ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ **2022**
[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - 37]

Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός
Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/

Ενδεικτικές ασκήσεις στις κωνικές τομές που περιλαμβάνουν εύρεση εμβαδού επίπεδου χωρίου και όγκου στερεού

[1] Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$. Η εφαπτομένη της παραβολής αυτής στο σημείο $P(1,2)$ τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο A. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου OPA,
(β) τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο OPA, όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy.

Απάντηση

(α) Αρχικά βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στην παραβολή στο σημείο A :
Παραγωγίζω πεπλεγμένα την εξίσωση της παραβολής:

$$y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y} \quad (y \neq 0)$$

και άρα $\lambda_{\text{εφ.}}(A) = \frac{2}{2} = 1$ και έτσι

$$(\text{εφ.}): \ y - 2 = 1 \cdot (x-1) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{εφ.}): \ y = x + 1.$$

Θέτω $x = 0$ στην πιο πάνω και βρίσκω $y = 1$. Άρα $A(0,1)$.
Για τον υπολογισμό του εμβαδού του μικτόγραμμου χωρίου ΟΡΑ μπορούμε να θεωρήσουμε είτε διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων (ευκολότερο) είτε ως προς τον άξονα των τεταγμένων:
Με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων

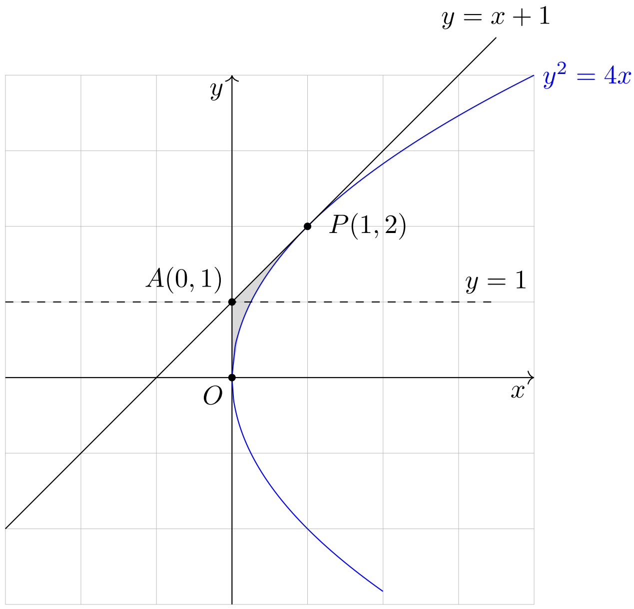
$$E = \int_0^1 [(x+1) - 2\sqrt{x}]\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{6} \ \text{τ.μ..}$$

Με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων
Είναι $y^2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{4}$ και $y = x + 1 \Leftrightarrow x = y - 1$. Τότε

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} - (y-1)\right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^2}{4}\, dy + \int_1^2 (1-y)\, dy \\ &= \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^1 + \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \ \text{τ.μ..} \end{aligned}$$

(β) Θα βρούμε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το μικτόγραμμο χωρίο ΟΡΑ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy :

$$\begin{aligned} V(OPA) = V_1 + V_2 &= \pi \int_0^1 \left[\left(\frac{y^2}{4}\right)^2\right] dy + \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 - (y-1)^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^2 \frac{y^4}{16} - \pi \int_1^2 (y-1)^2\, dy = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{32}{5} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{15} \ \text{κ.μ..} \end{aligned}$$



[2] Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από τις καμπύλες με εξίσωση $x^2+y^2=8,\ y \geq 0$ και $y = \frac{x^2}{2}$.

Απάντηση

Η καμπύλη (C_1) με εξίσωση $x^2+y^2=8,\ y \geq 0$ είναι το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και η καμπύλη (C_2) (συγκεκριμένα η καμπύλη αυτή είναι γράφημα συνάρτησης) είναι παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων. Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο αυτών καμπύλων:

$$\begin{aligned} 8 - x^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 8 - x^2 = \frac{x^4}{4} \Leftrightarrow 32 - 4x^2 = x^4 \\ &\Leftrightarrow \quad x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+8) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2. \end{aligned}$$

Έχουμε (λόγω συμμετρίας)

$$E = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\, dx - \int_0^2 x^2\, dx.$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα θεωρούμε την αντικατάσταση

$$x = 2\sqrt{2}\sin u \Leftrightarrow \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2\sqrt{2}}\right) = u \Leftrightarrow \text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{2}x}{4}\right) = u.$$

Τότε

$$dx = 2\sqrt{2}\text{συν}u\, du$$

και

$$x = 0 \Leftrightarrow u = \text{τοξημ}0 = 0, \quad x = 2 \Leftrightarrow u = \text{τοξημ}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Άρα,

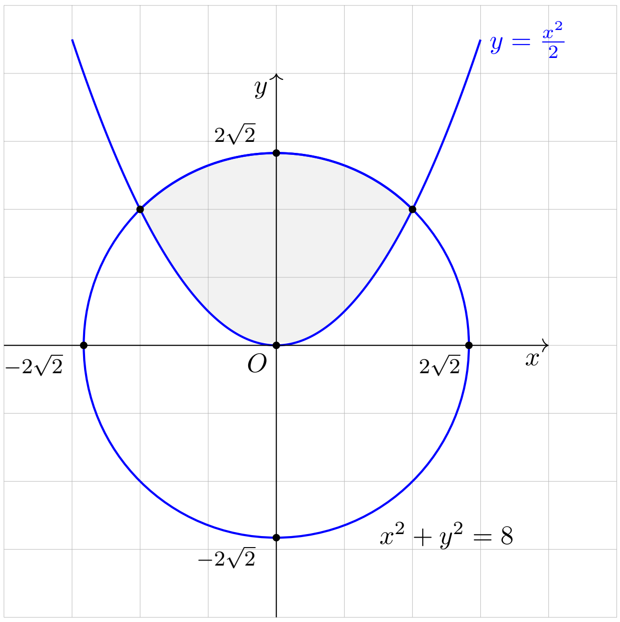
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\text{ημ}^2 u}\cdot 2\sqrt{2}\text{συν}u\,du \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{8(1-\text{ημ}^2 u)}\cdot \text{συν}u\,du \\
&= 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\text{ημ}^2 u}\cdot \text{συν}u\,du \\
&= 8\int_0^{\pi/4} |\text{συν}u|\cdot \text{συν}u\,du \\
&\quad (u\in(0,\pi/4)\Rightarrow \text{συν}u>0) \\
&= 8\int_0^{\pi/4} \text{συν}^2 u\,du \;=\; 8\int_0^{\pi/4} \frac{1+\text{συν}(2u)}{2}\,du \\
&= 4\left[u+\frac{1}{2}\cdot\text{ημ}(2u)\right]_0^{\pi/4} \;=\; 4\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi+2.
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Συνεπώς,

$$E = 2(\pi+2)-\frac{8}{3} = 2\pi+\frac{4}{3}\ \text{τ.μ.}.$$



Ενδεικτικές ασκήσεις δεύτερου μέρους στις κωνικές τομές

Άσκηση (Δες Θέμα Β3, Παγκύπριες 2007)
Δίνεται η παραβολή (Π) με εξίσωση $y^2 = 16x$ και τα σημεία της, $A(4t^2, 8t),\ \ B(4\rho^2, 8\rho),\ \ t, \rho \neq 0,\ \ t \neq \rho$.

(α΄) Αν το ΑΒ περνά από το σημείο $\Gamma(5/2, 2)$,

(i) να δείξετε ότι $2(\rho + t) = 8\rho t + 5$,

(ii) να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(β΄) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι το Γ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ,

(i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Β,

(ii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την ευθεία που περνά από τα σημεία Α και Β και την παραβολή (Π).

Απάντηση

(α΄) (i)

$$\begin{aligned}
\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - 8t}{\frac{5}{2} - 4t^2} = \frac{8\rho - 8t}{4\rho^2 - 4t^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4(1-4t)}{5 - 8t^2} = \frac{8(\rho - t)}{4(\rho^2 - t^2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(1-4t)}{5-8t^2} = \frac{\rho - t}{(\rho - t)(\rho + t)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2(1-4t)}{5-8t^2} = \frac{1}{\rho + t} \quad \Leftrightarrow \quad 2(1-4t)(\rho + t) = 5 - 8t^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\rho - 8t\rho + 2t - 8t^2 = 5 - 8t^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(\rho + t) = 5 + 8\rho t.
\end{aligned}$$

(ii) Έστω $M(x_M, y_M)$ το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
Τότε

$$\begin{aligned}
x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4t^2 + 4\rho^2}{2} = 2(t^2 + \rho^2) \\
y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8(\rho + t)}{2} = 4(\rho + t).
\end{aligned}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο αμφότερα μέλη της τελευταίας:

$$y_M^2 = 16(\rho + t)^2 = 16(\rho^2 + 2\rho t + t^2).$$

Αντικαθιστούμε στην πιο πάνω τις $\frac{y_M}{4} = \rho + t$ και την $2(\rho + t) = 5 + 8\rho t \Leftrightarrow \rho t = \frac{2(\rho+t)-5}{8} = \frac{y_M - 10}{16}$ που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα και καταλήγουμε στην

$$y_M^2 = 8x_M + 2y_M - 20 \Leftrightarrow (y_M - 1)^2 = 8x_M - 19.$$

(β΄) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι το $\Gamma(5/2, 2)$ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε

$$x_M = \frac{5}{2} \Rightarrow t^2 + \rho^2 = 5$$

και

$$y_M = 2 \Rightarrow \rho + t = \frac{1}{2}.$$

(i) Από πριν, έχουμε

$$\lambda_{AB} = \frac{2}{\rho + t} \overset{\rho+t=1/2}{=} 4$$

και άρα

$$\begin{aligned}(AB):\ y - y_\Gamma = \lambda_{AB}(x - x_\Gamma) \quad &\Leftrightarrow \quad (AB):\ y - 2 = 4(x - 5/2)\\ &\Leftrightarrow \quad (AB):\ y = 4x - 8.\end{aligned}$$

(ii) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου $A(4t^2, 8t)$ στην εξίσωση $(AB):\ y = 4x - 8:$

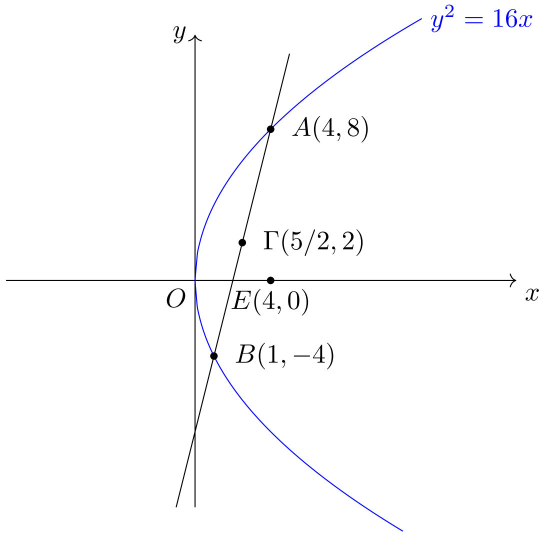
$$8t = 16t^2 - 8 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t+1)(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2},\quad t = 1.$$

Ουσιαστικά η μια τιμή της παραμέτρου t δίνει τις συντεταγμένες του ενός σημείου A και η άλλη του B. Έστω (χωρίς απώλεια της γενικότητας) ότι η $t = 1$ δίνει το A και η άλλη το B, δηλαδή

$$A(4, 8), \quad B(1, -4).$$

Τότε (με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων)

$$E = \int_{-4}^{8} \left(\frac{y+8}{4} - \frac{y^2}{16} \right) dy = \left[\frac{y^2}{8} + 2x - \frac{y^3}{48} \right]_{-4}^{8} = \ldots = 18 \ \text{τ.μ..}$$



Άσκηση (Δες Θέμα Β4, Παγκύπριες 2019/Β σειρά)
Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax,\ a > 0$ και σημεία $A(at^2, 2at),\ \ B(a\rho^2, 2a\rho),\ \ t \neq \rho,\ t, \rho \neq 0$ στην παραβολή τέτοια ώστε η χορδή AB να διέρχεται από το σταθερό σημείο $\Gamma(3a, 0)$.
Αν K είναι το σημείο τομής των καθέτων της παραβολής στα σημεία A και B,

(i) να δείξετε ότι $t\rho = -3$,

(ii) να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K.

Απάντηση

(i) Ένας τρόπος να γίνει αυτό είναι με χρήση της κλίσης ευθύγραμμου τμήματος:

$$\begin{aligned}
\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_\Gamma - y_A}{x_\Gamma - y_A} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2a\rho - 2at}{a\rho^2 - at^2} = \frac{0 - 2at}{3a - at^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2a(\rho - t)}{a(\rho^2 - t^2)} = \frac{-2at}{a(3 - t^2)} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\rho - t}{(\rho - t)(\rho + t)} = \frac{t}{t^2 - 3} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\rho + t} = \frac{t}{t^2 - 3} \\
& \Leftrightarrow \quad t^2 - 3 = t(\rho + t) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - 3 = t\rho + t^2 \\
& \Leftrightarrow \quad t\rho = -3.
\end{aligned}$$

Η πιο πάνω σχέση συνδέει τις παραμέτρους t και ρ και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο ερώτημα για να απαλείψουμε τη μία από τις δύο παραμέτρους.

(ii) Βρίσκουμε την εξίσωση της καθέτου στο σημείο A :

$$y^2 = 4ax \Rightarrow 2yy' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y} \quad (y \neq 0).$$

Αλλά $t \neq 0 \Rightarrow y_A = 2at \neq 0$ και άρα

$$\lambda_{\text{εφ.}}(A) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t} \Rightarrow \lambda_{\text{κάθ.}}(A) = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}(A)} = -t.$$

Τότε

$$(\text{κάθ. } (A)) : \; y - 2at = -t(x - at^2) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{κάθ. } (A)) : \; y + tx = 2at + at^3.$$

Λόγω συμμετρίας των συμβόλων t και ρ στην παραμετρική μορφή γραφής των σημείων A και B έχουμε

$$(\text{κάθ. } (B)) : \; y + \rho x = 2a\rho + a\rho^3.$$

Θα βρούμε τώρα το σημείο τομής K των καθέτων στα σημεία A και B :
Λύνουμε σύστημα με τις δύο εξισώσεις που βρήκαμε, π.χ. αφαιρώντας τις κατά μέλη,

$$\begin{aligned}
& tx - \rho x = 2at + at^3 - 2a\rho - a\rho^3 \\
\Leftrightarrow \quad & x(t - \rho) = 2a(t - \rho) = a(t^3 - \rho^3) \\
\Leftrightarrow \quad & x(t - \rho) = 2a(t - \rho) = a(t - \rho)(t^2 + t\rho + \rho^2) \\
\overset{t \neq \rho}{\Leftrightarrow} \quad & x = 2a + a(t^2 + \rho^2 + t\rho) \\
\overset{t\rho = -3}{\Leftrightarrow} \quad & x = 2a + a(t^2 + \rho^2 - 3).
\end{aligned}$$

Ακολούθως, αντικαθιστούμε την τιμή του x που βρήκαμε σε μια από τις εξισώσεις των καθέτων, π.χ. στο A :

$$\begin{aligned}
& y+2at+at^3+at\rho^2=3at=2aat^3 \\
\Leftrightarrow\quad & y+at\rho^2-3at=0 \\
\Leftrightarrow\quad & y+a\underbrace{(t\rho)}_{=-3}\rho-3at=0 \\
\Leftrightarrow\quad & y-3a\rho-3at=0 \\
\Leftrightarrow\quad & y=3a(t+\rho).
\end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε την έκφραση του x ως προς τις παραμέτρους t και ρ :

$$\frac{x-2a}{a}+3=t^2+\rho^2 \quad\Leftrightarrow\quad t^2+\rho^2=\frac{x+a}{a}$$

και αυτήν του y :

$$t+\rho=\frac{y}{3a}\Rightarrow(t+\rho)^2=\frac{y^2}{9a^2}\Rightarrow t^2+\rho^2+t\rho=\frac{y^2}{9a^2}\Rightarrow t^2+\rho^2-3=\frac{y^2}{9a^2}.$$

Άρα,

$$\begin{cases} t^2+\rho^2=\frac{y^2}{9a^2}+3 \\ \\ t^2+\rho^2=\frac{x+a}{a} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{y^2}{9a^2}+3=\frac{x+a}{a} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y^2=9a(x-2a)}.$$

Σημείωση: Η καμπύλη με εξίσωση $y^2=9a(x-2a)$ είναι παραβολή με κορυφή το σημείο $(2a,0)$.

Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων (τεχνικές ολοκλήρωσης) και συνέπειες του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού

Άσκηση
(Δες θέμα Α8, Παγκύπριες 2002 και Θέμα Α6, Παγκύπριες 2020/Β σειρά)
(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \text{εφ}\left(\frac{x}{2}\right)$ να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\text{συν}x} = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right).$$

(β) Να δείξετε ότι για $a, b \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a\text{ημ}x}{b+a\text{συν}x}\right) = \frac{a^2-b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} + \frac{b}{b+a\text{συν}x}.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(5+3\text{συν}x)^2} = \frac{5}{32}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{80}.$$

Απάντηση

(α) $t = \text{εφ}\left(\dfrac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} = \text{τοξεφ}t$ και άρα

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Είναι (δες τυπολόγιο) $\text{συν}x = \dfrac{1-\text{εφ}^2(x/2)}{1+\text{εφ}^2(x/2)} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Επίσης,

$$x = 0 \Rightarrow t = \text{εφ}0 = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \text{εφ}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\text{συν}x} &= 2\int_0^1 \frac{1}{5+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= 2\int_0^1 \frac{dt}{5(1+t^2)+3(1+t^2)\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dt}{5(1+t^2)+3(1+t^2)} \\
&= 2\int_0^1 \frac{dt}{2t^2+8} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+4}.
\end{aligned}$$

Είναι $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}$ και χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \frac{t}{2}, \quad 2du = dt, \quad t = 0 \Rightarrow u = 0, \quad t = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ το πιο πάνω γίνεται

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{1+u^2} = \left[\frac{1}{2}\text{τοξεφ}u\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) - \text{τοξεφ}0\right] = \frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right).$$

(β) Για $a, b \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{a\text{ημ}x}{b+a\text{συν}x}\right) &= \frac{(a\text{ημ}x)' \cdot (b+a\text{συν}x) - a\text{ημ}x \cdot (b+a\text{συν}x)'}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{a\text{συν}x \cdot (b+a\text{συν}x) - a\text{ημ}x \cdot (-a\text{ημ}x)}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{ab\text{συν}x + a^2\text{συν}x + a^2\text{ημ}^2 x}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{ab\text{συν}x + a^2\text{συν}x + a^2(1-\text{συν}^2 x)}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{ab\text{συν}x + a^2}{(b+a\text{συν}x)^2} = \frac{ab\text{συν}x + a^2 + b^2 - b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{a^2-b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} + \frac{ab\text{συν}x + b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{a^2-b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} + \frac{b(a\text{συν}x + b)}{(b+a\text{συν}x)^2} \\
&= \frac{a^2-b^2}{(b+a\text{συν}x)^2} + \frac{b}{b+a\text{συν}x}.
\end{aligned}$$

(γ) Για $a = 3$ και $b = 5$ το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος δίνει

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\text{ημ}x}{5+3\text{συν}x}\right) = \frac{-16}{(5+3\text{συν}x)^2} + \frac{5}{5+3\text{συν}x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(5+3\text{συν}x)^2} = -\frac{1}{16}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{3\text{ημ}x}{5+3\text{συν}x}\right) - \frac{5}{5+3\text{συν}x}\right].$$

Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη της πιο πάνω από $x = 0$ ως $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(5+3\text{συν}x)^2} &= -\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{3\text{ημ}x}{5+3\text{συν}x}\right) - dx + \frac{5}{16}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\text{συν}x}}_{=\frac{1}{2}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{16}\left[\frac{3\text{ημ}x}{5+3\text{συν}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{32}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{16}\left[\frac{3\text{ημ}(\pi/2)}{5+3\text{συν}(\pi/2)} - \frac{3\text{ημ}0}{5+3\text{συν}0}\right] + \frac{5}{32}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\overset{\substack{\text{ημ}(\pi/2)=1 \\ \text{ημ}0=0 \\ \text{συν}0=1}}{=} -\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{32}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{5}{32}\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{80}.
\end{aligned}$$

■

Άσκηση
(Δες θέμα Β5, Παγκύπριες 2014/Β σειρά)
Έστω η συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - \eta\mu^2 x}}.$$

(α) Να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

(β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

(γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi/2]$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι ισχύει

$$\sqrt{2 - \eta\mu^2 x} \geq \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

Απάντηση

Καταρχάς, η συνάρτηση f είναι **καλά ορισμένη** αφού $\forall x \in [0, \pi/2], \;\; 0 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \eta\mu^2 x \leq 1 \Rightarrow 2 - \eta\mu^2 x > 0$.
Εναλλακτικά, $2 - \eta\mu^2 x = 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x > 0, \;\; \forall x \in [0, \pi/2]$.

(α) Η f είναι ορισμένη σε κλειστό (και φραγμένο) διάστημα. Από γνωστό μας Θεώρημα, έχουμε ότι λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τις οποίες θα προσδιορίσουμε, χρησιμοποιώντας εργαλεία του Διαφορικού Λογισμού.
Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((\sqrt{2 - \eta\mu^2 x})^{-1/2}\right)' &&= -\frac{1}{2}(2 - \eta\mu^2 x)'(\sqrt{2 - \eta\mu^2 x})^{-3/2} \\ &= -\frac{-2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{2(2 - \eta\mu^2 x)^{3/2}} &&= \frac{\eta\mu(2x)}{2(2 - \eta\mu^2 x)^{3/2}} \end{aligned}$$

για $x \in (0, \pi/2)$.
Όμως, για $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow \eta\mu(2x) > 0$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα (στο εσωτερικό του διαστήματος $[0, \pi/2]$) και λόγω συνέχειας, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi/2]$. Συνεπώς, η μέγιστή της τιμή λαμβάνεται για $x = \pi/2$ και η ελάχιστη για $x = 0$, δηλαδή

$$f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right), \;\; \forall x \in [0, \pi/2],$$

δηλαδή (εύκολες πράξεις)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 1, \;\; \forall x \in [0, \pi/2],$$

με τις ισότητες μόνο για $x = 0$ **ή για** $x = \pi/2$.

(β)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 1, \;\; \forall x \in [0, \pi/2] &\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}}{2}\,dx \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \leq \int_0^{\pi/2} dx \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (στο πεδίο ορισμού της, το διάστημα $[0, \pi/2]$) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (\text{συν}x \cdot f(x))' = (\text{συν}x)' \cdot f(x) + \text{συν}x \cdot f'(x) \\
&= -\text{ημ}x \cdot \frac{1}{\sqrt{2-\text{ημ}^2 x}} + \text{συν}x \cdot \frac{2\text{ημ}x\text{συν}x}{2(2-\text{ημ}^2 x)^{3/2}} \\
&= -\frac{\text{ημ}x}{(2-\text{ημ}^2 x)^{1/2}} + \frac{\text{ημ}x\text{συν}^2 x}{(2-\text{ημ}^2 x)^{3/2}} \\
&= \frac{-\text{ημ}x(2-\text{ημ}^2 x) + \text{ημ}x\text{συν}^2 x}{(2-\text{ημ}^2 x)^{3/2}} \\
&= \frac{-\text{ημ}x(1+\text{συν}^2 x) + \text{ημ}x\text{συν}^2 x}{(2-\text{ημ}^2 x)^{3/2}} \\
&= -\frac{\text{ημ}x}{(2-\text{ημ}^2 x)^{3/2}} = -\frac{\text{ημ}x}{(1+\text{συν}^2 x)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

για $x \in (0, \pi/2)$.
Όμως, για $x \in (0, \pi/2) \Rightarrow \text{ημ}x > 0 \Rightarrow -\text{ημ}x < 0$ και άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $x \in (0, \pi/2)$ και λόγω συνέχειας, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$.
Συνεπώς,

$$g(x) \leq g(0), \ \forall x \in [0, \pi/2]$$

με την ισότητα μόνο για $x = 0$.
Είναι $g(0) = \text{συν}0 \cdot f(0) = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και η πιο πάνω γίνεται

$$\frac{\text{συν}x}{\sqrt{2-\text{ημ}^2 x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall x \in [0, \pi/2],$$

δηλαδή

$$\sqrt{2-\text{ημ}^2 x} \geq \sqrt{2}\text{συν}x, \quad \forall x \in [0, \pi/2]$$

με την ισότητα μόνο για $x = 0$. ■

Άσκηση 3 (δες θέμα Α10, Παγκύπριες 2020/Α σειρά και θέμα Α10, Παγκύπριες 2019/Β σειρά)
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε $f(\pi) = 1$ και

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\text{ημ}x \, dx = 1.$$

Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Απάντηση

1ος τρόπος

$$\int_0^\pi (f(x) + f''(x))\text{ημ}x \, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\text{ημ}x \, dx + \int_0^\pi f''(x)\text{ημ}x \, dx = 1.$$

Εφαρμόζω ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx &= \int_0^{\pi} f(x)(-\sigma\upsilon\nu x)'\,dx\\ &= -[f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx\\ &= -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx\\ &\underset{\substack{f(\pi)=1\\ \sigma\upsilon\nu\pi=-1\\ \sigma\upsilon\nu 0=1}}{=} 1 + f(0) + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx.\end{aligned}$$

Εφαρμόζω ολοκλήρωση κατά παράγοντες και στο δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx &= \int_0^{\pi} (f'(x))'\cdot\eta\mu x\,dx\\ &= f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \int_0^{\pi} f'(x)\cdot(\eta\mu x)'\,dx\\ &\underset{\substack{\eta\mu\pi=0\\ \eta\mu 0=0}}{=} -\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx.\end{aligned}$$

Από τα πιο πάνω έχουμε

$$1 + f(0) + {\color{red}\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx} - {\color{red}\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx} = 1 \Rightarrow f(0) = 0.$$

<u>2ος τρόπος</u>

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\eta\mu x\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx = 1.$$

Εφαρμόζω ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx &= \int_0^{\pi} (f'(x))'\cdot\eta\mu x\,dx\\ &= f'(\pi)\eta\mu\pi - f'(0)\eta\mu 0 - \int_0^{\pi} f'(x)\cdot(\eta\mu x)'\,dx\\ &\underset{\substack{\eta\mu\pi=0\\ \eta\mu 0=0}}{=} -\int_0^{\pi} f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx.\end{aligned}$$

Εφαρμόζω ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο τελευταιο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}&= -\left([f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx\right)\\ &= -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx\\ &\underset{\substack{f(\pi)=1\\ \sigma\upsilon\nu\pi=-1\\ \sigma\upsilon\nu 0=1}}{=} f(0) + 1 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx.\end{aligned}$$

Από τα πιο πάνω έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x\,dx = 1 &\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx + f(0) + 1 - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\,dx = 1\\ &\Leftrightarrow f(0) = 0.\end{aligned}$$

■

Άσκηση 2
(Δες θέμα Α7, Παγκύπριες 2021/Β σειρά)
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx, \quad x = 3\text{ημ}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Απάντηση

Χρησιμοποιώ την αντικατάσταση που δίνεται:

$$x = 3\text{ημ}\theta, \ \ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \ \Leftrightarrow \ \text{τοξημ}\left(\frac{x}{3}\right) = \theta, \ \ x \in (-3, 3).$$

Τότε,

$$9 - x^2 = 9 - 9\text{ημ}^2\theta = 9(1 - \text{ημ}^2\theta) = 9\text{συν}^2\theta$$

και

$$dx = 3\text{συν}\theta\, d\theta.$$

Έχουμε $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta > 0 \Rightarrow \sqrt{\text{συν}^2\theta} = |\text{συν}\theta| = \text{συν}\theta$ και άρα

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{9\text{ημ}^2\theta+1}{\sqrt{9\text{συν}^2\theta}} \cdot 3\text{συν}\theta\, d\theta \ = \int \frac{9\text{ημ}^2\theta+1}{3\text{συν}\theta} \cdot 3\text{συν}\theta\, d\theta \\ &= \int (9\text{ημ}^2\theta + 1)\, d\theta \ = \ 9\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + \int d\theta \\ &= 9\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + \theta. \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int \text{ημ}^2\theta\, d\theta &= \int \frac{1-\text{συν}(2\theta)}{2}\, d\theta \ = \ \frac{1}{2}\left(\int d\theta - \int \text{συν}(2\theta)\, d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\text{ημ}(2\theta)\right) + c \ = \ \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{ημ}(2\theta) + c \end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned} 9\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + \theta &= 9\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{ημ}(2\theta)\right) + \theta + c \\ &= \frac{9}{2}\theta - \frac{9}{4}\text{ημ}(2\theta) + \theta + c \\ &= \frac{11}{2}\theta - \frac{9}{2}\text{ημ}\theta\text{συν}\theta + c \\ &= \frac{11}{2}\theta - \frac{9}{2}\text{ημ}\theta\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta} + c \\ &= \frac{11}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + c \\ &= \frac{11}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x}{2}\sqrt{\frac{9-x^2}{9}} + c \\ &= \frac{11}{2}\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + c. \end{aligned}$$

■

Άσκηση 3
(Δες θέμα Α9, Παγκύπριες 2021/Α σειρά και ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (από ΥΠΠΑΝ, 2020))
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{1+\text{ημ}x+2\text{συν}x}, \quad t=\text{εφ}\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Απάντηση

$$t=\text{εφ}\left(\frac{x}{2}\right), \quad 0<x<\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}=\text{τοξεφ}t, \quad t>0$$

και

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Χρησιμοποιούμε τους τύπους

$$\text{ημ}x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{συν}x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt &= 2\int \frac{dt}{\frac{1+t^2+2t+2-2t^2}{1+t^2}\cdot(1+t^2)} \\
&= 2\int \frac{dt}{-t^2+2t+3} = -2\int \frac{dt}{t^2-2t-3} \\
&= -2\int \frac{dt}{(t-3)(t+1)}.
\end{aligned}$$

Αναλύουμε σε άθροισμα απλών κλασμάτων την υπο ολοκλήρωση συνάρτηση:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-3)(t+1)} &= \frac{A}{t-3}+\frac{B}{t+1} \\
\Rightarrow 1 &= A(t+1)+B(t-3).
\end{aligned}$$

Για $t=-1$ παίρνουμε $1=-4B \Rightarrow B=-1/4$ και για $t=3,\ 1=4A \Rightarrow A=1/4$. Άρα,

$$\begin{aligned}
-2\int \frac{dt}{(t+1)(t-3)} &= -2\cdot\frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{t-3}-\int \frac{dt}{t+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-3} \\
&= \frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2}\ln|t-3|+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-3}\right|+c
\end{aligned}$$

και συνεπώς,

$$\int \frac{dx}{1+\text{ημ}x+2\text{συν}x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\text{εφ}(x/2)+1}{\text{εφ}(x/2)-3}\right|+c.$$

. ■

Προβλήματα αρχικών τιμών

► Υπενθυμίσεις

(βλ. σχολικό βιβλίο/Τεύχος Β, σελ. 18)

• Αν f και f δύο **συνεχείς** συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = g$, τότε

$$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx.$$

• Αν f **συνεχής** συνάρτηση, τότε

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x), \quad \forall x \in D(f).$$

• Αν f **παραγωγίσιμη** συνάρτηση, τότε

$$\int \frac{d}{dx}(f(x))\,dx = f(x) + c, \quad \forall x \in D(f),$$

όπου c (αυθαίρετη) πραγματική σταθερά.

►► **Πρόβλημα αρχικών τιμών** είναι μια διαφορική εξίσωση μαζί με μια αρχική συνθήκη η οποία καθορίζει την τιμή της προς εύρεση (άγνωστης) συνάρτησης που ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση, σε συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της.

Για **παράδειγμα**, έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} f'(x) - e^x = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ \\ f(0) = 3 \end{cases} .$$

Είναι

$$f'(x) - e^x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = e^x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ολοκληρώνουμε αμφότερα μέλη της πιο πάνω:

$$\int f'(x)\,dx = \in e^x\,dx$$

και έχουμε

$$f(x) = e^x + c,$$

όπου c (αυθαίρετη) πραγματική σταθερά.
Δηλαδή, μια ολόκληρη **οικογένεια συναρτήσεων** ικανοποιεί την εξίσωση $f'(x) - e^x = 0$. Μόνο μία όμως από αυτές ικανοποιεί και την αρχική συνήκη $f(0) = 3$:

$$\begin{cases} f(x) = e^x + c, \ x \in \mathbb{R} \\ \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \ 3 = e^0 + c \ \Rightarrow \ c = 2.$$

Άρα, η **λύση** του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 2, \ x \in \mathbb{R}.$$

Λόγω του ότι στο Λύκειο δε διδασκόμαστε (πλέον) Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων, δε θα μας ζητηθεί να επιλύσουμε κάποιο πρόβλημα αρχικών τιμών που να περιέχει κάποια εξεζετημένη (διαφορική) εξίσωση, αλλά μια απλή.
Γενικά, οι εξισώσεις που παρουσιάζονται σε εξετάσεις, είναι στοιχειώδεις για κάποιο γνώστη της Θεωρίας των Διαφορικών Εξισώσεων, αλλά τροποποιημένες κατά τέτοιον τρόπο ούτως ώστε να στηθεί ένα θέμα που να παρουσιάζει 'τεχνική δυσκολία'.

Να σημειώσουμε ότι υπάρχει ολόκληρη θεωρία που αναφέρει μεθοδολογία για αρκετές μορφές διαφορικών εξισώσεων.

Ας δούμε λόγου χάριν το **Θέμα Β4 των Παγκύπριων εξετάσεων του 2021:**
Μας δίνεται μια **δυο φορές παραγωγίσιμη** συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι (προσέξτε πως δεν λέει 'η οποία ικανοποιεί το πιο κάτω πρόβλημα αρχικών τιμών')

$$\begin{cases} g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} = 2, \\ \\ g(1) = 0, \;\; g'(1) = 1 \end{cases}.$$

Μας ζητείται να δείξουμε ότι

$$g'(x)e^{g(x)} = 2x - 1, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

και να βρεθεί η συνάρτηση[3] g που ικανοποιεί τις πιο πάνω συνθήκες.

Ο μόνος τρόπος που γνωρίζετε στο επίπεδο αυτό για να βρίσκεται μια συνάρτηση όταν σας δίνεται η παράγωγός της και μια αρχική συνθήκη είναι η ολοκλήρωση[4].
Συνεπώς, θα πρέπει με κάποιον τρόπο, να γράψετε την εξίσωση που σας δίνεται στη μορφή

$$F'(x) = A(x),$$

όπου $A(x)$ θα είναι μια συνάρτηση του x και η F να περιέχει τη συνάρτηση g ή/και την g' και να ολοκληρώσετε αμφότερα μέλη.
Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} &= (g'(x)) \cdot e^{g(x)} + g'(x) \cdot \left(e^{g(x)}\right)' \\ &= \left(g'(x) \cdot e^{g(x)}\right)'. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} g''(x)e^{g(x)} + (g'(x))^2 e^{g(x)} = 2 \;\; &\Leftrightarrow \;\; \left(g'(x) \cdot e^{g(x)}\right)' = 2 \\ &\Leftrightarrow \;\; \int \left(g'(x) \cdot e^{g(x)}\right)' \, dx = \int 2 \, dx \\ &\Leftrightarrow \;\; g'(x) \cdot e^{g(x)} = 2x + c. \end{aligned}$$

Τώρα είναι μια καλή στιγμή για να εφαρμόσουμε τις **αρχικές μας συνθήκες** $g(1) = 0$ και $g'(1) = 1$:

$$g'(1) \cdot e^{g(1)} = 2 \cdot 1 + c \Leftrightarrow 1 \cdot e^0 = 2 + c \Leftrightarrow c = 1 - 2 = -1.$$

[3] Στο θέμα αναφέρεται 'να βρεθεί συνάρτηση' και όχι 'να βρεθεί **η** συνάρτηση'. Όμως, υπάρχει σχετικό Θεώρημα που εγγυάται πως το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει λύση και είναι μάλιστα **μοναδική**.

[4] Θυμηθείτε:

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + x.$$

Συνεπώς,

$$\boxed{g'(x)\cdot e^{g(x)} = 2x-1}.$$

Ακολούθως, παρατηρούμε ότι:

$$g'(x)\cdot e^{g(x)} = \left(e^{g(x)}\right)'$$

και άρα

$$\begin{aligned} g'(x)\cdot e^{g(x)} = 2x-1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(e^{g(x)}\right)' = 2x-1 \\ &\Leftrightarrow \quad \int \left(e^{g(x)}\right)'\,dx = \int (2x-1)\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad e^{g(x)} = x^2 - x + c. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την **αρχική συνθήκη** $g(1)=0$:

$$e^{g(1)} = 1^2 - 1 + c \Leftrightarrow e^0 = c \Leftrightarrow c = 1.$$

Τότε

$$e^{g(x)} = x^2 - x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

δηλαδή

$$g(x) = \ln(x^2 - x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

■

Εντοπίζω τις αρχικές συνθήκες
Οι αρχικές συνθήκες μπορεί να είναι κωδικοποιημένες στα δεδομένα του προβλήματος.
Ας μην ξεχνάμε όμως ότι το πρόβλημα θα είναι ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.
Θα πρέπει όμως να τις εντοπίζουμε:

• Αν μας αναφέρεται ότι το σημείο (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο μιας **παραγωγίσιμης** συνάρτησης, τότε

$$f'(x_0) = 0.$$

Αυτό είναι το ίδιο με το ότι στο σημείο (x_0, y_0) της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη είναι οριζόντια.
Εννοείται βέβαια ότι και $f(x_0) = y_0$.

• Αν μας δίνεται ότι η κλίση της εφαπτομένης στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0) είναι λ, τότε $f'(x_0) = \lambda$.
Εννοείται βέβαια ότι και $f(x_0) = y_0$.

Άσκηση 1
Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία είναι $f(1) = 4$ και η οποία ικανοποιεί για κάθε $x \neq 0$ την εξίσωση

$$f'(x) = \frac{3+f(x)}{x}.$$

Απάντηση.

Για κάθε $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{3+f(x)}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad xf'(x) = 3 + f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{3+f(x)} = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{3+f(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx \ = \ \ln|x| + c_1. \end{aligned}$$

Για το $\int \frac{f'(x)}{3+f(x)}\,dx$, θεωρούμε την αντικατάσταση $u(x) = f(x)+3$. Τότε $du(x) = f'(x)\,dx$ και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c_2 = \ln|f(x)+3| + c_2.$$

Έχουμε τότε

$$\ln|f(x)+3| = \ln|x| + C.$$

Αλλά, $f(1) = 4$ και άρα η πιο πάνω δίνει

$$\ln|f(1)+3| = \ln 1 + c \quad \Leftrightarrow \quad \ln 7 = c.$$

Άρα,

$$\ln|f(x)+3| = \ln|x| + \ln 7 = \ln|7x|,$$

δηλαδή

$$f(x) + 3 = 7x,$$

δηλαδή

$$f(x) = 7x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

Άσκηση 2
Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) = \sqrt{2}$ και

$$f'(x) = \frac{x^3+x}{f(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Απάντηση.

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{x^3+x}{f(x)} \quad &\Leftrightarrow \quad f'(x)\cdot f(x) = x^3 + x \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\cdot f(x)\right)' = x^3 + x \\
&\Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{2}\cdot f^2(x)\right)' dx = \int (x^3+x)\,dx \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot f^2(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c \\
&\Leftrightarrow \quad 2f^2(x) = x^4 + 2x^2 + 4c.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε την **αρχική συνθήκη** $f(1) = \sqrt{2}$ και παίρνουμε $4c = 1$.
Συνεπώς,

$$f^2(x) = \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 1) = \frac{1}{2}(x^2+1)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και αφού $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(x^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

■