Συνεπώς, $\alpha \cdot \beta \geq 0$ και άρα είτε $\alpha \cdot \beta > 0$ και άρα οι αριθμοί είναι ομόσημοι, είτε $\alpha \cdot \beta = 0$, δηλ. $\alpha = \beta = 0$ η οποία περίπτωση αποκλείεται αφού $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Άρα, οι αριθμοί είναι ομόσημοι.