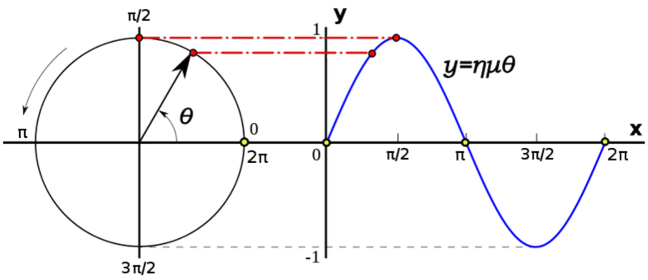
Θερινή προετοιμασία
για τα
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

-Γ ΛΥΚΕΙΟΥ-

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ



Επιμέλεια : Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός
Αρχείο : https://ioakimioannis.com/timeline/

0.8 Τριγωνομετρία

Παρόλο που οι πλείστες τριγωνομετρικές ταυτότητες βρίσκονται στο τυπολόγιο, καλό είναι να τις γνωρίζετε ή τουλάχιστον να γνωρίζετε τη χρησιμότητα της κάθε μίας (π.χ. έχουμε τύπο που 'σπάμε' το ημίτονο του αθροίσματος δύο γωνιών). Άλλωστε, αυτός που έχει κατανοήσει τους μηχανισμούς των ταυτοτήτων τις ξέρει απ' ξω!

Βασικές/κύριες τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\text{ημ}^2\theta + \text{συν}^2\theta = 1, \qquad 1 + \text{εφ}^2\theta = \text{τεμ}^2\theta, \qquad 1 + \text{σφ}^2\theta = \text{στεμ}^2\theta$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών

$$\text{ημ}(\theta \pm \phi) = \text{ημ}\theta\text{συν}\phi \pm \text{ημ}\phi\text{συν}\theta, \qquad \text{συν}(\theta \pm \phi) = \text{συν}\theta\text{συν}\phi \mp \text{ημ}\phi\text{ημ}\theta,$$

$$\text{εφ}(\theta \pm \phi) = \frac{\text{εφ}\theta \pm \text{εφ}\phi}{1 \mp \text{εφ}\theta\text{εφ}\phi}, \qquad \text{σφ}(\theta \pm \phi) = \frac{\text{σφ}\theta\text{σφ}\phi \mp 1}{\text{σφ}\theta \pm \text{σφ}\phi}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί του διπλασίου μιας γωνιάς

$$\text{ημ}(2\theta) = 2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta = \frac{2\text{εφ}\theta}{1 + \text{εφ}^2\theta},$$

$$\text{συν}(2\theta) = 2\text{συν}^2\theta - 1 = 1 - 2\text{ημ}^2\theta = \frac{1 - \text{εφ}^2\theta}{1 + \text{εφ}^2\theta}$$

$$\text{εφ}(2\theta) = \frac{2\text{εφ}\theta}{1 - \text{εφ}^2\theta}, \qquad \text{σφ}(2\theta) = \frac{2\text{εφ}\theta}{1 - \text{εφ}^2\theta}$$

$$\text{ημ}^2\theta = \frac{1 - \text{συν}(2\theta)}{2}, \qquad \text{συν}^2\theta = \frac{1 + \text{συν}(2\theta)}{2}$$

$$\text{εφ}^2\theta = \frac{1 - \text{συν}(2\theta)}{1 + \text{συν}(2\theta)}, \qquad \text{σφ}^2\theta = \frac{1 + \text{συν}(2\theta)}{1 - \text{συν}(2\theta)}$$

Θυμόμαστε ότι:

- Τα ημίτονα παραπληρωματικών γωνιών είναι ίσα, δηλαδή (αν θ οξεία γωνία) τότε $\text{ημ}(180° - \theta) = \text{ημ}\theta$.
Για παράδειγμα, $\text{ημ}(120°) = \text{ημ}(180° - 60°) = \text{ημ}(60°) = \frac{\pi}{3}$.
- Τα συνημίτονα παραπληρωματικών γωνιών είναι ίσα σε μέτρο και αντίθετα σε πρόσημο, δηλαδή (αν θ οξεία γωνία) τότε $\text{συν}(180° - \theta) = -\text{συν}\theta$.
Για παράδειγμα, $\text{συν}(120°) = \text{συν}(180° - 60°) = -\text{συν}(60°) = -\frac{1}{2}$.
- Αντίθετες γωνίες έχουν ίσα συνημίτονα (δηλαδή $\text{συν}(-\theta) = \text{συν}\theta$) και ημίτονα ίσα σε μέτρο αλλά αντίθετα $\text{ημ}(-\theta) = -\text{ημ}\theta$).
Για παράδειγμα, $\text{ημ}(-120°) = -\text{ημ}120° = -\frac{\pi}{3}$ και $\text{συν}(-30°) = \text{συν}30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Πίνακας 3: Βασικοί τριγωνομετρικοί αριθμοί

Γωνία (θ) Μοίρες	Γωνία (θ) Ακτίνια	ημθ	συνθ	εφθ
$0°$	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$-$

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

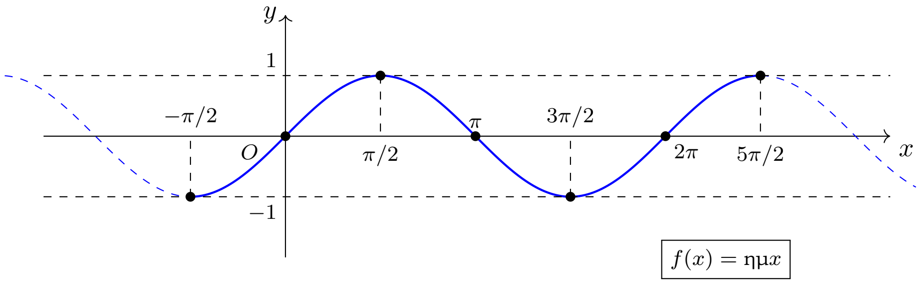
Καλό είναι να μάθετε τις μορφές των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ημιτόνου, συνημιτόνου, εφαπτομένης και συνεφαπτομένης), αφού εκτός από τα Μαθηματικά, θα τις συναντήσετε και στο μάθημα της Φυσικής (π.χ. στις ταλαντώσεις).
Υπενθύμιση:

Ορισμός 0.8.1. Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει μη μηδενική (πραγματική) σταθερά T τέτοια ώστε $f(x) = f(x+T)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Αν υπάρχει τέτοια σταθερά T, τότε αυτή θα καλείται **η περίοδος της συνάρτησης**.

Η συνάρτηση $f(x) =$ ημx
Η συνάρτηση $f(x) =$ ημx είναι $2\pi-$περιοδική.
Ξέρουμε ότι η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται στα ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή στα σημεία

$$\ldots,\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots\ .$$

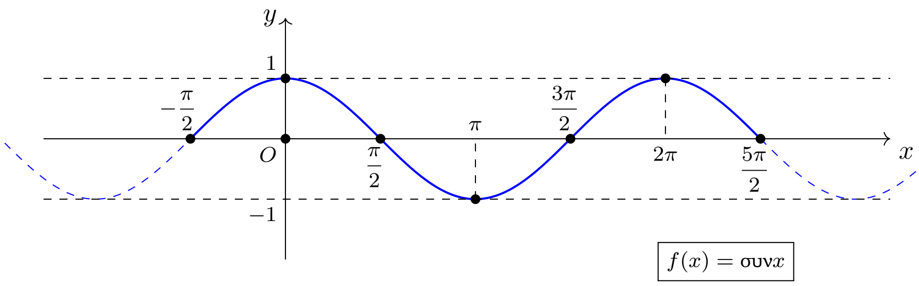
Επίσης, γνωρίζουμε ότι για $\theta \in (0, \pi)$ είναι ημ$\theta > 0$ και λόγω της $2\pi-$περιοδικότητάς της, έχουμε ότι στα διαστήματα της μορφής $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, όπου k ακέραιος αριθμός, το ημίτονο είναι γνήσια θετικό ενώ στα διαστήματα της μορφής $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$, όπου k ακέραιος αριθμός, το ημίτονο είναι γνήσια αρνητικό.
Για παράδειγμα (δηλαδή όταν $k = 1$) έχουμε ότι ημ$\theta < 0$ για $\theta \in (\pi, 2\pi)$ και για $\theta \in (2\pi, 3\pi)$ ότι ημ$\theta > 0$.
Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, 1]$.



Η συνάρτηση $f(x) =$ **συν**x
Η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}x$ είναι $2\pi-$περιοδική.
Ξέρουμε ότι η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται στα ακέραια πολλαπλάσια του $\dfrac{\pi}{2}$, πλήν του μηδενός, δηλαδή στα σημεία

$$\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots .$$

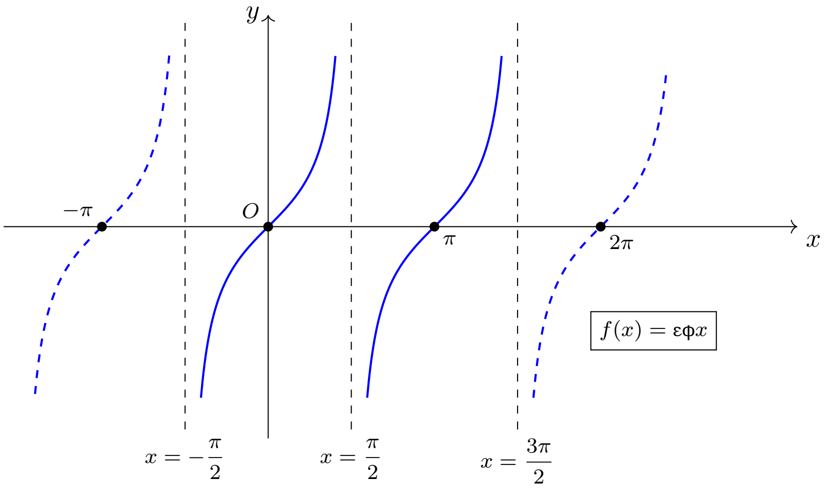
Επίσης, γνωρίζουμε ότι για $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ είναι συν$\theta > 0$ και λόγω της $2\pi-$περιοδικότητάς της, έχουμε ότι στα διαστήματα της μορφής $(2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$, όπου k ακέραιος αριθμός, το συνημίτονο είναι γνήσια θετικό ενώ στα διαστήματα της μορφής $(2k\pi + \pi/2, 2k\pi + 3\pi/2)$, όπου k ακέραιος αριθμός, το συνημίτονο είναι γνήσια αρνητικό.
Για παράδειγμα (δηλαδή όταν $k = 1$) έχουμε ότι συν$\theta < 0$ για $\theta \in (5\pi/2, 7\pi/2)$ και για $\theta \in (3\pi/2, 5\pi/2)$ ότι συν$\theta > 0$.
Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[-1, 1]$.



Η συνάρτηση $f(x) =$ **εφ**x
Η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$ είναι $\pi-$περιοδική.
Γνωρίζουμε ότι στα ακέραια πολλαπλάσια του $\dfrac{\pi}{2}$, η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται και αρα, λόγω της $\pi-$περιοδικότητάς της έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εκτός το σύνολο $\left\{k\dfrac{\pi}{2} : k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right\}$.
Στα ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή στα σημεία

$$\ldots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$$

η εφαπτομένη είναι ίση με 0.
Για $\theta \in (0, \pi/2)$ είναι εφ$\theta > 0$ και λόγω της $\pi-$περιοδικότητάς της, έχουμε ότι στα διαστήματα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi/2)$, όπου k ακέραιος αριθμός, η εφαπτομένη είναι γνήσια θετική ενώ στα διαστήματα της μορφής $(k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$, όπου k ακέραιος αριθμός, εφαπτομένη είναι γνήσια αρνητική.
Για παράδειγμα (δηλαδή όταν $k = 1$) έχουμε ότι εφ$\theta < 0$ για $\theta \in (3\pi/2, 2\pi)$ και για $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$ ότι εφ$\theta > 0$.
Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

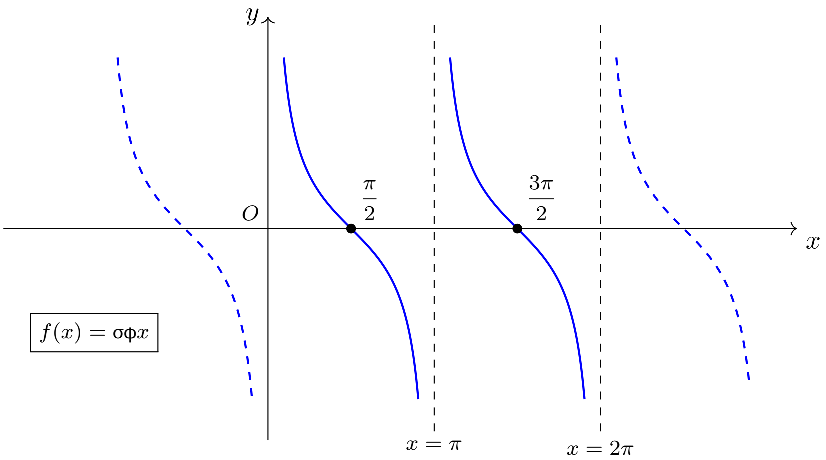


Η συνάρτηση $f(x) = $ **σφ**x
Η συνάρτηση $f(x) = \text{σφ}x$ είναι $\pi-$περιοδική.
Γνωρίζουμε ότι στα ακέραια πολλαπλάσια του π, η συνάρτηση αυτή δεν ορίζεται και αρα, λόγω της $\pi-$περιοδικότητάς της έχουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εκτός το σύνολο $\{k\pi : k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Στα ακέραια πολλαπλάσια του $\dfrac{\pi}{2}$, πλήν του μηδενός, δηλαδή στα σημεία

$$\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots .$$

η συνεφαπτομένη είναι ίση με 0 (δηλαδή εκεί όπου μηδενίζεται και το συνημίτονο).
Για $\theta \in (0, \pi/2)$ είναι σφ$\theta > 0$ και για $\theta \in (\pi/2, \pi)$ είναι σφ$\theta < 0$ και συνεπώς, λόγω της $\pi-$περιοδικότητάς της, έχουμε ότι στα διαστήματα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi/2)$, όπου k ακέραιος αριθμός, η συνεφαπτομένη είναι γνήσια θετική ενώ στα διαστήματα της μορφής $(k\pi + \pi/2, k\pi + \pi)$, όπου k ακέραιος αριθμός, συνεφαπτομένη είναι γνήσια αρνητική.
Για παράδειγμα (δηλαδή όταν $k = 1$) έχουμε για $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$ σφ$\theta > 0$ ότι και για σφ$\theta < 0$ ότι $\theta \in (3\pi/2, 2\pi)$.
Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.



Τριγωνομετρικές εξισώσεις και επίλυσή τους

Σε αρκετά προβλήματα στη Γ Λυκείου (είτε στο Διαφορικό Λογισμό είτε στις Κωνικές Τομές) θα συναντήσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις. Συνήθως, αυτές δεν είναι περίπλοκες, υπό την έννοια ότι ζητάνε λύσεις στο πρώτο ή/και στο δεύτερο τεταρτημόριο (προς τούτο θα δούμε μια τριγωνομετρική εξίσωση που προέκυψε από θέμα μεγιστοποίησης στις εισαγωγικές εξετάσεις του 2022/βλ. παράδειγμα 0.8.4).
Να σημειωθεί πως δεν πρέπει κανείς να βασίζεται στην υπολογιστική του μηχανή για τον υπολογισμό των λύσεων γιατί, παρόλο που η μηχανή θα δώσει αποτέλεσμα, η απουσία ουσιαστικής κατανόησης των μεθόδων επίλυσης τριγωνομετρικών εξισώσεων οδηγεί αναπόφευκτα στην αδυναμία κατανόησης του προβλήματος το οποίο έχουμε να λύσουμε.
Συνεπώς, **πρέπει** να μάθουμε να λύνουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Υπενθύμιση:

Ορισμός 0.8.2. Καλούμε τριγωνομετρική εξίσωση μια σχέση της μορφής

$$R(\text{ημ}x, \text{συν}x, \text{εφ}x, \text{σφ}x, \text{τεμ}x, \text{στεμ}x) = 0$$

όπου R συνάρτηση.

Έχουμε ήδη δεί κάποιες τριγωνομετρικές εξισώσεις στην προηγούμενη παράγραφο:
$\text{ημ}x = 0$, $\text{συν}x = 0$, $\text{εφ}x = 0$ και $\text{σφ}x = 0$, οι λύσεις των οποίων αναφέρονται πρίν ακόμα αναφέρουμε τις τριγωνομετρικών εξισώσεων (τις έχετε δει στην Α τάξη του Λυκείου).

▶ **Παράδειγμα 0.8.1.** Η εξίσωση

$$\text{ημ}^2 x + \text{συν}^3 x + 2\text{ημ}x + 1 = 0$$

είναι μια τριγωνομετρική εξίσωση.

Για τις τριγωνομετρικές εξισώσεις της μορφής $\text{ημ}\theta = c$, $\text{συν}\theta = c$, όπου c πραγματική σταθερά στο διάστημα $[-1, 1]$ και $\text{εφ}\theta = c$, $\text{σφ}\theta = c$, όπου c πραγματική σταθερά, γράφουμε τη σταθερά c ως ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη αντίστοιχα κάποιας γωνίας ϕ και χρησιμοποιούμε τους τύπους:

$$\text{ημ}\theta = \text{ημ}\phi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \phi \\ \theta = 2k\pi + \pi - \phi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{συν}\theta = \text{συν}\phi \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi + \phi \\ \theta = 2k\pi - \phi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\tan\theta = \tan\phi \Leftrightarrow \theta = k\pi + \phi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cot\theta = \cot\phi \Leftrightarrow \theta = k\pi + \phi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

▶ **Παράδειγμα 0.8.2.** Να επιλυθούν οι πιο κάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

(i) $\text{ημ}x = \dfrac{1}{2}$,

(ii) $\text{ημ}(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση.

(i) $\eta\mu x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \\ x = 2k\pi + \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Π.χ. για $k = -1$ παίρνουμε $x = -\dfrac{11\pi}{6}$ και $x = -\dfrac{7\pi}{6}$, για $k = 0$ παίρνουμε $x = \dfrac{\pi}{6}$ και $x = \dfrac{5\pi}{6}$ και για $k = 1$ παίρνουμε $x = \dfrac{13\pi}{6}$ και $x = \dfrac{17\pi}{6}$.

(ii) $\eta\mu(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu(2x) = \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \\ 2x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ \\ x = k\pi + \dfrac{\pi}{3} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Π.χ. για $k = -1$ παίρνουμε $x = -\dfrac{5\pi}{6}$ και $x = -\dfrac{2\pi}{3}$, για $k = 0$ παίρνουμε $x = \dfrac{\pi}{6}$ και $x = \dfrac{\pi}{3}$ και για $k = 1$ παίρνουμε $x = \dfrac{7\pi}{6}$ και $x = \dfrac{4\pi}{3}$. □

▶ **Παράδειγμα 0.8.3.** Να επιλυθεί η πιο κάτω τριγωνομετρική εξίσωση στο διάστημα $(-\pi, \pi]$:

$$2\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -1.$$

Απάντηση. $2\sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{13\pi}{24} \\ \\ x = 2k\pi + \dfrac{19\pi}{24} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k = 0$ παίρνουμε $x = \dfrac{13\pi}{24}$ και $x = \dfrac{19\pi}{24}$ οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, για $k = -1$ παίρνουμε $x = -\dfrac{35\pi}{24} \notin (-\pi, \pi]$ και $x = \dfrac{19\pi}{24} \in (-\pi, \pi]$, για $k = 1$ παίρνουμε $x = \dfrac{61\pi}{24} \notin (-\pi, \pi]$ και $x = \dfrac{77\pi}{24} \notin (-\pi, \pi]$ και σταματάμε εδώ γιατί, όπως καταλαβαίνουμε, για τις υπόλοιπες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ θα πάρουμε λύσεις εκτός του διαστήματος $(-\pi, \pi]$. □

▶ **Παράδειγμα 0.8.4.** Να επιλυθεί η εξίσωση

$$συν^2θ - ημθ - ημ^2θ = 0$$

στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Απάντηση.

$$\begin{aligned} & συν^2θ - ημθ - ημ^2θ = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 - ημ^2θ - ημθ - ημ^2θ = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2ημ^2θ + ημθ + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -(ημ^2θ - ημθ - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2ημθ - 1) \cdot (ημθ + 1) = 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(2ημθ - 1) \cdot (ημθ + 1) = \Leftrightarrow 2ημθ - 1 = 0 \quad ή \quad ημθ + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ημθ = \frac{1}{2} \quad ή \quad ημθ = -1.$$

Αλλά, η γωνία $θ$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και άρα $0 < ημθ < 1$ και η οξεία γωνία που ικανοποιεί την $ημθ = \frac{1}{2}$ είναι η $\boxed{θ = \frac{\pi}{6}}$. Η εξίσωση $ημθ = -1$ δεν έχει λύσεις στο αναφερόμενο διάστημα. □