3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Δραστηριότητες σελ. 79 (Η έννοια της απόλυτης τιμής)

1. (α) $|\sqrt{5}-5|$, αφού $5>\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5}-5<0$

$$\Rightarrow |\sqrt{5}-5| = -(|\sqrt{5}-5|) = 5-\sqrt{5}$$

(β) $|\eta\mu x - 1| - |1-\sigma\upsilon\nu x|,\ x \in \mathbb{R}$

Ξέρουμε ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\eta\mu x \leq 1 \Rightarrow \eta\mu x - 1 \leq 0$$
$$\Rightarrow |\eta\mu x - 1| = -(\eta\mu x - 1) = 1 - \eta\mu x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

και $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $\sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x \geq 0 \Rightarrow |1-\sigma\upsilon\nu x| = 1-\sigma\upsilon\nu x,\ x \in \mathbb{R}$ και άρα $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|\eta\mu x - 1| - |1-\sigma\upsilon\nu x| = 1-\eta\mu x - (1-\sigma\upsilon\nu x)$$
$$= 1-\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

(γ) $|\pi-4|-|1-\pi|$

Ξέρουμε ότι $\pi \approx 3.14$ και άρα $\pi<4 \Rightarrow |\pi-4| = -(\pi-4) = 4-\pi$ και $\pi>1 \Rightarrow |1-\pi| = -(1-\pi)$ και αρα

$$|\pi-4|-|1-\pi| = 4-\pi-[-(1-\pi)]$$
$$= 4-\pi+1-\pi = 5-2\pi$$

(δ) $|-\kappa^2-1|$

$$\kappa^2 \geq 0 \Rightarrow -\kappa^2 \leq 0 \Rightarrow -\kappa^2-1 \leq -1 < 0$$

και άρα $|-\kappa^2-1| = -(-\kappa^2-1) = \kappa^2+1$

(ε) $|\lambda-2|,\ \lambda \in [0,4]$

Αφού $0 \leq \lambda \leq 4 \Rightarrow -2 \leq \lambda-2 \leq 2$, δηλ.

$$(-2 \leq \lambda-2 \leq 0) \vee (0<\lambda-2 \leq 2)$$

Άρα,

- Για $-2 \leq \lambda-2 < 0$, δηλαδή $0 \leq \lambda < 2$, έχουμε

$$|\lambda-2| = -(\lambda-2) = 2-\lambda$$

- Για $0 \leq \lambda-2 \leq 2$, δηλαδή $2 \leq \lambda \leq 4$, $|\lambda-2| = \lambda-2$

Άρα,

$$|\lambda-2| = \begin{cases} \lambda-2, & \lambda \in [2,4] \\ 2-\lambda, & \lambda \in [0,2) \end{cases}$$

2. Θα υπολογίσουμε την τιμή της πιο κάτω παράστασης

$$A = |\sqrt{3}-3| - |3-\sqrt{3}|$$

Αφού $\sqrt{3}<3 \Rightarrow \sqrt{3}-3<0 \Rightarrow |\sqrt{3}-3| = -(\sqrt{3}-3) = 3-\sqrt{3}$. Ομοίως, $|3-\sqrt{3}| = 3-\sqrt{3}$. Έχουμε

$$A = |\sqrt{3}-3| - |3-\sqrt{3}| = 3-\sqrt{3}-(3-\sqrt{3}) = 3-\sqrt{3}-3+\sqrt{3} = 0$$

3. Θα αποδείξουμε ότι η παράσταση

$$K = |x-1|+|x-3|, 1<x<3$$

είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x, δηλ. ότι αυτή δεν περιλαμβάνει τη μεταβλητή x.

Αφού $1<x<3 \Rightarrow x-1>0$ και $x-3<0$. Συνεπώς, $|x-1| = x-1$ και $|x-3| = 3-x$. Άρα, (για $1<x<3$)

$$K = |x-1|+|x-3| = x-1+3-x = 2$$

και άρα αυτή είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x.

4. $\alpha<2<\beta$, Αφού $\alpha<2<\beta \Rightarrow \alpha-2<0$ και $\beta-2>0$. Επίσης, $\alpha<\beta$ και άρα $\beta-\alpha<0$. Τέλος, $\beta>2 \Rightarrow \beta+2>4>0$. Συνεπώς, $|\alpha-2| = 2-\alpha$, $|\beta-\alpha| = \beta-\alpha, |\beta-2| = \beta-2$ και $|\beta+2| = \beta+2$.

Άρα,

(α) $A = |\alpha - 2| + |\beta + 2| - 7 = 2 - \alpha + \beta + 2 - 7 = \beta - \alpha - 3$

(β) $B = |\beta - \alpha| - |\beta - 2| + \alpha - 1 = \beta - \alpha - (\beta - 2) + \alpha - 1 = \beta - \alpha - \beta + 2 + \alpha - 1 = 1$

5. **(α)** $A = |x+1| + |x-1| - 2x + 3$

Έχουμε:

Για $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow |x-1| = x - 1$

Για $x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x-1| = 1 - x$

Για $x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow |x+1| = x + 1$

Για $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -1 - x$

Συνεπώς,

- Για $x \leq -1$, έχουμε

$$\begin{aligned} A &= |x+1| + |x-1| - 2x + 3 \\ &= -(x+1) + [-(x-1)] - 2x + 3 = -4x + 3 \end{aligned}$$

- Για $-1 < x < 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} A &= |x+1| + |x-1| - 2x + 3 \\ &= (x+1) + [-(x-1)] - 2x + 3 = -2x + 5 \end{aligned}$$

- Για $x \geq 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} A &= |x+1| + |x-1| - 2x + 3 \\ &= (x+1) + (x-1) - 2x + 3 = 3 \end{aligned}$$

6. **(α)** $|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow (2x - 1 = 3) \lor (2x - 1 = -3) \Leftrightarrow (x = 2) \lor (x = -1)$

Διαισθητικά, οι λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης είναι οι αριθμοί τους οποίους το διπλάσιο απέχει από το $x = 1$τρείς μονάδες, δηλ. οι αριθμοί $x = 2$ και $x = -1$.

(β) $|2x + 4| = -4$. Η εξίσωση αυτή είναι αδύνατη, δηλ. το σύνολο λύσεών της είναι το κενό σύνολο.

(γ) $|x^2 - 2x - 12| = 12$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 12 = 12) \lor (x^2 - 2x - 12 = -12)$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 24 = 0) \lor (x^2 - 2x = 0)$

$\Leftrightarrow \big((x-6)(x+4) = 0\big) \lor (x(x-2) = 0)$

$\Leftrightarrow (x = -4{,}6) \lor (x = 0{,}2) \Leftrightarrow x = -4{,}0{,}2{,}6$

(δ) Για $x \neq 2$, $\left|\frac{x+5}{2-x}\right| = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{x+5}{2-x} = 6\right) \lor \left(\frac{x+5}{2-x} = -6\right)$

$$\Leftrightarrow \big(x + 5 = 6(2 - x)\big) \lor \big(x + 5 = -6(2 - x)\big)$$

$$\Leftrightarrow (7x = 7) \lor (5x = 17) \Leftrightarrow (x = 1) \lor \left(x = \frac{17}{5}\right)$$

7.

$$|\alpha \cdot \beta| = -(\alpha\beta) \Leftrightarrow \alpha\beta \leq 0$$

Συνεπώς, είτε $\alpha\beta < 0$ και άρα οι αριθμοί είναι ετερόσημοι, είτε $\alpha\beta = 0$, δηλ. $\alpha = \beta = 0$.

8.

$(\alpha > 0) \land (\beta > 0)$	$(\alpha > 0) \land (\beta < 0)$	$(\alpha < 0) \land (\beta > 0)$	$(\alpha < 0) \land (\beta < 0)$
Τότε, $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = \beta$ και άρα $A = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\beta} = 1 + 1 = 2$	Τότε, $|\alpha| = \alpha$ και $|\beta| = -\beta$ και άρα $A = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\beta}{\beta} = 1 - 1 = 0$	Τότε, $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = \beta$ και άρα $A = -\frac{\alpha}{\alpha} + \frac{\beta}{\beta} = -1 + 1 = 0$	Τότε, $|\alpha| = -\alpha$ και $|\beta| = -\beta$ και άρα $A = -\frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\beta}{\beta} = -1 - 1 = -2$