Προτεινόμενη λύση Άσκησης 10 (διορίσιμοι 2017)
Λίγα σχόλια πρίν τη λύση
Η άσκηση αυτή αντανακλά ορισμένα πολύ βασικά στοιχεία που μαθαίνει κανείς (π.χ. ένας πρωτοετής φοιτητής σε μάθημα Απειροστικού Λογισμού ΙΙ) στις **κυρτές** συναρτήσεις:

Θεώρημα 0.0.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$* ***παραγωγίσιμη*** *συνάρτηση. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι κυρτή συνάρτηση.*

(ii) *Η f' είναι αύξουσα συνάρτηση.*

(iii) *Για κάθε $x, y \in (a,b)$,*
$$f(y) \geq f(x) + f'(x) \cdot (y-x).$$

Πόρισμα 0.0.1. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και κυρτή συνάρτηση. Τότε, η f λαμβάνει ολικό ελάχιστο σε ενα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν $f'(x_0) = 0$.*

Συνεπώς, για έναν γνώστη της Θεωρίας των κυρτών συναρτήσεων, η άσκηση λέει κάτι πολύ βασικό: για μια κυρτή και παραγωγίσιμη συνάρτηση, το γράφημά της βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ το οποίο (αφού εδω είναι $f(a) = f(b)$) είναι παράλληλο με τον άξονα των τετμημένων (άρα η συνάρτηση θα λάβει ενα και μόνο ολικό ελάχιστο). Το τμήμα αυτό αγγίζει το γράφημα της συνάρτησης **μόνον** στα δύο αυτά σημεία.

Παρακάτω δίνονται 3 λύσεις που αντανακλούν με ουσιαστικό τρόπο τα πιο πάνω

1ος τρόπος: Αν $x = a, b$ τότε ισχύει προφανώς η ισότητα.
Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Από το ΘΜΤΔΛ στο $[a, x_0]$, υπάρχει $\xi_1 \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0.$$
Ομοίως, υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, b)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{f(a) - f(x_0)}{b - x_0} < 0.$$
Συνεπώς, $f'(\xi_2) < 0 < f'(\xi_1)$. Αλλά
$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f' \text{ γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2),$$
άτοπο. $\square$

2ος τρόπος: Αν $x = a, b$ τότε ισχύει προφανώς η ισότητα.
Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, η f είναι κυρτή. Έστω $x \in (a,b)$. Τότε, αφού $(a,b) = \{tb + (1-t)x \mid t \in (0,1)\}$, υπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $x = tb + (1-t)x$. Συγκεκριμένα
$$x = \frac{x-a}{b-a} b + \frac{b-x}{b-a} a.$$
Τότε, από τον ορισμό της κυρτότητας,
$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \\ &= f(a), \end{aligned}$$

αφού $f(a) = f(b)$. $\square$

3ος τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(a)$.
(η h μετρά 'κατά πόσον απέχουν' οι τιμές της f από την τιμή $f(a) = f(b)$).
Είναι $h' = f' \Rightarrow$ h γνησίως αύξουσα και $h(a) = 0 = h(b)$. Από το Θεώρημα του Rolle για την f στο διάστημα $[a, b]$, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$ το οποίο είναι και το μοναδικό με αυτή την ιδιότητα, αφού h γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, $h'(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, \xi]$ **με την ισότητα μόνο για** $x = \xi$ και $h'(x) \geq 0,\ \forall x \in [\xi, b]$ **με την ισότητα μόνο για** $x = \xi$.
Συνεπώς, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[a, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi, b]$.
Άρα, $h(a) \geq h(x),\ \forall x \in [a, \xi]$ και $h(b) \geq h(x),\ \forall x \in [\xi, b]$ **με την ισότητα και στις δύο μόνο για** $x = \xi$.
Άρα,

$$f(a) \geq f(x),\ \forall x \in [a, b],$$

με την ισότητα μόνο για $x = a, b$.

Αυτό λοιπόν που λέει η λύση αυτή είναι το ότι σε κάποιο σημείο (και μόνον σε αυτό) στο γράφημα της f, η κλίση της εφαπτομένης είναι ίση με μηδέν, δηλαδή η εφαπτόμενη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με την ευθεία $y = f(a)$ (δηλαδή την $y = f(b)$), δηλαδή η απόσταση του σημείου $f(a)$ με το σημείο αυτό είναι η μέγιστη. $\square$