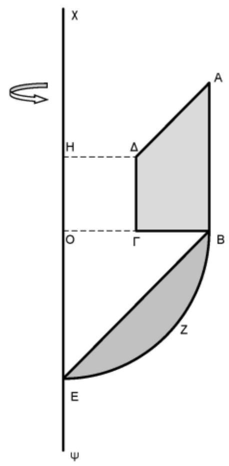

Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο, $ΑΒ \parallel ΓΔ \parallel χψ$ (με γωνία $(\hat{A} = 45°)$. Ο κυκλικός τομέας $ΟΒΖΕ$ είναι τεταρτοκύκλιο με κέντρο $Ο$ και ακτίνα $ΟΒ = 8cm$. Το $Γ$ είναι μέσο του $ΟΒ$ και το $ΟΓΔΗ$ είναι τετράγωνο.

Να υπολογίσετε τον όγκο V και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $\boldsymbol{E_{ολ.}}$ του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $χψ$.

Απάντηση

Το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΔ$ αποτελεί γενέτειρα **κόλουρου κώνου** $(\boldsymbol{K_1})$
Το ευθύγραμμο τμήμα $ΔΓ$ αποτελεί γενέτειρα **κυλίνδρου** $(\boldsymbol{K_2})$
Το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ$ αποτελεί γενέτειρα **κυλίνδρου** $(\boldsymbol{K_3})$
Το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΕ$ αποτελεί γενέτειρα **κώνου** $(\boldsymbol{K_4})$
Το ευθύγραμμο τμήμα $ΟΒ$ δημιουργεί **δακτύλιο** $(\boldsymbol{Δ})$
Το τόξο $ΒΖΕ$ δημιουργεί **ημισφαίριο**

$\boxed{\boldsymbol{ΟΓ = ΓΒ = \frac{ΟΒ}{2} = 4\ cm}}$ και $\boxed{\boldsymbol{ΓΒ = ΔΗ}}$

Το ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΔ$ $(Α\hat{Β}Δ = 90°)$ είναι ισοσκελές (παρα τη βάση ίσες γωνίες) και αρα $\boxed{\boldsymbol{ΔΒ = ΑΒ = 4\ cm}}$ και από το Π.Θ. (ή με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών) στο τρίγωνο αυτό βρίσκουμε

$$\boxed{\boldsymbol{ΑΔ = 4\sqrt{2}\ cm}}$$

(αν θυμάστε τη θεωρία των κανονικών πολυγώνων, είναι $\boldsymbol{ΑΔ = λ_4 = R\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\ cm}$).

Κόλουρος κώνος $(\boldsymbol{K_1})$:
$υ = (ΑΒ) = 4\ cm$, $ρ = (ΔΒ) = 4\ cm$, $R = (ΟΒ) = 8\ cm$ και $λ = (ΑΔ) = 4\sqrt{2}\ cm$. Τότε,

$$\boxed{\boldsymbol{{V_{κολ.κώνου}}^{K_1} = \frac{πυ}{3}(R^2 + Rρ + ρ^2) = \frac{π4}{3}(8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2) = \frac{448}{3}π\ \ cm^3}}$$

και

$$\boxed{\boldsymbol{E^{K_1}_{κυρτής} = π(R + ρ)λ = 48\sqrt{2}π\ cm^2}}$$

Κύλινδρος $(\boldsymbol{K_3})$: Είναι $υ = (ΑΒ) = 8\ cm$ και $R = (ΟΒ) = 8\ cm$. Τότε

$$\boxed{\boldsymbol{{V_{κυλ.}}^{K_3} = πR^2υ = π8^2 \cdot 8 = 512π\ \ cm^3}} \text{ και } \boxed{\boldsymbol{E^{K_3}_{κυρτής} = 2πRυ = 128π\ cm^2}}$$

Κώνος $(\boldsymbol{K_4})$: Είναι $R = (ΖΑ) = (ΓΒ) = 8\ cm$ και $υ = (ΟΕ) = (ΟΒ) = 8\ cm$ (ακτίνες κύκλου). Επίσης, $λ = (ΒΕ) = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}\ cm$ (εύκολο). Έτσι,

$$\boxed{\boldsymbol{{V_{κώνου}}^{K_4} = \frac{πR^2υ}{3} = \frac{π \cdot 8^2 \cdot 8}{3} = \frac{512π}{3}\ \ cm^3}} \text{ και } \boxed{\boldsymbol{E^{κυρτής}_{K_4} = πRλ = 64\sqrt{2}π\ cm^2}}$$

Δακτύλιος $(\boldsymbol{Δ})$:

$$\boxed{\boldsymbol{E_{(Δ)} = π(ΟΒ)^2 - π(ΟΓ)^2 = π8^2 - π4^2 = 48π\ \ cm^2}}$$

Ημισφαίριο:

$$\boxed{V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(OB)^3 = \frac{1024}{3}\pi\ cm^3} \quad \text{και} \quad \boxed{E^{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} = \frac{1}{2}\cdot 4\pi(OB)^2 = 2\pi 8^2 = 128\,\pi\ cm^2}$$

Έτσι,

$$V_{\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon o\acute{\upsilon}} = V_{\kappa\upsilon\lambda.}{}^{K_3} - V_{\kappa\upsilon\lambda.}{}^{K_2} - V_{\kappa o\lambda.\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}{}^{K_1} + V_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} - V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}{}^{K_4} = \frac{1408\pi}{3}\ cm^3$$

και

$$E_{\sigma\tau\varepsilon\rho\varepsilon o\acute{\upsilon}} = E^{K_1}_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\varsigma} + E^{K_2}_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\varsigma} + E^{K_3}_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\varsigma} + E^{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\varsigma}_{K_4} + E_{(\Delta)} + E^{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} = 112\left(3+\sqrt{2}\right)\pi\ cm^2$$