Παιδαγωγική προσέγγιση των σχολικών ασκήσεων της Β′ Λυκείου κατεύθυνσης

Γιάννης Ι. Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός

2 Σεπτεμβρίου 2022

Θεωρία και διδακτικοί στόχοι

Σκοπός του Κεφαλαίου Ι δεν είναι ο/η μαθητής/τρια να διδαχτεί αυτόνομα τη Μαθηματική Λογική, αλλά να μάθει ορισμένες βασικές αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, Μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής, Μαθηματική Επαγωγή) και, μεταγνωστικά, να γνωρίζει πότε να χρησιμοποιήσει την κάθε μία έναντι άλλης. Είναι μια καλή ευκαιρία να αναφερθούν (ξανά) βασικά σύνολα και οι συμβολισμοί τους, όπως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών, το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών.

Επιπρόσθετα, το κεφάλαιο προσφέρεται για υπενθύμιση βασικών στοιχείων της θεωρίας αριθμών (π.χ. διαιρέτης) **και** να δοθεί έμφαση στο **τι σημαίνει** 'βρίσκω λύσεις μιας ανίσωσης '$\leq$' ' (ότι δηλαδή περιλαμβάνει και το '=' αλλά και το '$<$').

Αργότερα, όταν διδαχθούν την απόλυτη τιμή και τον ορισμό της συνάρτησης, μπορείτε να τους θέσετε το ακόλουθο ερώτημα:
'να αναλύσετε τι σημαίνει η πιο κάτω πρόταση (ή να γράψετε μια ισοδύναμη με αυτήν πρόταση): έστω f συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(x)| = 3, \ \ \forall x \in [-1, 1]$ '.

Λέμε ότι ο μη μηδενικός αριθμός a **διαιρεί** τον αριθμό b (και γράφουμε $a|b$) αν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $b = ma$.
Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι 'ο a είναι παράγοντας (ή διαιρέτης του b)' ή ότι 'ο b είναι πολλαπλάσιο του a' ή ότι 'ο b διαιρείται με τον a'.

Για παράδειγμα, $5|10$ διότι $10 = 2 \cdot 5$.

Στην περίπτωση που ο a δε διαιρεί το b, δηλαδή όταν δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός m τέτοιος ώστε $b = ma$, γράφουμε $a \not| \, b$.

► Καλό είναι να τονιστεί ότι η έκφραση '$\nu > \nu_0, \ \ \nu \in \mathbb{N}$' (όπου ν_0 κάποιος σταθεροποιημένος φυσικός αριθμός) είναι ισοδύναμη με την '$\nu \geq \nu_0 + 1, \ \ \nu \in \mathbb{N}$'.
Π.χ.

$$\nu > 3, \ \ \nu \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \nu \geq 4, \ \ \nu \in \mathbb{N}.$$

► Σημαντικό είναι, κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας της μεθόδου της Μαθηματικής Επαγωγής, να αναλυθεί το **αναδρομικό**/επαγωγικό σχήμα που αυτή περιλαμβάνει (με παράδειγμα), ότι δηλαδή το προς απόδειξη μπορεί να αποδειχθεί με μια σειρά (διαδοχικών) ισοτήτων.

► Οι περισσότεροι μαθητές, αν όχι όλοι, δυσκολεύονται στο να πηγαίνουν από την τιμή $p(\nu)$ στην $p(\nu+1)$ ενός προτασιακού τύπου $p(\nu)$, άρα δυσκολεύονται και στο επαγωγικό βήμα.
Μπορείτε για παράδειγμα να τους δώσετε πρόταση A_ν και να τους ζητήσετε να γράψουν την $A_{\nu+1}$ ή την $A_{\nu-1}$. Ένα απλό παράδειγμα είναι η $A_\nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (3\nu)$ ή η $A_\nu = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \ldots \cdot \sqrt{2\nu}$ ή η

$$A_\nu = \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(2\nu)^2}.$$

Κεφάλαιο 1

Μέθοδοι απόδειξης

1.1 Μαθηματική Λογική

Δεν υπάρχουν ασκήσεις.

1.2 Εισαγωγή – Έννοια της Απόδειξης

Δραστηριότητες σελ. 15 (Ευθεία Απόδειξη)

Άσκηση 1

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε ο αριθμός α να διαιρεί τον αριθμό β και επίσης να διαιρεί τον γ. Να αποδείξετε ότι ο α διαιρεί τη διαφορά $\beta - \gamma$.

Λύση

Η υπόθεσή μας είναι οι προτάσεις '(α να διαιρεί τον αριθμό β)' και '(α να διαιρεί τον αριθμό γ)' οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$(\exists k \in \mathbb{Z} \ : \ \beta = k\alpha)$$

και

$$(\exists m \in \mathbb{Z} \ : \ \gamma = m\alpha)$$

αντίστοιχα (δηλ. ότι οι β και γ είναι **πολλαπλάσια** του αριθμού α).
Τότε,

$$\beta - \gamma = k\alpha - m\alpha = \underbrace{(k-m)}_{\in \mathbb{Z}}\alpha,$$

δηλ. η διαφορά $\beta - \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού α και το αποτέλεσμα έπεται. ◀

Άσκηση 2

Έστω α, β πραγματικοί θετικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \leq \beta$, τότε $\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$.

Λύση

Αφού οι α, β είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, έπεται ότι οι αριθμοί $\sqrt{\alpha}$ και $\sqrt{\beta}$ έχουν νόημα. Αφού $(\sqrt{\alpha})^2 =$ και $(\sqrt{\beta})^2 = \beta$, έχουμε

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 \leq (\sqrt{\beta})^2 \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2 - (\sqrt{\beta})^2 \leq 0,$$

δηλαδή (διαφορά δύο τετραγώνων)

$$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}) \leq 0.$$

Αλλά, $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \geq 0$ (με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha=\beta=0$) και αρα η πιο πάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την

$$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta} \leq 0,$$

δηλαδή με την

$$\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}.$$

Ας σημειώσουμε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $\alpha=\beta$. ◀

Άσκηση 3

Αν $x, y \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $36x^2+3y=4y^2+9x$, να αποδείξετε ότι $y=3x$ ή $12x+4y=3$.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 36x^2+3y=4y^2+9x &\Leftrightarrow 36x^2-9x=4y^2-3y \\ &\Leftrightarrow 9(4x^2-x)=4y^2-3y \end{aligned} \tag{1.1}$$

Αλλά

$$4x^2-x=(2x)^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot 2x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}$$

και

$$4y^2-3y=(2y)^2-2\cdot\frac{3}{4}\cdot 2y+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(2y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}.$$

Αντικαθιστούμε στην (1.1):

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 9\left[\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]=\left(2y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow 9\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}=\left(2y-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow 9\left(2x-\frac{1}{4}\right)^2=\left(2y-\frac{3}{4}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left[3\left(2x-\frac{1}{4}\right)\right]^2-\left(2y-\frac{3}{4}\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \left[3\left(2x-\frac{1}{4}\right)-\left(2y-\frac{3}{4}\right)\right]\cdot\left[3\left(2x-\frac{1}{4}\right)+\left(2y-\frac{3}{4}\right)\right]=0 \\ &\Leftrightarrow (6x-2y)\cdot(6x+2y-3/2)=0 \\ &\Leftrightarrow (y=3x)\vee(12x+4y=3). \end{aligned}$$

◀

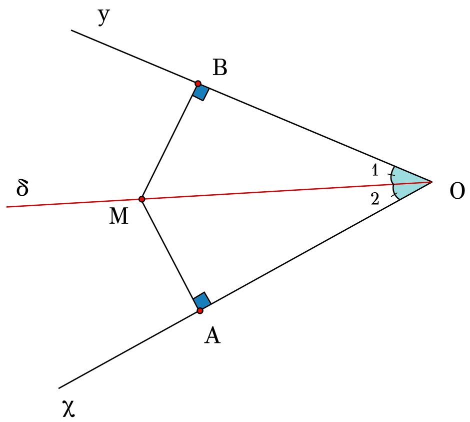
Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

Λύση

Έστω γωνία $x\widehat{O}y$. Φέρουμε τη διχοτόμο δ της γωνίας (δες σχήμα πιο κάτω).
Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου. Φέρουμε τις προβολές MA και MB στις πλευρές x και y αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι $(MA) = (MB)$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM : είναι $(OM) = (OM)$ (κοινή πλευρά), $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$ (δ διχοτόμος) και $O\widehat{M}B = O\widehat{M}A = 90°$ (από κατασκευή). Άρα, τα τρίγωνα είναι ίσα (Π-Γ-Ο) και αρα $(MA) = (MB)$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι κάθε εσωτερικό σημείο M της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της ανήκει στη διχοτόμο της: συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM και βρίσκουμε ότι είναι ίσα, άρα $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$, συνεπώς, η δ είναι διχοτόμος της $x\widehat{O}y$. ◀



Σχήμα 1.1: Άσκηση 4

Ασκήσεις σελ. 18. (Μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής)

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι αν ο $a^2 - 2a + 7,\ a \in \mathbb{Z}$ είναι περιττός αριθμός, τότε ο αριθμός a είναι άρτιος αριθμός.

Λύση

Θα το δείξουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.
Έστω λοιπόν ότι ο αριθμός a **ΔΕΝ είναι άρτιος**, δηλ. ότι είναι περιττός. Τότε είναι της μορφής $2m - 1$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 7 &= (2m-1)^2 - 2(2m-1) + 7 = 4m^2 - 4m + 1 - 4m + 2m + 7 \\ &= 4m^2 - 6m + 8 = 2\underbrace{(2m^2 - 3m + 4)}_{\in \mathbb{N}}, \end{aligned}$$

δηλ. $a^2 - 2a + 7$ είναι πολλαπλάσιο του αριθμού **2**, δηλαδή άρτιος, άτοπο.
Άρα, ο a είναι άρτιος αριθμός. ◀

Άσκηση 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι

$$\text{ημ}x + \text{συν}x \geq 1.$$

Λύση

1ος τρόπος (με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής)

Υποθέτουμε (δηλαδή την **άρνηση της προς απόδειξη πρότασης**) ότι υπάρχει[1] $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τέτοιος ώστε ισχύει

$$\text{ημ}x + \text{συν}x < 1.$$

Τότε,

$$\text{ημ}x + \text{συν}x < 1 \Rightarrow (\text{ημ}x + \text{συν}x)^2 < 1,$$

δηλαδή

$$\text{ημ}^2 x + 2\text{ημ}x\text{συν}x + \text{συν}^2 x < 1$$

και αφού $\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1$, το πιο πάνω δίνει

$$2\text{ημ}x\text{συν}x < 0$$

το οποίο δεν μπορεί να συμβαίνει, αφού

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{ημ}x,\ \text{συν}x \geq 0 \Rightarrow \text{ημ}x\text{συν}x \geq 0 \Rightarrow 2\text{ημ}x\text{συν}x \geq 0.$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπον.

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι

$$\text{ημ}x + \text{συν}x \geq 1.$$

2ος τρόπος (με ευθεία απόδειξη)

Έστω (**τυχόν**) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Τότε

$$\begin{cases} 0 \leq \text{ημ}x \leq 1 \\ 0 \leq \text{συν}x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \text{ημ}x \leq \text{ημ}^2 x \\ 0 \leq \text{συν}x \leq \text{συν}^2 x \end{cases} \Rightarrow \text{ημ}x + \text{συν}x \geq \text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1.$$

◀

Άσκηση 3

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $1 \leq x$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{x} \leq x.$$

[1] Αυτό σημαίνει πως υπάρχει **τουλάχιστον** ένας.

Λύση

(με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής)

Υποθέτουμε ότι $\exists x \in [1, +\infty)$, τέτοιος ώστε $\sqrt{x} > x$. Τότε (αφού $x \geq 1 > 0$),

$$\begin{aligned} \sqrt{x} > x &\Leftrightarrow \sqrt{x} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) > 0 \\ (\text{αφού } \sqrt{x} > 0) &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1, \end{aligned}$$

άτοπο. ◀

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μία ορθή γωνία.

Λύση

Θεωρείται γνωστό ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180 μοίρες.

Υποθέτουμε ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$, οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι ορθές. Τότε,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ + \widehat{\Gamma} > 180^\circ,$$

άτοπο, αφού $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.
Έτσι, κάθε τρίγωνο δεν μπορεί να έχει δύο ή περισσότερες ορθές γωνίες, άρα έχει το πολύ μία. Στην περίπτωση που δεν έχει καμία, το τρίγωνο λέγεται **οξυγώνιο** ενώ στην περίπτωση που έχει (ακριβώς) μία ορθή, λέγεται **ορθογώνιο**.

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και αντί 'ορθή' θεωρήσουμε τη λέξη 'αμβλεία' γωνία.

Για να δώσουμε μια **ευθεία** απόδειξη του πιο πάνω, θεωρείται γνωστό το ακόλουθο Θεώρημα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία:

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Υποθέτουμε π.χ. ότι η γωνία $\widehat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ορθή. Θα δείξουμε ότι οι άλλες δύο γωνίες του τριγώνου είναι οξείες.
Η $\widehat{B}_{\text{εξ.}}$ είναι παραπληρωματική της $\widehat{B}$, άρα και αυτή ορθή και αφού $\widehat{A} < \widehat{B}_{\text{εξ.}} \Rightarrow \widehat{A} < 90^\circ$. Ομοίως, $\widehat{\Gamma} < 90^\circ$. ◀

Ασκήσεις σελ. 24 (Μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής)

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

(α) $2+4+6+\ldots+2\nu=\nu(\nu+1)$

(β) $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

(γ) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}=\dfrac{\nu}{\nu+1}.$

(δ) $1+5+5^2+\ldots+5^{\nu-1}=\dfrac{5^\nu-1}{4}$

Λύση

(α) **Σημείωση:** Το αριστερό μέλος της προς απόδειξη σχέσης αναφέρεται λεκτικά ώς 'το άθροισμα των πρώτων ν θετικών άρτιων αριθμών'.

(Με επαγωγή στο ν)

Βήμα 1

Για $\nu=1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με 2 και το δεύτερο ίσο με $1(1+1)=2$ και άρα τα δύο μέλη (για $\nu=1$) είναι ίσα. Άρα για $\nu=1$ ισχύει.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu=k\in\mathbb{N},\ \ k\geq 2,$ δηλαδή ότι

$$2+4+6+\ldots+2k=k(k+1)$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)

και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=k+1$, δηλαδή ότι

$$2+4+6+\ldots+2(k+1)=(k+1)(k+2).$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Α μέλος} &= \underbrace{2+4+6+\ldots+2k}_{=k(k+1)}+2(k+1)\\
&= k(k+1)+2(k+1)\\
&\quad \text{βγάζω κοινό παράγοντα το } (k+1)\\
&= (k+1)\cdot(k+2)\\
&= \text{Β μέλος}
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu=k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

(β) **Σημείωση:** Το αριστερό μέλος της προς απόδειξη σχέσης αναφέρεται λεκτικά ώς 'το άθροισμα των τετραγώνων των πρώτων ν θετικών ακεραίων αριθμών'.
(Με επαγωγή στο ν)
Βήμα 1
Για $\nu = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με $1^2 = 1$ και το δεύτερο ίσο με $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$ και άρα τα δύο μέλη (για $\nu = 1$) είναι ίσα. Συνεπώς, για $\nu = 1$ ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N},\ \ k \geq 2,$ δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k+1$, δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6},$$

δηλαδή ότι

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Α μέλος} &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k+1)^2}_{=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 + (k+1)^2 \\
& \quad \text{βγάζω κοινό παράγοντα το } (k+1) \\
&= (k+1)\cdot\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] \\
& \quad \text{κάνω ομώνυμα} \\
&= (k+1)\cdot\left[\frac{2k^2+k+6k+6}{6}\right] = (k+1)\cdot\frac{2k^2+7k+6}{6} \\
& \quad \text{παραγοντοποιώ: } 2k^2+7k+6 = (k+2)(2k+3) \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \text{Β μέλος.}
\end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k + 1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν. ◀

Σημείωση: Αν δε θυμάστε την παραγοντοποίηση τριωνύμου, ή δεν τη μάθατε ποτέ, τώρα είναι μια καλή ευκαιρία να την θυμηθείτε και να τη μάθετε.

(γ) (Με επαγωγή στο ν)
Βήμα 1
Για $\nu = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με $\dfrac{1}{1\cdot(1+1)} = \dfrac{1}{2}$ και το δεύτερο ίσο με $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ και άρα τα δύο μέλη (για $\nu = 1$) είναι ίσα. Συνεπώς, για $\nu = 1$ ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N},\ \ k \geq 2,$ δηλαδή ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k + 1$, δηλαδή ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\cdot((k+1)+1)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

δηλαδή ότι

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Α μέλος} &= \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} \\
& \quad \text{βγάζω κοινό παράγοντα το } \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\cdot\left(k + \frac{1}{k+2}\right)
\end{aligned}$$

κάνω ομώνυμα

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^2+2k+1}{k+2}$$

παραγοντοποιώ: $k^2+2k+1=(k+1)^2$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^2}{k+2} = \frac{k+1}{k+2}$$

$=$ Β μέλος.

Άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν.

(δ) **Σημείωση:** Η προς απόδειξη σχέση γράφεται (ισοδύναμα) ως

$$5+5^2+5^3+\ldots+5^\nu = \frac{5^{\nu+1}-1}{4}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Εμείς θα αποδείξουμε την αρχική, με επαγωγή στο $\nu \in \mathbb{N}$.

Βήμα 1
Για $\nu = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με 1 και το δεύτερο ίσο με $\frac{5^1-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$ και άρα τα δύο μέλη (για $\nu = 1$) είναι ίσα. Συνεπώς, για $\nu = 1$ ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N}, \ k \geq 2,$ δηλαδή ότι

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^{k-1} = \frac{5^k-1}{4}$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k+1$, δηλαδή ότι

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^{(k+1)-1} = \frac{5^{k+1}-1}{4},$$

δηλαδή

$$5^0+5^1+5^2+\ldots+5^k = \frac{5^{k+1}-1}{4}.$$

Έχουμε:

$$\text{Α μέλος} = \underbrace{5^0+5^1+5^2+\ldots+5^{k-1}}_{=\frac{5^k-1}{4}} + 5^k$$

$$= \frac{5^k-1}{4} + 5^k = \frac{5^k-1+4\cdot 5^k}{4}$$

$$= \frac{5\cdot 5^k-1}{4} = \frac{5^{k+1}-1}{4} = \text{Β μέλος.}$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν. ◄

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\nu \geq 2$ ισχύει:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + \nu \cdot (\nu - 1) = \frac{\nu(\nu^2 - 1)}{3}.$$

Λύση

Σημείωση: Εδώ ξεκινάμε από $\nu = 2$ και όχι από $\nu = 1$, γιατί για $\nu = 1$ η προς απόδειξη σχέση δεν ισχύει (ο προτασιακός τύπος δεν αληθεύει για $\nu = 1$).
(Με επαγωγή στο $\nu \geq 2$)

Βήμα 1
Για $\nu = 2$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με $2 \cdot 1 = 2$ και το δεύτερο ίσο με $\dfrac{2 \cdot (2^2 - 1)}{3} = \dfrac{2 \cdot 3}{3} = 2$ και άρα τα δύο μέλη (για $\nu = 2$) είναι ίσα. Συνεπώς, για $\nu = 2$ ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N},\;\; k \geq 3,$ δηλαδή ότι

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k - 1) = \frac{k(k^2 - 1)}{3}$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k + 1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1) \cdot ((k+1) - 1) = \frac{(k+1)((k+1))^2 - 1)}{3}$$

δηλαδή ότι

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1) \cdot k = \frac{(k+1)(k^2 + 2k + 1 - 1)}{3},$$

δηλαδή ότι

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (k+1) \cdot k = \frac{(k+1)k(k+2)}{3}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Α μέλος} &= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + k \cdot (k-1)}_{=\frac{k(k^2-1)}{3}} + (k+1) \cdot k \\
&= \frac{k(k^2 - 1)}{3} + (k+1) \cdot k \;\; = \;\; \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + (k+1) \cdot k \\
&= k(k+1) \cdot \left(\frac{k-1}{3} + 1\right) \;\; = \;\; k(k+1) \cdot \frac{k - 1 + 3}{3} \\
&= \frac{(k+1)k(k+2)}{3} \;\; = \;\; \text{Β μέλος.}
\end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu):\ 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + \nu\cdot(\nu-1) = \frac{\nu(\nu^2-1)}{3}$$

είναι το σύνολο $\{2,3,4,\ldots\}$. ◀

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός πολυγώνου με ν πλευρές δίνεται από τον τύπο

$$\Sigma_\nu = (2\nu-4)\llcorner,\quad \forall \nu \geq 3.$$

Λύση
Σημείωση: Εδώ, με Σ_ν συμβολίζουμε το άθροισμα των γωνιών πολυγώνου με ν πλευρές (με το Σ-συμβολισμό θα ασχοληθούμε σε επόμενο κεφάλαιο).
Ο προτασιακός τύπος εδώ είναι ο $p(\nu):\ \Sigma_\nu = (2\nu-4)\llcorner$.
Θα δείξουμε με επαγωγή στο ν ότι το σύνολο αλήθειας του είναι το σύνολο $\{3,4,5,\ldots\}$.

Βήμα 1
Για $\nu=3$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με $\Sigma_3 = (2\cdot 3-4)\cdot 90^\circ = 180^\circ$=άθροισμα γωνιών **τριγώνου** (είναι αξίωμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δηλαδή θεωρούμε ότι είναι ορθό a priori) άρα ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \in \mathbb{N},\ k \geq 4,$ δηλαδή ότι το άθροισμα των γωνιών του k-γωνου, είναι

$$\Sigma_k = (2k-4)\llcorner$$

(αυτή είναι και η επαγωγική μας υπόθεση)
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k+1$, δηλαδή ότι το άθροισμα των γωνιών του $(k+1)$-γωνου, είναι

$$\Sigma_{k+1} = (2(k+1)-4)\llcorner = (2k-2)\llcorner.$$

Αυτό όμως ισχύει, αφού για να σχηματιστεί ενα πολύγωνο με $(k+1)$ κορυφές, αρκεί να θεωρήσουμε μια ακόμη κορυφή και έτσι το άθροισμα των γωνιών του θα αυξηθεί κατά $2\llcorner$. Συνεπώς,

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k + 2\llcorner = (2k-4)\llcorner + 2\llcorner = (2k-2)\llcorner$$

Άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu):\ \Sigma_\nu = (2\nu-4)\llcorner$$

είναι το σύνολο $\{3,4,5,\ldots\}$. ◀

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι το 6 διαιρεί την παράσταση

$$A_\nu = 7^\nu - 1,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

Σημείωση: Ο δείκτης ν στο A_ν μπήκε για να δηλωθεί η εξάρτηση της παράστασης από το (εκάστοτε) ν.
(Με επαγωγή στο $\nu \geq 1$)
Βήμα 1
Για $\nu = 1, \;\; A_1 = 7^1 - 1 = 6$ και αφού το 6 διαιρεί τον εαυτό του, έχουμε ότι ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι το 6 διαιρεί την παράσταση $A_k = 7^k - 1$. Τότε, $7^k - 1 = 6\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k+1$, δηλαδή ότι το 6 διαιρεί την παράσταση $A_{k+1} = 7^{k+1} - 1$.
Έχουμε:

$$A_{k+1} = 7^{k+1} - 1 = 7 \cdot 7^k = 7 \cdot (6\lambda) - 1 = 42\lambda + 6 = 6\underbrace{(7\lambda + 1)}_{=\mu} = 6\mu$$

και άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \;\; 6|(A_\nu = 7^\nu - 1)$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ◀

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι το 7 διαιρεί την παράσταση

$$B_\nu = 9^\nu - 2^\nu,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

(Με επαγωγή στο $\nu \geq 1$)
Βήμα 1
Για $\nu = 1, \;\; B_1 = 9^1 - 2^1 = 7$ και αφού το 7 διαιρεί τον εαυτό του, έχουμε ότι ισχύει.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι το 7 διαιρεί την παράσταση

$B_k = 9^k - 2^k$. Τότε, $9^k - 2^k = 7\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k+1$, δηλαδή ότι το 7 διαιρεί την παράσταση $B_{k+1} = 9^{k+1} - 2^{k+1}$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= 9^{k+1} - 2^{k+1} = 9 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot 9^k - 2 \cdot 2^k \\ &= 7 \cdot 9^k + 2 \cdot \underbrace{(9^k - 2^k)}_{=7\lambda} \\ &= 7 \cdot 9^k + 7\lambda \quad = 7 \cdot \underbrace{(9^k + \lambda)}_{=\mu} \\ &= 7 \cdot \mu \end{aligned}$$

και άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k+1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \; 7|(B_\nu = 9^\nu - 2^\nu)$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ◄

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι το 5 διαιρεί την παράσταση

$$\Gamma_\nu = 16 \cdot 2^\nu + 9 \cdot 27^\nu,$$

για κάθε $\nu \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Λύση

$$p(\nu): \quad 5|(\Gamma_\nu = 16 \cdot 2^\nu + 9 \cdot 27^\nu).$$

(Με επαγωγή στο $\nu \geq 0$)
Βήμα 1
Για $\nu = 0$, $\Gamma_0 = 16 \cdot 2^0 + 9 \cdot 27^0 = 16 + 9 = 25 = 5^2 = 5 \cdot 5$ και άρα ο 5 διαιρεί τη Γ_0. Συνεπώς, ο $p(0)$ είναι αληθής.

Σημείωση: Μια καλή ιδέα είναι να γίνει και η περίπτωση που $\nu = 1$, για να φανεί πως από την περίπτωση $\nu = 0$ μεταβαίνουμε στην επόμενη (άρα και στο επόμενο βήμα, το επαγωγικό)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 16 \cdot 2^1 + 9 \cdot 27^1 = 16 \cdot 2 + 9 \cdot 27 \\ &= 16 \cdot 2 + 9 \cdot (25 + 2) \; = \; 16 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot (16 + 9) + 9 \cdot 25 \quad = \; = 2 \cdot 25 + 9 \cdot 25 \\ &= 11 \cdot 25 \quad = \quad 5 \cdot (5 \cdot 11). \end{aligned}$$

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = k \geq 1$, δηλαδή ότι το 5 διαιρεί την παράσταση $\Gamma_k = 16 \cdot 2^k + 9 \cdot 27^k$. Τότε, $16 \cdot 2^k + 9 \cdot 27^k = 5\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu = k + 1$, δηλαδή ότι το 5 διαιρεί την παράσταση $\Gamma_{k+1} = 16 \cdot 2^{k+1} + 9 \cdot 27^{k+1}$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{k+1} &= 16 \cdot 2^{k+1} + 9 \cdot 27^{k+1} = 16 \cdot 2 \cdot 2^k + 9 \cdot 27 \cdot 27^k \\
&= 16 \cdot 2 \cdot 2^k + 9 \cdot (25 + 2) \cdot 27^k \\
&= 16 \cdot 2 \cdot 2^k + 9 \cdot 25 \cdot 27^k + 9 \cdot 2 \cdot 27^k \\
&= 2 \cdot \underbrace{(16 \cdot 2^k + 9 \cdot 27^k)}_{=5\lambda} + 25 \cdot 9 \cdot 27^k \\
&= 2 \cdot 5\lambda + 5^2 \cdot 9 \cdot 27^k \\
&= 5 \cdot \underbrace{(2 \cdot \lambda + 5 \cdot 9 \cdot 27^k)}_{\equiv\mu} = 5\mu
\end{aligned}$$

και άρα το ζητούμενο ισχύει **και** για $\nu = k + 1$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \; 5|(\Gamma_\nu = 16 \cdot 2^\nu + 9 \cdot 27^\nu)$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. ◄

Δραστηριότητες ενότητας (σελ. 27)

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι αν ο $\nu \in \mathbb{N}$ είναι άρτιος αριθμός, τότε ο $7\nu + 1$ είναι περιττός.

Λύση

(Με **ευθεία απόδειξη**, αφού είναι φανερό ότι μπορούμε να κάνουμε απ' ευθείας χρήση των ορισμών άρτιος/περιττός αριθμός)
Έστω ν είναι άρτιος αριθμός. Τότε, ο ν γράφεται ως $\nu = 2\lambda$, όπου λ ακέραιος αριθμός. Τότε,

$$7\nu + 1 = 7 \cdot (2\lambda) + 1 = 2 \cdot (7\lambda) + 1,$$

δηλαδή ο $7\nu + 1$ είναι περιττός αριθμός. Αυτό που αποδείξαμε, ισχύει βέβαια για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό ν. ◀

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $4\nu^3 + 2\nu - 1$ είναι περιττός για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

(Με **ευθεία απόδειξη**)
Έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε

$$4\nu^3 + 2\nu - 1 = 2(2n^3 + \nu) - 1$$

και αφού $(2n^3 + \nu) \in \mathbb{Z}$ (ιδιαίτερα, ο αριθμός αυτός είναι φυσικός), έχουμε ότι ο $4\nu^3 + 2\nu - 1$ είναι περιττός. ◀

Άσκηση 3

Αν ο a είναι άρτιος αριθμός και ο β είναι περιττός αριθμός, να αποδείξετε ότι ο 4 δεν διαιρεί τον $a^2 + 2\beta^2$.

Λύση

(Με **ευθεία απόδειξη**)
a άρτιος $\Rightarrow \quad a = 2\lambda$ για κάποιον ακέραιο αριθμό λ και β περιττός $\Rightarrow \quad \beta = 2\mu - 1$ για κάποιον ακέραιο αριθμό μ.
Τότε,

$$\begin{aligned} a^2 + 2\beta^2 &= (2\lambda)^2 + 2(2\mu - 1)^2 \\ &= 4\lambda^2 + 2(4\mu^2 - 4\mu + 1) \\ &= 4\lambda^2 + 8\mu^2 - 8\mu + 2 \\ &= 4(\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\mu) + 2. \end{aligned}$$

Ο αριθμός 4 διαιρεί τον αριθμό $4(\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\mu)$, όχι όμως και τον αριθμό 2, άρα ο 4 δεν μπορεί να διαιρεί τον αριθμό $a^2 + 2\beta^2$.
Σημείωση: Μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Τα βήματα είναι

όμοια. ◄

Άσκηση 4

Δίνεται τρίγωνο *ΑΒΓ* με *ΑΒ*<*ΑΓ*. Παίρνουμε σημείο *Δ* πάνω στην πλευρά *ΑΓ*, τέτοιο ώστε *ΑΒ*=*ΑΔ*. Να αποδείξετε ότι:

$$\Delta\widehat{B}\Gamma = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

Λύση

Με **ευθεία απόδειξη**, οπόταν το πρόβλημα είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
Αφού το τρίγωνο *ΑΒΔ* είναι ισοσκελές, έπεται ότι $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{B}\Gamma$. Επίσης (η εξωτερική γωνιά είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών της) $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}$ και τότε

$$\begin{aligned} \Delta\widehat{B}\Gamma &= \widehat{B} - A\widehat{\Delta}B = \widehat{B} - A\widehat{B}\Delta \\ &= \widehat{B} - (\Delta\widehat{B}\Gamma + \widehat{\Gamma}). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$2\Delta\widehat{B}\Gamma = \widehat{B} - \widehat{\Gamma} \Rightarrow \Delta\widehat{B}\Gamma = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

◄

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

(α) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4\nu - 3) = 2\nu^2 - \nu$

(β) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + \nu \cdot (\nu + 2) = \dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}$

(γ) $\dfrac{(\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot \ldots \cdot (2\nu)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\nu - 1)} = 2^\nu.$

Λύση

Με **Μαθηματική Επαγωγή** και τα 3 ερωτήματα.

(α) Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu): \quad 1 + 5 + 9 + \ldots + (4\nu - 3) = 2\nu^2 - \nu.$$

Βήμα 1

Για $\nu = 1$, το πρώτο μέλος είναι ίσο με 1 και το δεύτερο $2 \cdot 1^2 - 1 = 1$. Άρα ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι ο $p(k)$ είναι αληθής, για $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι

$$1 + 5 + 9 + \ldots + (4k - 3) = 2k^2 - k.$$

Θα δείξουμε ότι και ο $p(k+1)$ είναι αληθής.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
1+5+9+\ldots+(4(k+1)-3) &= \underbrace{1+5+9+\ldots+(4k-3)}_{=2k^2-k}+(4(k+1)-3) \\
&= 2k^2-k+4(k+1)-3 \\
&= 2k^2-k+4k+4-3 \\
&= 2k^2+3k+1 \\
&= (k+1)(2k+1) \\
&= (k+1)[2(k+1)-1] \\
&= 2(k+1)^2-(k+1),
\end{aligned}$$

και άρα ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \ 1+5+9+\ldots+(4\nu-3) = 2\nu^2-\nu$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. ◄

(β) Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu): \quad 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+\nu\cdot(\nu+2) = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}.$$

Βήμα 1
Για $\nu=1$, το πρώτο μέλος είναι ίσο με $1\cdot 3=3$ και το δεύτερο $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6}=\dfrac{9\cdot 2}{6}=\dfrac{18}{6}=3$. Άρα ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι ο $p(k)$ είναι αληθής, για $\nu=k\geq 2$, δηλαδή ότι

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+k\cdot(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}.$$

Θα δείξουμε ότι και ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+(k+1)\cdot[(k+1)+2] &= \underbrace{1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+k\cdot(k+2)}_{=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}}+ \\
&\quad +(k+1)(k+3) \\
&\quad \text{χρησιμοποίησα την επαγωγική υπόθεση} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3) \\
&\quad \text{έβγαλα κοινό παράγοντα το } k+1 \\
&= (k+1)\cdot\left[\frac{k(2k+7)}{6}+(k+3)\right] \\
&\quad \text{έκανα ομώνυμα τα κλάσματα} \\
&= (k+1)\cdot\frac{k(2k+7)+6(k+3)}{6} \\
&= (k+1)\cdot\frac{\overbrace{2k^2+13k+18}^{=(2k+9)(k+2)}}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k+9)(k+2)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k+2+7)(k+2)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+7)}{6},
\end{aligned}
$$

άρα ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu):\ 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+\nu\cdot(\nu+2)=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+7)}{6}$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$.

(γ) Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu):\quad \frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(2\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}=2^{\nu}.$$

Χρήσιμο θα ήταν να σταθούμε λίγο στο πρώτο μέλος του προτασιακού τύπου, έτσι ώστε οι μαθητές να αντιληφθούν καλύτερα τον προς απόδειξη τύπο: (για $\nu\in\mathbb{N}$)

$$\frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(2\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}=\frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}.$$

Προχωράμε στην απόδειξη:

Βήμα 1

Για $\nu=1$, το πρώτο μέλος είναι ίσο με $\dfrac{1+1}{1}=2$ και το δεύτερο $2^1=2$. Άρα ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι ο $p(k)$ είναι αληθής, για $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)} = 2^k.$$

Θα δείξουμε ότι και ο $p(k+1)$ είναι αληθής δηλαδή ότι

$$\frac{((k+1)+1)\cdot((k+2)+1)\cdot\ldots\cdot(2(k+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2(k+1)-1)} = 2^{k+1}.$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
& \frac{((k+1)+1)\cdot((k+2)+1)\cdot\ldots\cdot(2(k+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2(k+1)-1)} = \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(2(k+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2(k+1)-1)} \\
= \quad & \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot[(k+1)+(k-1)]\cdot[(k+1)+k]\cdot[(k+1)+(k+1)]}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2(k+1)-1)} \\
= \quad & \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+1)\cdot(2(k+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2(k+1)-1)} \\
= \quad & \frac{(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k)\cdot(2k+1)\cdot(2(k+1))}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)} \\
& \text{παίρνω το } k+1 \text{ μπροστά} \\
= \quad & \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\cdot\frac{2\cdot(2k+1)}{2k+1} \\
= \quad & \underbrace{\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2k-1)}}_{=2^k}\cdot 2 \\
= \quad & 2^k\cdot2^1 \quad = \quad 2^{k+1},
\end{aligned}$$

άρα ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu):\ \frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(2\nu)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)} = 2^\nu$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$. ◄

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^{2\nu}-1$ είναι πολλαπλάσιο του 3, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Λύση

(Με **Μαθηματική Επαγωγή**)-αναφορά στις ασκήσεις 5 και 6 της σελ. 24

Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu): \quad 3|2^{2\nu}-1.$$

Βήμα 1

Για $\nu=1$, έχουμε $2^{2\nu}-1=2^{2\cdot 1}-1=2^2-1=4-1=3$ και άρα ο αφού ο 3 διαιρεί τον εαυτό του, ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu=k\geq 2$, δηλαδή ότι το 3 διαιρεί τον $2^{2k}-1$. Άρα υπάρχει ακέραιος αριθμός λ τέτοιος ώστε $2^{2k}-1=3\lambda$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\nu=k+1$, δηλαδή ότι το 3 διαιρεί τον $2^{2(k+1)}-1$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
2^{2(k+1)}-1 &= 2^{2k+2}-1 \;=\; 2^2\cdot 2^{2k}-1\\
&= 4\cdot 2^{2k}-1 \;=\; (3+1)\cdot 2^{2k}-1\\
&= 3\cdot 2^{2k}+\underbrace{2^{2k}-1}_{=3\lambda}\\
&= 3\cdot 2^{2k}+3\lambda\\
&= 3\cdot(2^{2k}+\lambda),
\end{aligned}$$

δηλαδή πολλαπλάσιο του 3. Άρα ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

Σημείωση: Κάποιοι μαθητές μπορεί να γράψουν $4\cdot 2^{2k}-1=4\cdot 2^{2k}-4+3=4\cdot 2(^{2k}-1)+3=4\cdot 3\lambda+3=3(4\lambda+1)$.

Βήμα 3

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \quad 3|2^{2\nu}-1$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. ◄

(Με **ευθεία απόδειξη**)

Θα γίνει χρήση της ταυτότητας

$$\frac{a^\nu-\beta^\nu}{a-\beta}=a^{\nu-1}+a^{\nu-2}\beta+a^{\nu-1}\beta^2+\ldots+a\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}$$

ισοδύναμα της

$$a^\nu-\beta^\nu=(a-\beta)\cdot(a^{\nu-1}+a^{\nu-2}\beta+a^{\nu-1}\beta^2+\ldots+a\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$$

η οποία μπορεί να δοθεί ως άσκηση για τους μαθητές (εξάσκηση στον Ευκλείδειο αλγόριθμο διαίρεσης πολυωνύμων).

Τότε, το αποτέλεσμα είναι άμεσο: έστω $\nu \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 2^{2\nu} - 1 &= (2^2)^\nu - 1 = 4^\nu - 1 \\ &= (4-1) \cdot (4^{\nu-1} + 4^{\nu-2} \cdot 1 + \ldots + 4 \cdot 1^{\nu-2} + 1^{\nu-1}) \\ &= 3 \cdot \underbrace{(4^{\nu-1} + 4^{\nu-2} + \ldots + 4 + 1)}_{=\lambda} \\ &= 3\lambda, \end{aligned}$$

δηλαδή πολλαπλάσιο του 3.

Δραστηριότητες σελ. 28 (Εμπλουτισμού)

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός.

Λύση

(Με **Απαγωγή σε Άτοπο**)
Υποθέτουμε ότι υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός a ο οποίος να είναι ελάχιστος. Τότε, αν β (οποιοσδήποτε) πραγματικός αριθμός με $\beta > 0$, έχουμε $a < \beta$. Όμως, π.χ. για τον $\beta = \frac{a}{2} > 0$, έχουμε $0 < \beta < a$. Άτοπο.
Άρα δεν υπάρχει ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός. ◀

Άσκηση 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P_\nu(x) = (x+1)^{2\nu} + (x+2)^\nu - 1, \ \ \nu \in \mathbb{N}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x) = (x+1)(x+2)[x(x+1)^{2\nu-1} + (x+2)^{\nu-1}].$$

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, το πολυώνυμο $P_\nu(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $T(x) = x^2 + 3x + 2$.

Λύση

(α) Έχουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P_{\nu+1}(x) - P_\nu(x) &= (x+1)^{2(\nu+1)} + (x+2)^{\nu+1} - 1 - [(x+1)^{2\nu} + (x+2)^\nu - 1] \\
&= (x+1)^{2\nu}(x+1)^2 + (x+2)^\nu(x+2) - 1 - (x+1)^{2\nu} - (x+2)^\nu + 1 \\
&= (x+1)^{2\nu}(x+1)^2 + (x+2)^\nu(x+2) - (x+1)^{2\nu} - (x+2)^\nu \\
&= (x+1)^{2\nu} \cdot [(x+1)^2 - 1] + (x+2)^\nu \cdot [(x+2) - 1] \\
&= (x+1)^{2\nu} \cdot (x^2 + 2x + 1 - 1) + (x+2)^\nu \cdot (x+1) \\
&= (x+1)^{2\nu} \cdot (x^2 + 2x) + (x+2)^\nu \cdot (x+1) \\
&= (x+1)^{2\nu} \cdot x(x+2) + (x+2)^\nu \cdot (x+1) \\
&= (x+1)(x+2) \cdot [x(x+1)^{2\nu-1} + (x+2)^{\nu-1}].
\end{aligned}$$

(β) Έστω το πολυώνυμο $P_\nu(x), \ \nu \in \mathbb{N}$ και έστω επίσης το πολυώνυμο $T(x) = x^2 + 3x + 2$.
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, το $P_\nu(x)$ διαιρεί το $T(x)$, δηλαδή ότι $P_\nu(x)|T(x)$.
Με τη μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.
Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu): \ \ P_\nu(x)|T(x).$$

Βήμα 1
Για $\nu = 1$, έχουμε ότι $P_1(x) = (x+1)^2+(x+2)^1-1 = x^2+2x+1+x+2-1 = x^2+3x+1 = T(x)$ και άρα, αφού το $T(x)$ διαιρεί τον εαυτό του, ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι ο $p(k+1)$ είναι αληθής για κάποιο $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι το πολυώνυμο $T(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $P_k(x)$. Άρα υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ με βαθμό ίσο με το βαθμό του P_k (ο οποίος είναι $2k$) μείον το βαθμό του $T(x)$ (ο οποίος είναι ίσος με 2)[2] και τέτοιο ώστε

$$P_k(x) = T(x)Q(x).$$

Θα δείξουμε ότι ο $p(k+1)$ είναι αληθής, δηλαδή ότι το πολυώνυμο $T(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $P_{k+1}(x)$.
Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι

$$T(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned}
& P_{k+1}(x) - \overbrace{P_k(x)}^{=T(x)Q(x)} = (x+1)(x+2)[x(x+1)^{2k-1} + (x+2)^{k-1}] \\
\Rightarrow\ & P_{k+1}(x) - T(x)Q(x) = (x+1)(x+2)[x(x+1)^{2k-1} + (x+2)^{k-1}] \\
\Rightarrow\ & P_{k+1}(x) = T(x)Q(x) + \underbrace{(x+1)(x+2)}_{=T(x)}[x(x+1)^{2k-1} + (x+2)^{k-1}] \\
\Rightarrow\ & P_{k+1}(x) = T(x) \cdot \underbrace{[Q(x) + x(x+1)^{2k-1} + (x+2)^{k-1}]}_{\equiv \tilde{Q}(x)} \\
\Rightarrow\ & P_{k+1}(x) = T(x) \cdot \tilde{Q}(x)
\end{aligned}$$

και άρα το $T(x)$ διαιρεί το $P_{k+1}(x)$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \quad P_\nu(x) | T(x)$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ◄

Άσκηση 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* και *Δ* ένα εσωτερικό σημείο της πλευράς *ΒΓ*. Η κάθετη από το *Δ* στην ευθεία *ΑΒ* τέμνει την *ΑΒ* στο σημείο *Ε* και η κάθετη από το *Δ* στην ευθεία *ΑΓ* τέμνει την *ΑΓ* στο σημείο *Ζ*. Να αποδείξετε ότι *ΒΓ*>*ΕΖ*.

Λύση
(Με **ευθεία απόδειξη**).
(ΒΔ)>(ΔΕ) και (ΔΓ)>(ΔΖ) (υποτείνουσες ορθογωνίων τριγώνων).
Τότε, (ΒΔ)+(ΔΓ)>(ΔΕ)+(ΔΖ), δηλαδή ΒΓ>(ΔΕ)+(ΔΖ).

[2] Δηλαδή ο βαθμός του $Q(x)$ είναι $2k-2 = 2(k-1)$.

Επίσης, (ΔΕ)+(ΔΖ)>(ΕΖ) (τριγωνική ανισότητα).
Από τα πιο πάνω έχουμε (ΒΓ)>(ΕΖ). ◀

Άσκηση 4

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + px + q = 0$ και $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ με $p, q, p_1, q_1 \in \mathbb{R}$. Αν $p \cdot p_1 = 2(q + q_1)$, να δείξετε ότι μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις αυτές έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση
(Με **Απαγωγή σε Άτοπο**)
Αν Δ_1 και Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων $x^2 + px + q = 0$ και $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ αντίστοιχα, τότε

$$\Delta_1 = p^2 - 4q, \qquad \Delta_2 = p_1^2 - 4q_1.$$

Τότε, καμία από τις δυο αυτές εξισώσεις δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $(p^2 - 4q < 0) \wedge (p_1^2 - 4q_1 < 0)$ είναι αληθής. Αλλά,

$$\begin{cases} p^2 - 4q < 0 \\ p_1^2 - 4q_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow p^2 + p_1^2 - 4(q + q_1) < 0.$$

Αλλά, από υπόθεση, είναι $p \cdot p_1 = 2(q + q_1)$ και άρα η πιο πάνω πρόταση είναι ισοδύναμη με την $(p - p_1)^2 < 0$, η οποία είναι ψευδής.
Άρα, μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις αυτές έχει πραγματικές ρίζες. ◀

Άσκηση 5

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 + 2\lambda x + \mu = 0$ και $x^2 + 2kx + \rho = 0$ με $\lambda, \mu, k, \rho \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $2\lambda k = \mu + \rho$, να αποδείξετε ότι $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$, όπου Δ_1, Δ_2 οι διακρίνουσες των δύο εξισώσεων. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις αυτές έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση
Αν Δ_1 και Δ_2 οι διακρίνουσες των εξισώσεων $x^2 + 2\lambda x + \mu = 0$ και $x^2 + 2kx + \rho = 0$ αντίστοιχα, τότε

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 4(\lambda^2 + k^2) - 4(\mu + \rho)$$

και αφού από υπόθεση είναι $2\lambda k = \mu + \rho$, έπεται ότι η τελευταία γράφεται ισοδύναμα

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 4(\lambda^2 + k^2) - 8\lambda k,$$

δηλαδή

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 4(\lambda - k)^2 \geq 0.$$

Για το δεύτερο σκέλος της ερώτησης, έχουμε ότι καμία από τις δυο αυτές εξισώσεις δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν η $(\Delta_1 < 0) \wedge (\Delta_2 < 0)$ είναι αληθής. Τότε $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$, άτοπο, αφού πιο πάνω δείξαμε ότι $\Delta_1 + \Delta_2 \geq 0$. ◀

Άσκηση 6

Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πλήθος $\nu \in \mathbb{N}$ ριζικών ισχύει:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\nu-\text{ριζικά}} < 2.$$

Λύση

Με τη μέθοδο της Μαθηματικής επαγωγής.
Προτασιακός τύπος:

$$p(\nu): \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\nu-\text{ριζικά}} < 2.$$

Βήμα 1
Για $\nu = 1$, έχουμε ότι το 1ο μέλος του $p(1)$ είναι $\sqrt{2}$ και αφού η $\sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$, ο $p(1)$ είναι αληθής.

Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι ο $p(k+1)$ είναι αληθής για κάποιο $\nu = k \geq 2$, δηλαδή ότι

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{k-\text{ριζικά}} < 2.$$

(αυτή είναι και η εποαγωγική μας υπόθεση).
Θα δείξουμε ότι ο $p(k+1)$ είναι αληθής. Έχουμε:

$$2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{k-\text{ριζικά}} < 2+2 = 4$$

και λαμβάνοντας τετραγωνικές ρίζες σε αμφότερα μέλη της πιο πάνω[3] έχουμε:

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{(k+1)-\text{ριζικά}} < \sqrt{4} = 2.$$

Άρα, ο $p(k+1)$ είναι αληθής.

[3] Αφού και τα 2 μέλη της πιο πάνω ανίσωσης είναι θετικά και χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση διάταξης στις τετραγωνικές ρίζες από την προηγούμενη τάξη: αν $0 \leq a \leq b$, τότε $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το σύνολο αλήθειας του προτασιακού τύπου

$$p(\nu): \quad \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}_{\nu-\text{ριζικά}} < 2$$

είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. ◄