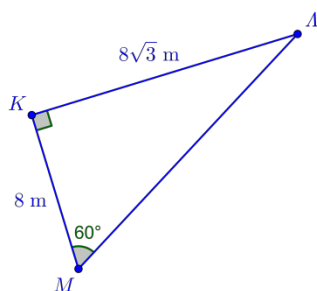


Δραστηριότητες

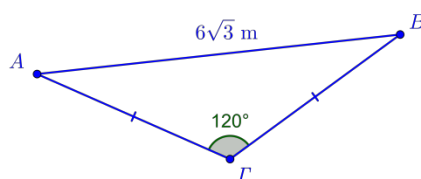
1. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι η γωνία $\hat{\Gamma} = 150^\circ$ και η πλευρά $\gamma = 3$ cm, τότε να αποδείξετε ότι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $R = 3$ cm.

2. Να επιλύσετε τα πιο κάτω τρίγωνα:

(α)

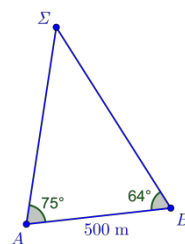


(β)



3. (α) Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $a = 4$ cm, $\beta = 2\sqrt{2}$ cm και $\hat{B} = 30^\circ$.
 (β) Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 100^\circ$, $\hat{B} = 37^\circ$ και $\gamma = 4$ cm.

4. Δύο εμπορικά πλοία βρίσκονται στις θέσεις A και B σε απόσταση 500 m, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στη θέση Σ βρίσκεται ένα λιμάνι. Οι γωνίες $\Sigma\hat{A}B$ και $\Sigma\hat{B}A$ έχουν μέτρο 75° και 64° , αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την απόσταση του πλοίου από το λιμάνι που βρίσκεται στην θέση A .



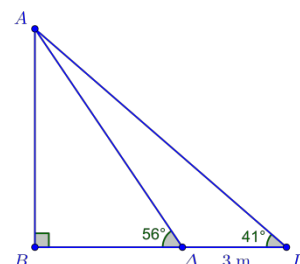
5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

(α) $\eta\mu A + \eta\mu B = \frac{a + \beta}{2R}$

(β) $\beta(\eta\mu A - \eta\mu \Gamma) + a(\eta\mu \Gamma - \eta\mu B) + \gamma(\eta\mu B - \eta\mu A) = 0$

6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $a\eta\mu A = \beta\eta\mu B$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
 7. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B = \eta\mu^2 \Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $a = 5$ cm, $\beta = 5\sqrt{3}$ cm και $\hat{A} = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A\hat{B}\Gamma = 90^\circ$ και $A\hat{\Delta}B = 41^\circ$. Το μέτρο της γωνίας $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι 56° και το μήκος του τμήματος $\Delta\Gamma$ είναι 3 m. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB του τριγώνου $AB\Gamma$.



2.2 ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

2.2.1 Νόμος Ημιτόνων - Λύσεις

1.

$$\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} = 2R \Rightarrow \frac{3}{\eta\mu 150^0} = 2R$$

Αλλά, $\eta\mu 150^0 = \eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$ και άρα η πιο πάνω σχέση μας δίνει $R = 3 \text{ cm}$.

2. (α)

$$KL = 8\sqrt{3} \text{ m}, KM = 8 \text{ m}, \quad \hat{M} = 60^0$$

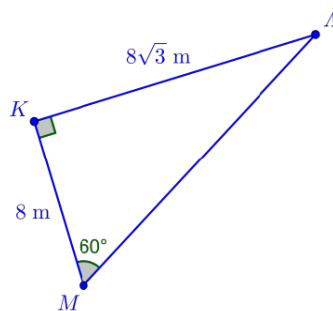
$$\frac{KM}{\eta\mu\hat{L}} = \frac{KL}{\eta\mu\hat{M}} = \frac{LM}{\eta\mu\hat{K}} \Leftrightarrow \frac{8}{\eta\mu\hat{L}} = \frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^0} = \frac{LM}{\eta\mu\hat{K}}$$

Από την $\frac{8}{\eta\mu\hat{L}} = \frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^0}$ βρίσκουμε ότι $\eta\mu\hat{L} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^0$

και άρα $\hat{L} = 30^0$ ή $\hat{L} = 150^0$

Αν όμως $\hat{L} = 150^0$, τότε αφού $\hat{M} = 60^0$, θα είχαμε ότι $\hat{L} + \hat{K} + \hat{M} > 180^0$, άτοπο, άρα $\hat{L} = 30^0$ και έτσι, $\hat{K} = 90^0$ Τέλος,

$$\frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^0} = \frac{LM}{\eta\mu\hat{K}} \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{3}}{\eta\mu 60^0} = \frac{LM}{\eta\mu 90^0} \Leftrightarrow LM = 16 \text{ m}$$



(β $\gamma = 6\sqrt{3} \text{ cm}$, $\beta = \alpha$, $\hat{\Gamma} = 120^0$).

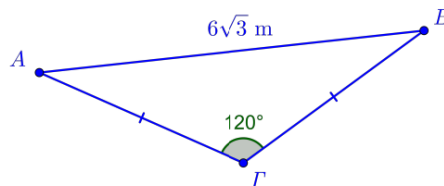
$$\beta = \alpha \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

Άρα, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0 \Rightarrow 2\hat{B} = 180^0 - 120^0 \Rightarrow \hat{B} = 30^0$.

Τέλος,

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu 30^0} = \frac{6\sqrt{3}}{\eta\mu 120^0}$$

από την οποία βρίσκουμε ότι $\alpha = 6 \text{ cm}$.



3. (α) $\alpha = 4 \text{ cm}, \beta = 2\sqrt{2} \text{ cm}, \hat{B} = 30^\circ$

$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{4}{\eta\mu\hat{A}} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\eta\mu\hat{A}} \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{\eta\mu\hat{A}} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{A} = 45^\circ \text{ ή } \hat{A} = 135^\circ$$

Αν $\hat{A} = 45^\circ$:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 105^\circ$$

και

$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow 4 = \frac{\gamma}{\eta\mu 105^\circ} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \gamma = 5,46 \text{ cm}$$

Αν $\hat{A} = 135^\circ$:

(δουλεύουμε όπως πριν)

$$\hat{\Gamma} = 15^\circ \text{ και } \gamma = 51,46 \text{ cm}$$

(β) $\gamma = 4 \text{ cm}, \hat{A} = 100^\circ, \hat{B} = 37^\circ$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 43^\circ$$

$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\eta\mu 37^\circ} = \frac{4}{\eta\mu 43^\circ} \Leftrightarrow \beta = 3,53 \text{ cm}$$

και

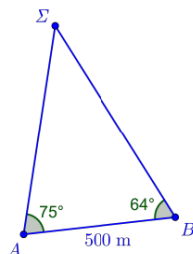
$$\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} \Leftrightarrow \frac{3,53}{\eta\mu 37^\circ} = \frac{\alpha}{\eta\mu 100^\circ} \Leftrightarrow \alpha = 5,78 \text{ cm}$$

4. Ψάχνουμε την απόσταση ΣΑ. Έχουμε

$$\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Sigma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Sigma} = 41^\circ}{\frac{\Sigma A}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\Sigma B}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{AB}{\eta\mu\hat{\Sigma}} \Leftrightarrow \frac{\Sigma A}{\eta\mu 64^\circ} = \frac{\Sigma B}{\eta\mu 75^\circ} = \frac{500}{\eta\mu 41^\circ}}$$

Έτσι,

$$\frac{\Sigma A}{\eta\mu 64^\circ} = \frac{500}{\eta\mu 41^\circ} \Leftrightarrow \Sigma A = \frac{500}{\eta\mu 41^\circ} \eta\mu 64^\circ = 685 \text{ m.}$$



5. (α) Έπεται εύκολα προσθέτοντας τις σχέσεις $\frac{\alpha}{2R} = \eta\mu\hat{A}$ και $\frac{\beta}{2R} = \eta\mu\hat{B}$

(β) Έχουμε

$$\alpha(\eta\mu\hat{\Gamma} - \eta\mu\hat{B}) + \beta(\eta\mu\hat{A} - \eta\mu\hat{\Gamma}) + \gamma(\eta\mu\hat{B} - \eta\mu\hat{A}) = \alpha\eta\mu\hat{\Gamma} - \alpha\eta\mu\hat{B} + \beta\eta\mu\hat{A} - \beta\eta\mu\hat{\Gamma} + \gamma\eta\mu\hat{B} - \gamma\eta\mu\hat{A}$$

	$\begin{cases} \alpha\eta\mu\hat{B} = \beta\eta\mu\hat{A} \\ \beta\eta\mu\hat{\Gamma} = \gamma\eta\mu\hat{B} \\ \alpha\eta\mu\hat{\Gamma} = \gamma\eta\mu\hat{A} \end{cases} \begin{matrix} = \\ \\ = 0 \end{matrix} \begin{matrix} \gamma\eta\mu\hat{A} - \beta\eta\mu\hat{A} + \beta\eta\mu\hat{A} - \gamma\eta\mu\hat{B} + \gamma\eta\mu\hat{B} \\ - \gamma\eta\mu\hat{A} \end{matrix}$
6.	Από την υπόθεση, έχουμε $\alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B \Rightarrow \alpha = \frac{\beta\eta\mu B}{\eta\mu A}$ Αλλά, $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}$ Συνεπώς, $\frac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B} = \frac{\beta\eta\mu B}{\eta\mu A} \Rightarrow \eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B$ και άρα $\eta\mu A = \pm\eta\mu B$. Όμως, επειδή οι γωνίες A και B αποτελούν γωνίες τριγώνου, δεν μπορεί να είναι $\eta\mu A = -\eta\mu B$. Έτσι, $\eta\mu A = \eta\mu B$ και άρα είτε $A = B$ οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές είτε $A = 180^\circ - B$ η οποία περίπτωση επίσης αποκλείεται για τον ίδιο λόγο.
7.	Έχουμε: $\begin{cases} \alpha\eta\mu\hat{B} = \beta\eta\mu\hat{A} \\ \beta\eta\mu\hat{\Gamma} = \gamma\eta\mu\hat{B} \\ \alpha\eta\mu\hat{\Gamma} = \gamma\eta\mu\hat{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2\eta\mu^2 B = \beta^2\eta\mu^2 A \\ \beta^2\eta\mu^2 \Gamma = \gamma^2\eta\mu^2 B \\ \alpha^2\eta\mu^2 \Gamma = \gamma^2\eta\mu^2 A \end{cases}$ Προσθέτοντας κατά μέλη τη 2η και 3η εξίσωση παίρνουμε: $\alpha^2\eta\mu^2 \Gamma + \beta^2\eta\mu^2 \Gamma = \gamma^2\eta\mu^2 B + \gamma^2\eta\mu^2 A$ Υπόθεση: $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B = \eta\mu^2 \Gamma$ $\Rightarrow \eta\mu^2 \Gamma(\alpha^2 + \beta^2) = \gamma^2(\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 A)$ $\Rightarrow \eta\mu^2 \Gamma(\alpha^2 + \beta^2) = \gamma^2\eta\mu^2 \Gamma \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ το οποίο είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$. Συνεπώς, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
8.	$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}} \Leftrightarrow \frac{5}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}$ $\Leftrightarrow 2 = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}$ Έτσι, $2 = \frac{\sqrt{3}}{\eta\mu\hat{B}} \Leftrightarrow \eta\mu\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 60^\circ \text{ ή } 120^\circ$ Αν $\hat{B} = 60^\circ$, τότε, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Αν $\hat{B} = 120^\circ$, τότε από την ίδια σχέση βρίσκουμε ότι $\hat{\Gamma} = 30^\circ = \hat{A}$ και άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
9.	Εύκολα βρίσκουμε ότι $B\hat{A}\Delta = 34^\circ, \quad \Delta\hat{A}\Gamma = 15^\circ, \quad A\hat{\Delta}\Gamma = 124^\circ.$ Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε $\frac{3}{\eta\mu 15^\circ} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu 124^\circ} \Rightarrow A\Gamma = 9,61 \text{ cm}$

και

$$\frac{A\Delta}{\eta\mu 41^\circ} = \frac{9,61}{\eta\mu 124^\circ} \Rightarrow A\Delta = 7,6 \text{ cm}$$

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$$\frac{B\Delta}{\eta\mu 34^\circ} = \frac{7,6}{\eta\mu 90^\circ} \Rightarrow B\Delta = 4,25 \text{ cm}$$

Τέλος, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε

$$AB \approx 6,3 \text{ cm}$$

