Δυναμοσειρές

Ασκήσεις

http://ioakimioannis.com

Ασκήσεις

(1) Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των πιο κάτω δυναμοσειρών

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x-8)^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$

Λύση

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^{k+1}}{k} x^k, \qquad c_k = \frac{3^{k+1}}{k} x^k \quad (k \in \mathbb{N})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει. Είναι (για x σταθεροποιημένο)

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left|\frac{\frac{3^{k+2}}{k+1} x^{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k} x^k}\right| = \frac{3k}{k+1} \cdot |x| \quad \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \underbrace{3 \cdot |x|}_{\rho}$$

και

$$\rho < 1 \iff 3 \cdot |x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{3} \iff x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

και αρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η $R = \frac{1}{3}$. Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για $x = -\frac{1}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $3\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει (από το Κριτήριο Εναλλάσσουσας Σειράς[1]) και για $x = \frac{1}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $3\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει[2]

Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k (x-(-5))^k, \qquad c_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k \quad (k \in \mathbb{N})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = -5$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει. Είναι (για x σταθεροποιημένο)

$$\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left|\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} (x+5)^{k+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^k (x+5)^k}\right| = \frac{3}{4} \cdot |x+5| \quad \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{3}{4} \cdot |x+5| := \rho$$

[1]Μια σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ λέγεται εναλλάσσουσα. Το κριτήριο λέει ότι αν η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα και $\lim_n a_n = 0$, τότε η αντίστοιχη εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ συγκλίνει.

[2]Ισχύει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\rho}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\rho > 1$.

και

$$\begin{aligned}
\rho < 1 &\iff \frac{3}{4}\cdot|x+5| < 1 \iff |x+5| < \frac{4}{3} \iff -\frac{4}{3} < x+5 < \frac{4}{3}\\
&\iff -5-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}-5 \iff -\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\\
&\iff x \in \left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)
\end{aligned}$$

και αρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι η $R = \frac{4}{3}$. Ελέγχουμε τη σύγκλιση στα άκρα του πιο πάνω διαστήματος:

για $x = -\frac{19}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ η οποία αποκλίνει και για $x = -\frac{11}{3}$ η σειρά που προκύπτει είναι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}1$ η οποία επίσης αποκλίνει. Συνεπώς, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n$ Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x=-3$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Λόγου.

$$\begin{aligned}
L &:= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{4^{n+1}}(x+3)^{n+1}}{\frac{(-1)^n n}{4^n}(x+3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-(n+1)(x+3)}{4n}\right|\\
&= |x+3|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}|x+3|.
\end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία $L<1$, δηλ. $\frac{1}{4}|x+3| < 1 \Leftrightarrow |x+3| < 4$. Άρα, η ακτίνα σύγκλισης $R=4$. Για όλα τα x τέτοια ώστε $|x+3|>4$, η σειρά αποκλίνει. Τώρα, $|x+3|<4 \Leftrightarrow -4 < x+3 < -4 \Leftrightarrow -7 < x < 1$, επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-7,1)$. Ακολούθως, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία $x=-7,1$.

$$x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}4^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n,$$

η οποία αποκλίνει.

$$x = -7: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}n,$$

η οποία αποκλίνει.

Άρα, τελικά, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-7,1)$.

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}(4x-8)^n$

Έχουμε οτι συγκλίνει (πάντα) για $x=2$. Θα ελέγχουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει:

$$\begin{aligned}
L &:= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}(4x-8)^{n+1}}{\frac{2^n}{n}(4x-8)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(4x-8)n}{4n+1}\right|\\
&= 2|4x-8|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 2|4x-8|.
\end{aligned}$$

Επομένως, από το Κριτήριο Λόγου, η Σειρά συγκλίνει για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία $L<1$, δηλ. $|x-2| < \frac{1}{8}$. Επομένως, η ακτίνα σύγκλισης είναι $R=\frac{1}{8}$. Τώρα, $|x-2| <$

$\frac{1}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < x-2 < \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{15}{8} < x < \frac{17}{8}$, επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $(\frac{15}{8}, \frac{17}{8})$. Ακολούθως, θα ελέγξουμε αν η σειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος αυτού, δηλ. στα σημεία $x = \frac{15}{8}, \frac{17}{8}$.

$x = \frac{15}{8}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{15}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

$x = \frac{17}{8}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \left(\frac{17}{2} - 8\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^n}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|x| < 1$, δηλ. $x \in (-1, 1)$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $|x| > 1$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για $x = \pm 1$:

$x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

η οποία αποκλίνει.

$x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$.

(vi) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Έχουμε ότι συγκλίνει (πάντα) για $x = 0$. Θα ελέγξουμε και για ποιά άλλα x συγκλίνει: Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Ρίζας. Έχουμε

$$c_n := \frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{x^{2n}}{n^2}} = \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{x^2}{\sqrt[n]{n^2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^2.$$

Επομένως, από το Κριτήριο Ρίζας, η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^2 < 1$, δηλ. $x \in (-1, 1)$, επομένως η ακτίνα σύγκλισης $R = 1$. Για $x^2 > 1$, η δυναμοσειρά αποκλίνει. Θα δούμε τώρα αν η δυναμοσειρά συκλίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλ για $x = \pm 1$:

$x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

$x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

η οποία συγκλίνει.

Επομένως, το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1]$.

2 Υπολογίστε τα πιο κάτω:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$

Λύση

(i) Θυμόμαστε ότι

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{και (άρα)} \quad \log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\log(1+x) - \log(1-x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots\right) + \\
&\quad + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right) \\
&= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) \\
\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= \frac{1}{2}[\log(1+x) - \log(1-x)].
\end{aligned}$$

Για $x = \frac{1}{2}$ ο πιο πάνω τύπος μας δίνει

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} &= \frac{1}{2}\left[\log\left(1+\frac{1}{2}\right) - \log\left(1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{3}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3/2}{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log 3 = \log\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

(ii) Θυμόμαστε ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{και (άρα)} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Έτσι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Σημείωση: $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$.
Για $x = 1$, ο πιο πάνω τύπος δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}.$$