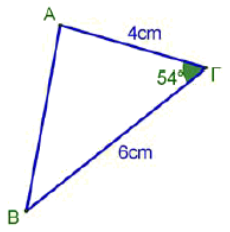
2.2 ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

2.2.3 Εμβαδόν τριγώνου - Λύσεις

1.

(α) $\hat{\Gamma} = 54^o,\ \beta = A\Gamma = 4cm,\ \alpha = B\Gamma = 6cm$

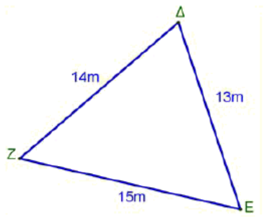
$$\boldsymbol{E}_{AB\Gamma} = \frac{\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma}}{2} = \frac{6 \times 4\eta\mu 54^o}{2} = \mathbf{9,71}\ cm^2$$



(β) $\varepsilon = \Delta Z = 14cm,\ \zeta = \Delta E = 13cm,\ \delta = ZE = 15cm$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Delta} = \frac{\varepsilon^2 + \zeta^2 - \delta^2}{2\varepsilon\zeta} = \frac{14^2 + 13^2 - 15^2}{2 \times 14 \times 13} = 0{,}384$$
$$\Rightarrow \hat{\Delta} = 67.38^o \Rightarrow \text{ημ}\hat{\Delta} = \eta\mu 67.38^o = 0.92$$

$$\boldsymbol{E}_{AB\Gamma} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon\zeta\eta\mu\hat{\Delta}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{84}\ \boldsymbol{cm^2}$$



2.

$\boldsymbol{E} = 2\sqrt{3}cm^2, \qquad \alpha = 2cm, \qquad \beta = 4cm,\ \hat{\Gamma} < 90^o$

$$\boldsymbol{E} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma}}{2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{3}\right) \vee \left(\hat{\Gamma} = \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \boldsymbol{\hat{\Gamma}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$$

Τότε

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4 + 16 - \gamma^2}{16}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{20 - \gamma^2}{16} \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma} = \sqrt{\mathbf{12}} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\boldsymbol{cm}$$

(αφού $\gamma > 0$) και

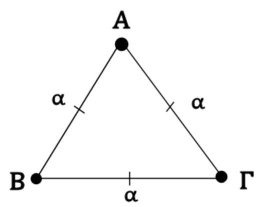
$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{4}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{2\sqrt{3}}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{4}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{B} = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\hat{B}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$

Τέλος,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \pi \Rightarrow \boldsymbol{\hat{A}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$$

3.

$$\boldsymbol{E}_{AB\Gamma} = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



4.

Το τρίγωνο $ΑΒΔ$ είναι ορθογώνιο, αρα

$$\boldsymbol{E}_{ΑΒΔ} = \frac{(ΑΔ)(ΑΒ)}{2} = \frac{(ΑΔ)(ΑΒ)}{2} = 2400\ m^2$$

Επίσης, στο ίδιο τρίγωνο, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα,

$$(ΑΔ)^2 + (ΑΒ)^2 = (ΒΔ)^2 \Rightarrow \boldsymbol{ΒΔ = 100\ m}$$

Τώρα, θα βρούμε το $\boldsymbol{E}_{ΒΔΓ}$

$$συν\hat{Γ} = \frac{(ΓΔ)^2 + (ΒΓ)^2 - (ΒΔ)^2}{2(ΓΔ)(ΒΓ)} = \frac{141^2 + 128^2 - 100^2}{2 \times 141 \times 128} = 0{,}7276$$

$$\Rightarrow \hat{Γ} = 43.31^\circ \Rightarrow ημ\hat{Γ} = ημ43.31^\circ = 0.686$$

και αρα

$$\boldsymbol{E}_{ΒΔΓ} = \frac{(ΓΔ)(ΒΓ)ημ\hat{Γ}}{2} = 6190{,}464\ \ m^2$$

Αφού το πραγματικό εμβαδόν είναι **μικρότερο** από το εμβαδόν που ισχυρίζεται ο ιδιοκτήτης, η Άρτεμις έχει δίκαιο (άσχετο αν πιθανών δεν το υπολόγισε).

5.

(α) Σε τυχόν τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε

$$\begin{cases} α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυν\hat{A} \\ E_{ΑΒΓ} = \dfrac{βγημ\hat{A}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυν\hat{A} \\ \dfrac{2E_{ΑΒΓ}}{ημ\hat{A}} = βγ \end{cases}$$

$$\Rightarrow α^2 = β^2 + γ^2 - 2\frac{2E_{ΑΒΓ}}{ημ\hat{A}}συν\hat{A}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{α^2 = β^2 + γ^2 - 4E_{ΑΒΓ}εφ\hat{A}}$$

(β)

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{βγημ\hat{A}}{2} = \frac{βγ\frac{α}{2R}}{2} = \frac{αβγ}{4R}.$$

6.

Είναι $(ΟΑ) = (ΟΒ) = R$. Το τρίγωνο $ΟΑΒ$ είναι ισοσκελές. Φέρνουμε το ύψος (το οποίο είναι και διάμεσος και διχοτόμος) $(ΟΓ)$. Είναι $ΑΓ = \frac{(ΑΒ)}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο αυτό, έχουμε

$$(ΟΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΟΓ)^2 \Rightarrow R^2 = \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (ΟΓ)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{3R^2}{4} + (ΟΓ)^2 \Rightarrow (ΟΓ) = \frac{R}{2}$$

Έτσι,

$\boldsymbol{E}_{ΑΟΓ} = \frac{(ΑΓ)(ΟΓ)}{2} = \frac{\frac{R}{2}\times\frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$ και αφού $\boldsymbol{E}_{ΑΟΓ} = \boldsymbol{E}_{ΒΟΓ}$, έπεται ότι

$$\boldsymbol{E}_{ΑΟΒ} = 2 \times \frac{R^2\sqrt{3}}{8} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$