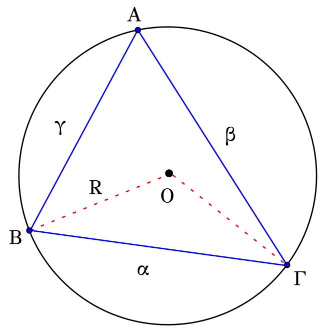
Θεώρημα 2.5.1. *(Νόμος Ημιτόνων)*

Σε κάθε τρίγωνο τα μήκη των πλευρών του είναι (ευθέως) ανάλογα προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του. Ο λόγος αυτός είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο.

Δηλαδή, σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} = \frac{\beta}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} = \frac{\gamma}{\sin\widehat{\Gamma}} = 2R. \tag{2.5.1}$$



Σχήμα 2.30: Νόμος Ημιτόνων.

Απόδειξη. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (O, R) του τριγώνου. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Μια από τις πλευρές του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και το αποτέλεσμα έπεται.

(ii) Έστω ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. Φέρουμε τη διάμετρο ΓΔ στον κύκλο και τη χορδή ΒΔ. Τότε $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta$=90° (βαίνει σε ημικύκλιο). Σχηματίσαμε έτσι ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το △ΒΓΔ. Στο τρίγωνο αυτό έχουμε

$$\sin(\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma) = \frac{(\mathrm{B}\Gamma)}{(\Gamma\Delta)} = \frac{\alpha}{2R}$$

και αφού $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma=\widehat{\mathrm{A}}$, έπεται ότι

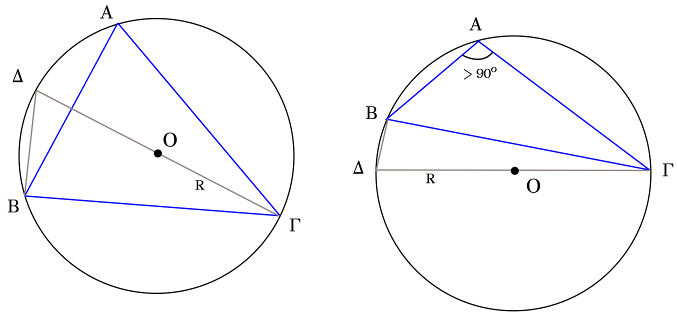
$$\frac{\alpha}{\sin\widehat{\mathrm{A}}} = 2R.$$

Ομοίως εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για τις υπόλοιπες γωνίες του △ΒΓΔ, βρίσκουμε

$$\frac{\beta}{\sin\widehat{\mathrm{B}}} = 2R \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\sin\widehat{\Gamma}} = 2R.$$

(iii) Έστω ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο (με $\widehat{\mathrm{A}}$ αμβλεία). Τότε, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με πρίν και χρησιμοποιώντας το ότι $\sin(180° - \widehat{\mathrm{A}}) = \sin\widehat{\mathrm{A}}$, καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

□



Σχήμα 2.31: Νόμος Ημιτόνων (απόδειξη).