3.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Δραστηριότητες σελ. 111 (ιδιότητες απόλυτων τιμών)

1. **(α)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{3|x|+1}{2}+\frac{2|x|-1}{3}=\frac{|x|+2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6(3|x|+1)+4(2|x|-1)}{12}=\frac{3(|x|+2)}{12}$$
$$\Leftrightarrow 18|x|+6+8|x|-4=3|x|+6$$
$$\Leftrightarrow 23|x|=4 \Leftrightarrow |x|=\frac{4}{23}$$
$$\Leftrightarrow \left(x=\frac{4}{23}\right) \vee \left(x=-\frac{4}{23}\right)$$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{5-|1-3x|}{6}=0 \Leftrightarrow 5-|1-3x|=0$$
$$\Leftrightarrow |1-3x|=5 \Leftrightarrow (1-3x=5) \vee (1-3x=-5)$$
$$\Leftrightarrow \left(x=-\frac{4}{3}\right) \vee (x=2)$$

(γ) Αν $x \geq 0$, τότε $|x|=x$ και έχουμε

$$x^2-3|x|+2x-6=0 \Leftrightarrow x^2-3x+2x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x=3) \vee (x=-2)$$

Αλλά η $x=-2$ απορρίπτεται αφού $x \geq 0$

Αν $x<0$, τότε $|x|=-x$ και έχουμε

$$x^2-3|x|+2x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+3x+2x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+5x-6=0$$
$$\Leftrightarrow (x+6)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x=-6) \vee (x=1)$$

Αλλά η $x=1$ απορρίπτεται αφού $x<0$. Συνεπώς, οι λύσεις της εξίσωσης είναι $(x=-6) \vee (x=3)$

(δ) $|3x-4|=3x+5 \Leftrightarrow (3x-4=3x+5) \vee (3x-4=-3x-5) \Leftrightarrow (0x=9) \vee \left(x=-\frac{1}{6}\right)$

Η $0x=9$ είναι αδύνατη και άρα η (μοναδική) λύση είναι η $x=-\frac{1}{6}$

(ε) $|x^2-1|=-3|x+1|$ Αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε$|x^2-1| \geq 0$ ενώ $-3|x+1| \leq 0$, η μοναδική περίπτωση που θα μπορούσε να είναι λύση, θα ήταν ο αριθμός που θα μηδένιζε και τις δύο παραστάσεις στα απόλυτα. Το Α’ μέλος μηδενίζεται όταν $(x=-1) \vee (x=1)$ και το Β΄ μέλος $(x=-1) \vee (x=3)$. Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-1$.

(στ)

$$(x-3)^2-4|x-3|=12 \Leftrightarrow |x-3|^2-4|x-3|-12=0.$$

Θέτοντας λοιπόν $\omega=|x-3|$, η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\omega^2-4\omega-12=0 \Leftrightarrow (\omega-6)(\omega+2)=0 \Leftrightarrow (\omega=6) \vee (\omega=-2)$$

Είναι

$$\omega=6 \Leftrightarrow |x-3|=6 \Leftrightarrow (x-3=6) \vee (x-3=-6) \Leftrightarrow (x=9) \vee (x=-3)$$

και $\omega=-2 \Leftrightarrow |x-3|=-2$ η οποία είναι αδύνατη.

2. **(α)** $|x+6|<3 \Leftrightarrow -3<x+6<3 \Leftrightarrow -9<x<-3 \Leftrightarrow x \in (-9,-3)$

(β)

$$|3x-1| \geq 5 \Leftrightarrow (3x-1 \leq -5) \vee (3x-1 \geq 5)$$
$$\Leftrightarrow \left(x \leq -\frac{4}{3}\right) \vee (x \geq 2) \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup [2, +\infty)$$

(γ) $|x-11| \geq -10$ είναι αληθής $\forall x \in \mathbb{R}$

(δ)

$$\frac{1}{|x-1|} < 2 \Leftrightarrow 1 < 2|x-1| \Leftrightarrow \frac{1}{2} < |x-1|$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1 < -\frac{1}{2}\right) \vee \left(x-1 > \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{2}\right) \vee \left(x > \frac{3}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

(ε)

$|3x| < |2x-5| \Leftrightarrow |3x|^2 < |2x-5|^2$
$\Leftrightarrow (3x)^2 < (2x-5)^2$
$\Leftrightarrow 9x^2 < 4x^2 - 20x + 25$
$\Leftrightarrow 5x^2 + 20x - 25 < 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$
$\Leftrightarrow (x+5)(x-1) < 0$
την οποία και λύνουμε κατα τα γνωστά όπου βρίσκουμε $x \in (-5,1)$

(στ) $4 < |x-2| < 9 \Leftrightarrow (4 < |x-2|) \vee (|x-2| < 9)$
Είναι δε

$$4 < |x-2| \Leftrightarrow (x-2 < -4) \vee (x-2 > 4)$$
$$\Leftrightarrow (x < -2) \vee (x > 6) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$$

και

$$|x-2| < 9 \Leftrightarrow -9 < x-2 < 9$$
$$\Leftrightarrow -7 < x < 11 \Leftrightarrow x \in (-7,11)$$

αρα οι λύσεις είναι το διάστημα $(-7,-2) \cup (6,11)$.

3. Έχουμε

$$\sqrt{(x^2-5x+6)^2} = x^2 - 5x + 6$$
$$\Leftrightarrow |x^2-5x+6| = x^2 - 5x + 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$$

4. Έχουμε

$$|\alpha-1| + |\alpha-\beta-4| = 0 \Leftrightarrow (\alpha-1=0) \wedge (\alpha-\beta-4=0)$$

αφού $|\alpha-1| \geq 0$ και $|\alpha-\beta-4| \geq 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αλλά,

$$(\alpha-1=0) \wedge (\alpha-\beta-4=0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha=1) \wedge (\alpha-\beta-4=0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha=1) \wedge (1-\beta-4=0)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha=1) \wedge (\beta=-3)$$

5.

$$\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 5 \\ 3|x| - 2|y| = 1 \end{cases}$$

Λύνουμε το πιο πάνω σύστημα κατα τα γνωστά, με αγνώστους τα $|x|$ και $|y|$ και βρίσκουμε $|x| = 1 = |y|$.
Για κάθε μία από τις λύσεις της εξίσωσης $|x| = 1$, οι οποίες είναι οι $x = \pm 1$ έχουμε μια (διαφορετική) λύση της εξίσωσης $|y| = 1$, οι λύσεις της οποίας είναι οι $y = \pm 1$.

	Σχηματίζουμε τα 4 ζεύγη λύσεων: $$(1,1), \quad (-1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,-1).$$
6.	$$\begin{aligned}&\lvert x+2\rvert < 2 \Rightarrow -2 < x+2 < 2\\ &\Rightarrow -4 < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < 4\\ &\Rightarrow 0 < -3x < 12 \Rightarrow 2 < -3x+2 < 14\\ &\Rightarrow -14 < 3x-2 < -2\end{aligned}$$ αλλά, $-2 < 14$ και άρα $$-14 < 3x-2 < 14$$ δηλ. $\lvert 3x-2\rvert < 14$. **(α)** Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου x^2+x+1 είναι $\Delta = -3 < 0$ και αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός έπεται ότι $x^2+x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα $\lvert x^2+x+1\rvert = x^2+x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ Επίσης, $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$ $\Rightarrow \lvert (2x-1)^2\rvert = (2x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα, $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned}A(x) &= \lvert 4x^2-4x+1\rvert - \lvert x^2+x+1\rvert\\ &= (2x-1)^2 + x^2+x+1 = 3x^2-5x\end{aligned}$$ **(β)** $A(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-5x = 0 \Leftrightarrow x(3x-5) = 0$ $$\Leftrightarrow (x=0) \vee \left(x = \frac{5}{3}\right)$$