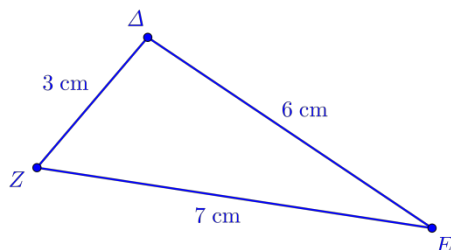


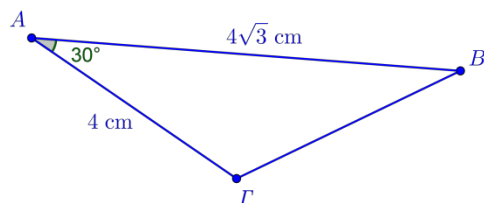
Δραστηριότητες

1. Να επιλύσετε τα πιο κάτω τρίγωνα:

(α)



(β)



2. (α) Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 6$ cm, $\beta = 10$ cm και $\hat{\Gamma} = 24^\circ$.

(β) Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 5$ cm, $\beta = 3$ cm και $\gamma = 4$ cm.

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

(α) $a \sin B + \beta \sin A = \gamma$

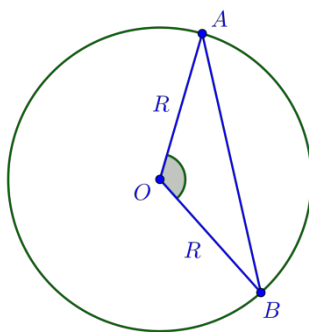
(β) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2 \sin \Gamma}{a\beta} = \frac{\gamma^2}{a^2 \beta^2}$

(γ) $(\beta + \gamma) \sin A + (\gamma + a) \sin B + (a + \beta) \sin \Gamma = a + \beta + \gamma$

4. Τα μέτρα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $\hat{B} = 40^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 80^\circ$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$.

5. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a = 2\beta \sin \Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

6. Σε κύκλο $K(O, R)$ φέρουμε χορδή AB . Να αποδείξετε ότι $AB = R\sqrt{2 - 2\sin(\angle AOB)}$.



7. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$. Να αποδείξετε ότι $a^2 = 3\beta^2$.

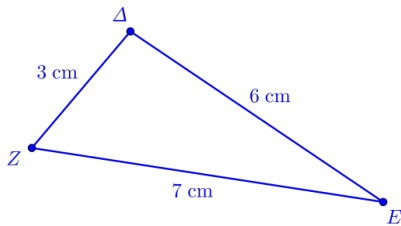
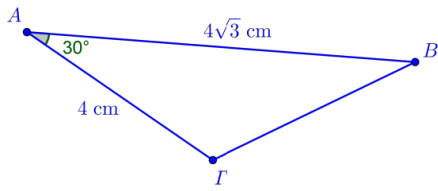
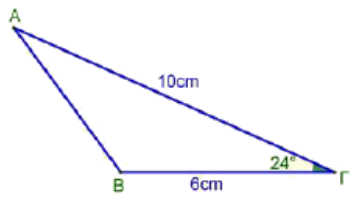
8. Ένας δασονόμος βρίσκεται στη θέση A και παρατηρεί με το τηλεσκόπιό του το τοπογραφικό σημείο Σ_1 , που απέχει 30 km από αυτόν. Στη συνέχεια, ο δασονόμος παρατηρεί το τοπογραφικό σημείο Σ_2 , που απέχει 55 km από αυτόν. Αν η απόσταση μεταξύ των τοπογραφικών σημείων Σ_1 και Σ_2 είναι 45 km, να υπολογίσετε πόσες μοίρες πρέπει να στρέψει το τηλεσκόπιό του, ώστε να παρατηρήσει το τοπογραφικό σημείο Σ_2 .



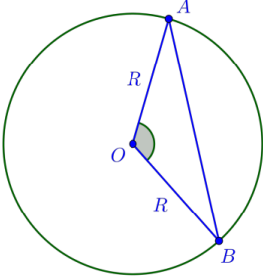
9. Να αποδείξετε ότι αν η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι οξεία, τότε $a^2 < b^2 + \gamma^2$.

2.2 ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

2.2.2 Νόμος Συνημιτόνων - Λύσεις

1.	(α) $\delta = 7 \text{ cm}$, $\zeta = 6 \text{ cm}$, $\varepsilon = 3 \text{ cm}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{E} = \frac{\delta^2 + \zeta^2 - \varepsilon^2}{2\delta\zeta} = \frac{7^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = 0.9 \Rightarrow \hat{E} = 25,31^0$ $\frac{\zeta}{\eta\mu\hat{Z}} = \frac{\varepsilon}{\eta\mu\hat{E}} \Rightarrow \frac{6}{\eta\mu\hat{Z}} = \frac{3}{\eta\mu(25,31)}$ $\Rightarrow \eta\mu\hat{Z} = 2\eta\mu(25,31) \approx 0.855 \Rightarrow \hat{Z} = 58,75^0$ Τέλος, $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180 \Rightarrow \hat{\Delta} = 95,94^0$  (β) $\gamma = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$, $\hat{A} = 30^0$ $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A} \Rightarrow \alpha^2 = 16 + 48 - 32\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu30^0$ $\Rightarrow \alpha^2 = 64 - 32\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 64 - 48 = 16$ $\Rightarrow \alpha = 4 \text{ cm} \text{ (αφού } \alpha > 0)$ Αφού $\alpha = \beta$, έπεται ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές (με $\Gamma A = \Gamma B = 4 \text{ cm}$) και αρα $\hat{B} = \hat{A} = 30^0$ και $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 120^0$ 
2.	(α) $\alpha = 6 \text{ cm}$, $\beta = 10 \text{ cm}$, $\hat{\Gamma} = 24^0$ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10\sigma\upsilon\nu24^0$ $= 26.38 \Rightarrow \gamma = 5.14 \text{ cm}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{10^2 + (5.14)^2 - 6^2}{2 \cdot 10 \cdot (5.14)} = 0.8795$ $\Rightarrow \hat{A} = 28,41^0$ Τέλος, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180 \Rightarrow \hat{B} = 127,59^0$  (β) $\alpha = 5 \text{ cm}$, $\beta = 3 \text{ cm}$, $\gamma = 4 \text{ cm}$ $\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^0$

	$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} \Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{3}{\eta\mu\hat{B}} \Rightarrow \eta\mu\hat{B} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{B} = 36,9^0$ Τέλος, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180 \Rightarrow \hat{\Gamma} = 53,1^0$
3.	(α) Έστω A, B και Γ πλευρές τριγώνου. Τότε $\alpha\sigma\upsilon\nu\hat{B} + \beta\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \alpha \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} + \beta \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$ $= \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\gamma^2}{\gamma} = \gamma$ (β) Έχουμε: $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{2\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}{\alpha\beta} = \frac{\overbrace{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}^{\gamma^2}}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}$ (γ) $\begin{aligned} & (\beta + \gamma)\sigma\upsilon\nu A + (\gamma + \alpha)\sigma\upsilon\nu B + (\alpha + \beta)\sigma\upsilon\nu \Gamma = \\ & (\beta + \gamma) \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma} \right) + (\gamma + \alpha) \left(\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma} \right) + (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \right) = \\ & \frac{\beta(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)}{2\beta\gamma} + \frac{\gamma(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)}{2\beta\gamma} + \frac{\gamma(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)}{2\alpha\gamma} + \frac{\alpha(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)}{2\alpha\gamma} + \\ & \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{2\alpha\beta} + \frac{\beta(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)}{2\alpha\beta} = \\ & \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} + \\ & \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta} = \\ & \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\gamma} + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\beta} + \\ & \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \frac{2\gamma^2}{2\gamma} + \frac{2\beta^2}{2\beta} + \frac{2\alpha^2}{2\alpha} = \alpha + \beta + \gamma \end{aligned}$
4.	$\hat{B} = 40^0, \hat{\Gamma} = 80^0 \Rightarrow \hat{A} = 60^0$. Έτσι, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu 60^0$ $= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \frac{1}{2} = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
5.	$\begin{cases} \alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} \\ \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \Rightarrow \alpha = 2\beta \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} \\ \Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \end{cases}$ $\Rightarrow \beta^2 = \gamma^2$ και αφού $\beta, \gamma > 0$, έπεται ότι $\beta = \gamma$ και το συμπέρασμα έπεται.

6.	Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\sin\widehat{AOB}$ δηλ. $(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sin\widehat{AOB}$, δηλ. $(AB)^2 = 2R^2 - 2R^2\sin\widehat{AOB}$, δηλ. $(AB)^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sin\widehat{AOB}$ δηλ. $(AB)^2 = 2R^2(1 - \sin\widehat{AOB})$ και αφού $(AB) > 0$, έπεται ότι $(AB) = \sqrt{2R^2(1 - \sin\widehat{AOB})} = R\sqrt{2 - 2\sin\widehat{AOB}}$ 
7.	$\widehat{A} = 120^0$ και αφού το τρίγωνο είναι επιπλέον και ισοσκελές, έχουμε ότι $\beta = \gamma$. Έτσι, $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin\widehat{A} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin 120^0$ $= \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma \quad \quad \quad = 3\beta^2$ $(\beta = \gamma)$ Σημείωση: $\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = -\sin(60^0) = -\frac{1}{2}$
8.	$\sin\widehat{A} = \frac{(\Sigma_1 A)^2 + (\Sigma_2 A)^2 - (\Sigma_1 \Sigma_2)^2}{2(\Sigma_1 A)(\Sigma_2 A)} = 0,575 \dots \Rightarrow \widehat{A} = 54,85^0$ 
9.	Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin\widehat{A}$ Αλλά, από υπόθεση, η γωνία $\widehat{A}$ είναι οξεία, δηλ. $\widehat{A} \in (0, \frac{\pi}{2})$ και αρα $0 < \sin\widehat{A} < 1$. Επίσης, τότε θα έχουμε $0 > -2\sin\widehat{A} > -2$ και αρα, αφού $\beta, \gamma > 0$, έχουμε ότι $-2\beta\gamma\sin\widehat{A} < 0$. Συνεπώς, αφού $\beta^2, \gamma^2 > 0$, $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin\widehat{A} < \beta^2 + \gamma^2$ Τελικά, $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2.$