ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021 - **Β΄ ΣΕΙΡΑ**

[ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - 37]

4 Ιουνίου 2021

-ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ-[1]

[1]Επιμέλεια: Γιάννης Ιωακείμ/Διορίσιμος εκπαιδευτικός | Αρχείο: https://ioakimioannis.com/pagypries/
Σημείωση: Οι προσθήκες με κόκκινο στις εκφωνήσεις των ασκήσεων είναι δικές μου.

*¨Διὰ παντὸς τοῦ βίου τὰ ἑαυτοῦ δαπανῶν, τὰ μέγιστα
πάντας τοὺς βουλομένους ὠφέλει: βελτίους γὰρ
ποιῶν τοὺς συγγιγνομένους ἀπέπεμπεν.¨*

¨(Ο Σωκράτης) ξόδεψε καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του τους θησαυρούς της δικής του σοφίας στο να ωφελέσει στο μέγιστο βαθμό όλους τους επιθυμούντες, διότι αφού έκανε καλύτερους εκείνους οι οποίοι τον συναναστρέφονταν, τους έδιωχνε.¨

Το πιο πάνω απόσπασμα από τα *Απομνημονεύματα* του Ξενοφώντος, βρίσκεται στη δεύτερη σελίδα του βιβλίου *Απομνημονεύματα του Dr B. Bolzano* (Lebensbefchreibung des Dr. B. Bolzano)

Μέρος Α

Α1.
Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int\left(4x^3-\text{ημ}x+\frac{1}{x}-e\right)\,dx.$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\int\left(4x^3-\text{ημ}x+\frac{1}{x}-e\right)\,dx &= \int 4x^3\,dx+\int(-\text{ημ}x)\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx-e\int dx\\ &= \int(x^4)'\,dx+\int(\text{συν}x)'\,dx+\int\frac{1}{x}\,dx-e\int x'\,dx\\ &= x^4+\text{συν}x+\ln|x|-ex+c. \qquad\blacksquare\end{aligned}$$

Α2.
Να υπολογίσετε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\text{ημ}x}.$

Απάντηση

Αφού $\displaystyle\lim_{x\to0}(\ln(1+x)-x)=\ln(1+0)-0=\ln1=0$ και $\displaystyle\lim_{x\to0}\text{ημ}x=\text{ημ}0=0$ λόγω συνέχειας των εμπλεκόμενων συναρτήσεων, έχουμε ότι το όριο $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\text{ημ}x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $0/0$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(\text{ημ}x)'} &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\text{συν}x} = \lim_{x\to0}\frac{-x}{(1+x)\text{συν}x} = \frac{0}{(1+0)\text{συν}0}\\ &= \frac{0}{1} = 0\in\overline{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από κανόνα του L' Hopital,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{\text{ημ}x} = \lim_{x\to0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(\text{ημ}x)'} = 0.$$

$\blacksquare$

Α3.
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+7,\ \ x\in[1,3]$. Να εξετάσετε κατά πόσο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle (για την f). Αν ικανοποιούνται, να βρείτε την τιμή του $\xi\in(1,3)$, για την οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

Απάντηση

Σημείωση. Θα ήταν καλύτερο, στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης, να αναφερόταν 'Στην περίπτωση που ικανοποιούνται, να βρεθεί το $\xi\in(1,3)$ το οποίο ικανοποιεί το συμπέρασμά του'.

Η f είναι **συνεχής** στο διάστημα $[1,3]$ και **παραγωγίσιμη** στο εσωτερικό του, δηλαδή στο διάστημα $(1,3)$ (ως πολυωνυμική είναι παντού παραγωγίσιμη, άρα και παντού συνεχής). Επίσης, $f(1)=1^2-4\cdot1+7=4$

και $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 7 = 4$, άρα $f(1) = f(3)$.
Ικανοποιούνται λοιπόν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την f, συνεπώς

$$\exists\, \xi \in (1,3) \;:\; f'(\xi) = 0.$$

Είναι $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2),\ \forall x \in [1,3]$ και άρα

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in (1,3).$$

΄Αρα έχουμε μόνο ένα ξ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος του Rolle για την f, το $\xi = 2$. ■

A4.
Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \text{ημ}\left(\text{τοξσυν}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{τοξσυν}\left(\frac{12}{13}\right)\right).$$

Απάντηση

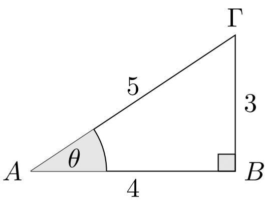
Θέτουμε $\theta = \text{τοξσυν}\left(\frac{4}{5}\right)$ και $\phi = \text{τοξσυν}\left(\frac{12}{13}\right)$. Τότε,

$$A = \text{ημ}(\theta + \phi) = \text{ημ}\theta\text{συν}\phi + \text{συν}\theta\text{ημ}\phi.$$

Από τον ορισμό της $y = \text{τοξσυν}x$ έχουμε $\boxed{\text{συν}\theta = \frac{4}{5}}$.
Αφού $x = \frac{4}{5} > 0$, τότε $\theta \in (0, \pi/2) \Rightarrow \text{ημ}\theta > 0$. Τότε

$$\text{συν}\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \text{συν}^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow 1 - \text{ημ}^2\theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \text{ημ}\theta = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Εναλλακτικά, θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με μιά από τις οξείες του γωνίες τη θ και τότε αφού συνθ =(προσκείμενη) / (υποτείνουσα), το Πυθαγόρειο Θεώρημα δίνει ότι η απέναντι πλευρά της θ έχει μήκος 3 μονάδες. Συνεπώς, ημ$\theta = \frac{3}{5}$.



Επίσης, $\boxed{\text{συν}\phi = \frac{12}{13}}$. Αφού $x = \frac{12}{13} > 0$, τότε $\theta \in (0, \pi/2) \Rightarrow \text{ημ}\theta > 0$. Τότε

$$\text{συν}\theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \text{συν}^2\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow 1 - \text{ημ}^2\theta = \frac{144}{169} \Rightarrow \text{ημ}\theta = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

΄Αρα,

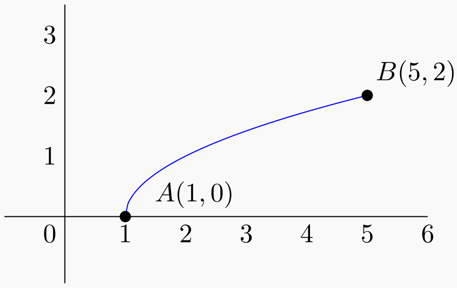
$$A = \text{ημ}\theta\text{συν}\phi + \text{συν}\theta\text{ημ}\phi = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}.$$

Εναλλακτικά (εκτός σχολικής ύλης) χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\text{τοξσυν}x + \text{τοξσυν}y = \text{τοξσυν}(xy - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - y^2}).$$

■

Α5.
Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(5, 2)$.



Απάντηση

Αρχικά θα βρούμε την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(5, 2)$. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια του Θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού:
η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ (ως σύνθεση συνεχών) και παραγωγίσιμη στο $(1, 5)$ (ως σύνθεση παραγωγίσιμων). Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

$$\exists\, \xi \in (1, 5) \ : \ f'(\xi) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{4} - 0}{4} = \frac{1}{2}.$$

Αλλά,

$$f'(x) = (\sqrt{x-1})' = \frac{(x-1)'}{2(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)}$$

και άρα

$$f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη εφαπτόμενη είναι στο σημείο $(2, f(2)) = (2, 1)$ και η κλίση $\lambda_{\text{εφ.}}$ της είναι ίση με $1/2$. Τότε, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - f(2) = \lambda_{\text{εφ.}}(x-2)$, δηλαδή η $y - 1 = \frac{1}{2}(x-2)$, δηλαδή η $y = \frac{x}{2}$. ■

Α6.
Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει κέντρο την αρχή των αξόνων, το μεγάλο της άξονα πάνω στον άξονα των τετμημένων, εστιακή απόσταση ίση με 4 μονάδες και η οποία διέρχεται από το σημείο $P(2, \sqrt{2})$.

Απάντηση

Αφού η έλλειψη περνά από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση της μορφής

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και αφού έχει το μεγάλο της άξονα πάνω στον άξονα των τετμημένων, είναι $a > \beta$ (και φυσικά $\beta > 0$).
Έστω $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$ οι εστίες της έλλειψης. Αφού $(EE') = 4 \Rightarrow \gamma = 2$.

Τότε $a^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 4 + \beta^2$.
Άρα,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \\ P(2, \sqrt{2}) \\ a^2 = 4 + \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{4+\beta^2} + \frac{2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \beta^4 - 2\beta^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (\beta^2 - 4)(\beta^2 + 2) = 0 \Rightarrow \beta^2 = 4.$$

Τότε $a^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 4 + 4 = 8$.
Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι η

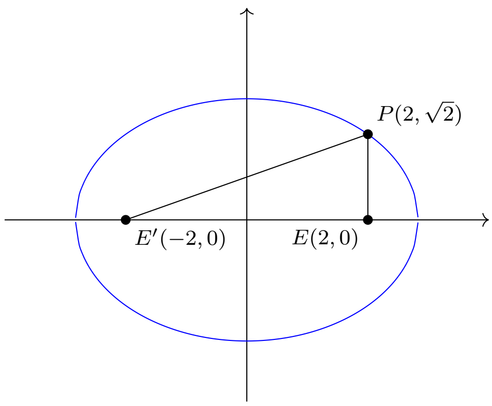
$$\boxed{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1}.$$

2ος τρόπος (χρησιμοποιώντας τον ορισμό της έλλειψης)
Όπως και πρίν βρίσκουμε ότι $a > \beta$ και $\gamma = 2$, δηλαδή οι εστίες της έλλειψης είναι οι $E(2,0)$ και $E'(-2,0)$.
Τώρα,

$$\begin{aligned} (PE') + (PE) = 2a \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x_{E'} - x_P)^2 + (y_{E'} - y_P)^2} + \sqrt{(x_E - x_P)^2 + (y_E - y_P)^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(-2-2)^2 + (0-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-2)^2 + (0-\sqrt{2})^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{18} + \sqrt{2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \quad 4\sqrt{2} = 2a \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 8. \end{aligned}$$

Τότε $a^2 = \gamma^2 + \beta^2 = 4 + 4 = 8$. Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι η

$$\boxed{\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1}.$$



■

A7.
Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad x = 2\text{ημ}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Απάντηση

Χρησιμοποιώ την αντικατάσταση που δίνεται:

$$x = 2\text{ημ}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) = \theta, \;\; x \in (-2, 2).$$

Τότε,

$$4 - x^2 = 4 - 4\text{ημ}^2\theta = 4(1-\text{ημ}^2\theta) = 4\text{συν}^2\theta$$

και

$$dx = 2\text{συν}\theta\, d\theta.$$

Τότε $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{συν}\theta > 0 \Rightarrow \sqrt{\text{συν}^2\theta} = |\text{συν}\theta| = \text{συν}\theta$ και

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int \frac{4\text{ημ}^2\theta+3}{\sqrt{4\text{συν}^2\theta}}\cdot 2\text{συν}\theta\, d\theta = \int \frac{4\text{ημ}^2\theta+3}{2\text{συν}\theta}\cdot 2\text{συν}\theta\, d\theta \\
&= \int (4\text{ημ}^2\theta + 3)\, d\theta = 4\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + 3\int d\theta \\
&= 4\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + 3\theta.
\end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned}
\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta &= \int \frac{1-\text{συν}(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\int d\theta - \int \text{συν}(2\theta)\, d\theta\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\text{ημ}(2\theta)\right) + c = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{ημ}(2\theta) + c
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned}
4\int \text{ημ}^2\theta\, d\theta + 3\theta &= 4\left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\text{ημ}(2\theta)\right) + 3\theta + c \\
&= 5\theta - \text{ημ}(2\theta) + c \\
&= 5\theta - 2\text{ημ}\theta\text{συν}\theta + c \\
&= 5\theta - 2\text{ημ}\theta\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta} + c \\
&= 5\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + c \\
&= 5\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - x\sqrt{\frac{4-x^2}{4}} + c \\
&= 5\text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c.
\end{aligned}$$

■

A8.
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$ γύρω από τον άξονα των x.

Απάντηση

Ξέρουμε ότι $e^x > \ln x,\ \forall x > 0.$ Έχουμε:

$$V = \pi \int_1^e \left[(e^x)^2 - (\ln x)^2\right] dx = \pi \int_1^e \left[e^{2x} - (\ln x)^2\right] dx.$$

Είναι

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

και (δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2\, dx &= \int x' \cdot (\ln x)^2\, dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot [(\ln x)^2]\, dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - \int x \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2\int \ln x\, dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2\int x' \cdot \ln x\, dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2\left[x \cdot \ln x - \int x \cdot (\ln x)'\, dx\right] \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2\left[x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx\right] \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2\left[x \cdot \ln x - \int dx\right] \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + c.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^e \left[\frac{1}{2}e^{2x} - x \cdot (\ln x)^2 + 2x \cdot \ln x - 2x\right] dx \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{2}e^{2e} - e \cdot (\ln e)^2 + 2e \cdot \ln e - 2e\right) - \left(\frac{1}{2}e^2 - 1 \cdot (\ln 1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 2 \cdot 1\right)\right] \\
&\overset{\substack{\ln e = 1 \\ \ln 1 = 0}}{=} \pi \left[\frac{1}{2}e^{2e} - \frac{1}{2}e^2 - e + 2\right] \quad \text{κ.μ..}
\end{aligned}$$

■

Α9.
Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{8}{x^2+4},\ x \in \mathbb{R}.$

(i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και την ύπαρξη σημείων καμπής.

(ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\forall a, \beta \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ με } a < \beta \Rightarrow a(\beta^2+4)^2 < \beta(a^2+4)^2.$$

Απάντηση

(i) Η συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{8}{x^2+4}\right)' = -\frac{8(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} \\ &= -\frac{8(2x)}{(x^2+4)^2} = -\frac{16x}{(x^2+4)^2} \\ \Rightarrow g''(x) &= -\frac{(16x)'\cdot(x^2+4)^2 - 16x\cdot[(x^2+4)^2]'}{(x^2+4)^4} \\ &= -\frac{16\cdot(x^2+4)^2 - 16x\cdot 2\cdot(2x)\cdot(x^2+4)}{(x^2+4)^4} \\ &= -\frac{16(x^2+4)(x^2+4-4x^2)}{(x^2+4)^4} \\ &= -\frac{4-3x^2}{(x^2+4)^3} = 16\frac{3x^2-4}{(x^2+4)^3}. \end{aligned}$$

Είναι

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της g'' βρίσκουμε ότι $g''(x) > 0$ στα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ και $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, άρα κυρτή στα διαστήματα αυτά και $g''(x) < 0$ στα διάστημα $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, άρα κοίλη στο διάστημα αυτό.

(ii) Έστω τυχόντα $a, \beta \in \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ με $a < \beta$.

Τότε, αφού η g είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, είναι κοίλη και στο διάστημα (a, β) και συνεπώς, η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Έτσι,

$$\begin{aligned} a < \beta \quad &\Rightarrow \quad g'(a) > g'(\beta) \Rightarrow -\frac{16a}{(a^2+4)^2} > -\frac{16\beta}{(\beta^2+4)^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{a}{(a^2+4)^2} < \frac{\beta}{(\beta^2+4)^2} \\ &\Rightarrow \quad a(\beta^2+4)^2 < \beta(a^2+4)^2. \end{aligned}$$

■

A10.
Δίνεται η (συνεχής) συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Απάντηση

Είναι

$$f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \int_0^1 xf(x)\,dx = f(x) - e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + \int_0^1 x f(x)\,dx \;=\; e^x + \int_0^1 x\left(e^x + \int_0^1 x f(x)\,dx\right)\,dx \\ &= e^x + \int_0^1 x e^x\,dx + \int_0^1 x \cdot \left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right)\,dx. \end{aligned}$$

Όμως, το $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx$ είναι πραγματικός αριθμός και άρα μπορεί να βγεί έξω από το τελευταίο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + \int_0^1 x e^x\,dx + \left(\int_0^1 x f(x)\,dx\right) \cdot \int_0^1 x\,dx \\ &= e^x + \int_0^1 x e^x\,dx + (f(x) - e^x) \cdot \int_0^1 x\,dx. \end{aligned}$$

Έχουμε:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

και (ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x\,dx &= \int_0^1 x (e^x)'\,dx \\ &= [x e^x]_0^1 - \int x' e^x\,dx \\ &= e - \int_0^1 e^x\,dx \;=\; e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e-1) \;=\; 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + 1 + (f(x) - e^x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= e^x + 1 + \frac{1}{2} \cdot f(x) - \frac{1}{2} \cdot e^x \\ \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2} \cdot f(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^x + 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot f(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^x + 1 \\ \Rightarrow &\ \boxed{f(x) = e^x + 2, \;\; x \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

■

-ΤΕΛΟΣ Α ΜΕΡΟΥΣ-

Μέρος Β

Β1.
Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{3x-6}{x^2+6x}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Απάντηση

$$f(x) = \frac{3x-6}{x^2+6x} = 3\frac{x-2}{x(x+6)}.$$

Πεδίο ορισμού
Η f είναι ρητή συνάρτηση. Άρα, $D(f) = \mathbb{R} - \{x(x+6)=0\} = \mathbb{R} - \{-6, 0\}$.

Σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και αφού $0 \notin D(f)$, το μοναδικό σημείο τομής με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(2, 0)$.

Διαστήματα μονοτονίας και τοπικά ακρότατα
Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3\left(\frac{x-2}{x^2+6x}\right)' = 3\frac{(x-2)'(x^2+6x)-(x-2)(x^2+6x)'}{(x^2+6x)^2} \\
&= 3\frac{x^2+6x-(x-2)(2x+6)}{x^2(x+6)^2} = 3\frac{x^2+6x-(2x^2+2x-12)}{x^2(x+6)^2} \\
&= 3\frac{x^2+6x-2x^2-2x+12}{x^2(x+6)^2} = 3\frac{-x^2+4x+12}{x^2(x+6)^2} \\
&= -3\frac{x^2-4x-12}{x^2(x+6)^2} = -3\frac{(x-6)(x+2)}{x^2(x+6)^2}.
\end{aligned}$$

Άρα, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2) \Leftrightarrow x = -2,\ 6$.
Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της f' έχουμε
$\forall x \in (-\infty, -6),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (-6, -2),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα,
$\forall x \in (6, 0),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (0, 6),\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα,
$\forall x \in (6, +\infty),\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα.

Συνεπώς, στο σημείο $(-2, f(-2)) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο και στο σημείο $(6, f(6)) = \left(6, \frac{1}{6}\right)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Εύρεση ασύμπτωτων
Είναι $D(f) = (-\infty, -6) \cup (-6, 0) \cup (0, +\infty)$.
Ελέγχουμε την (ασυμπτωτική) συμπεριφορά της γραφικής παράστασης της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{x^2+6x} = 3\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} = 3\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$$

και άρα **ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο** $\pm\infty$.

Τώρα,

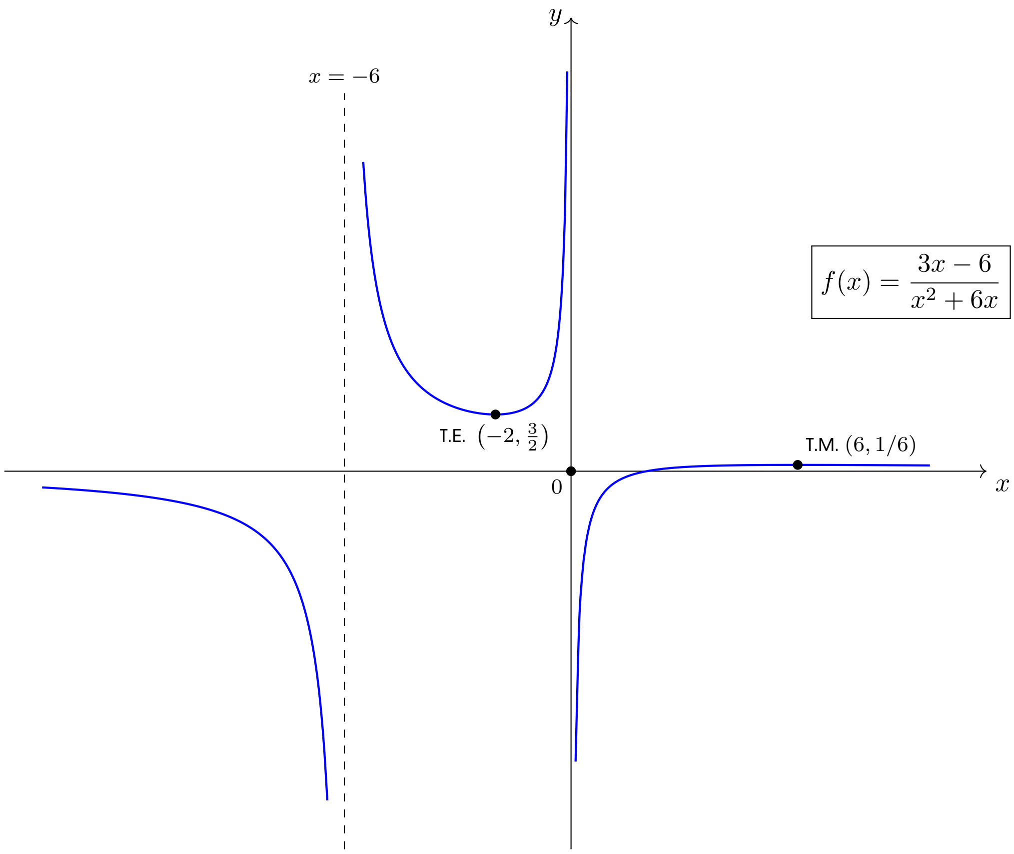
$$\lim_{x \to -6^-} f(x) \quad = \quad 3 \lim_{x \to -6^-} \frac{1}{x+6} \cdot \frac{x-2}{x}.$$

Είναι $x < -6 \Rightarrow x + 6 < - \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to -6^-} \frac{1}{x+6} = -\infty$ και επίσης $\displaystyle\lim_{x \to -6^-} \frac{x-2}{x} = \frac{-6-2}{-6} = \frac{4}{3}$. Άρα,

$$\lim_{x \to -6^-} \frac{1}{x+6} \cdot \frac{x-2}{x} = -\infty,$$

συνεπώς, **η ευθεία με εξίσωση $x = -6$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f από τα αριστερά.**
Εντελώς όμοια βρίσκουμε ότι $\displaystyle\lim_{x \to -6^+} f(x) = +\infty$ και άρα **η ευθεία με εξίσωση $x = -6$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f από τα δεξιά**, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$ και άρα **ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f από τα αριστερά** και $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ και άρα **ο άξονας των τεταγμένων είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f από τα δεξιά**.

Είμαστε έτοιμοι να αναπαραστήσουμε γραφικά την f (χωρίς να έχει γίνει μελέτη κυρτότητας και ύπαρξης σημείων καμπής, αφού δε μας ζητήθηκαν).



■

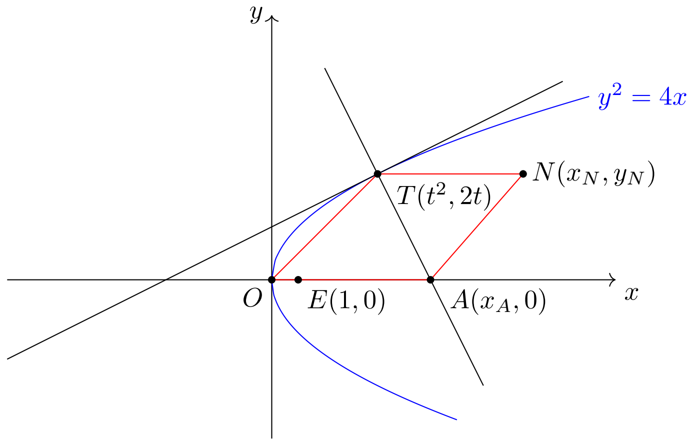
B2.
Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και σημείο της $T(t^2, 2t)$, $t \neq 0$.

(α) Αν η κάθετη της παραβολής στο σημείο T τέμνει τον άξονά της στο σημείο A, να βρείτε, σε καρτεσιανή μορφή, την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου N, έτσι ώστε το τετράπλευρο $TOAN$ να είναι παραλληλόγραμμο.

(β) Αν η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου N είναι η παραβολή (με εξίσωση) $y^2 = 2x - 4$, να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου $(4, 0)$ από αυτή.

Απάντηση

(α) Κατασκευάζω σχήμα με τα δεδομένα:



Αφού το τετράπλευρο $TOAN$ είναι παραλληλόγραμμο' έχουμε ότι $y_N = y_T = 2t \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2} y_N}$.

(αυτό διότι θα γίνει απαλοιφή της παραμέτρου t)
Άρα, $N(x_N, 2t)$.
Βρίσκω την κλίση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο T :
$y^2 = 4x \Rightarrow 2yy' = 4 \Rightarrow y' = \frac{2}{y}$ $(y \neq 0) \Rightarrow \lambda_{\text{εφ.}} = \frac{2}{y_T} = \frac{1}{t}$.
Συνεπώς, $\lambda_{\text{κάθ.}} = -\frac{1}{\lambda_{\text{εφ.}}} = -t$.
Βρίσκω την εξίσωση της καθέτου της παραβολής στο σημείο T :
(κάθ.) : $y - y_T = \lambda_{\text{κάθ.}}(x - x_T) \Leftrightarrow y - 2t = -t(x - t^2) \Leftrightarrow y + tx = 2t + t^3$.
Θέτω $y = 0$ στην πιο πάνω εξίσωση και βρίσκω την τετμημένη του σημείου A : $x_A = 2 + t^2$.
Άρα, $A(2 + t^2, 0)$.
Ακολούθως, θα συνδέσω την τετμημένη x_T του σημείου T με την τεταγμένη αυτού. Αυτό θα γίνει **παίρνοντας τις κλίσεις** των παράλληλων ευθυγράμμων τμημάτων OT και AN :

$$\begin{aligned}
\lambda_{OT} = \lambda_{AN} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y_T}{x_T} = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} \Leftrightarrow \frac{2t}{t^2} = \frac{2t}{x_N - 2 - t^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x_N - 2 - t^2 = t^2 \Leftrightarrow x_N - 2 = 2t^2 \\
&\overset{t=\frac{1}{2}y_N}{\Leftrightarrow} \quad y_N^2 = 2x_N - 4.
\end{aligned}$$

Η καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου N είναι η

$$y^2 = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

η οποία είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο $(2, 0)$.

(β) Έστω $P(x, y)$ σημείο στην παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2x - 4$. Τότε $P\left(\frac{y^2+4}{2}, y\right)$.
Τότε, η συνάρτηση της απόστασης του P από το $B(4, 0)$ είναι

$$\sqrt{\left(\frac{y^2}{2} + 2 - 4\right)^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{y^4 - 4y^2 + 16}.$$

Για να βρούμε την ελάχιστη απόσταση μπορούμε να πάρουμε το τετράγωνο της απόστασης. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση d με τύπο

$$d(y) = \frac{1}{4}(y^4 - 4y^2 + 16).$$

Είναι

$$d'(y) = \frac{1}{4}(4y^3 - 8y) = y(y^2 - 2).$$

Άρα

$$d'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0,\ \pm\sqrt{2}.$$

Για $y = 0$ το αντίστοιχο σημείο είναι η κορυφή της παραβολής.
Κάνοντας τον πίνακα μεταβολών της d', έχουμε ότι η d παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα σημεία $(-\sqrt{2}, d(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 3)$ και $(\sqrt{2}, d(-\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 3)$.
Αντικαθιστώντας $y = \pm\sqrt{2}$ στην εξίσωση της παραβολής βρίσκουμε $x = 3$.
Συνεπώς, τα σημεία $(3, \sqrt{2})$ και $(3, -\sqrt{2})$ της παραβολής έχουν την ελάχιστη απόσταση από το σημείο $B(4, 0)$, η οποία απόσταση είναι ίση με

$$d(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{3}.$$

■

B3.
Ας υποθέσουμε ότι 10 μαθητές και μαθήτριες προσέρχονται σε δυο αίθουσες εξετάσεων, την αίθουσα Α με χωρητικότητα 8 μονοθέσιων θρανίων και την αίθουσα Β με χωρητικότητα 6 μονοθέσιων θρανίων.

(α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των μαθητών και μαθητριών στις δυο αίθουσες;

(β) Αν υποθέσουμε ότι από τους 10 εξεταζόμενους, 6 είναι κορίτσια και 4 είναι αγόρια, να υπολογίσετε το πλήθος των τοποθετήσεων, αν όλα τα κορίτσια πρέπει να βρίσκονται στην αίθουσα Α και όλα τα αγόρια στην αίθουσα Β.

(γ) Αν υποθέσουμε ότι από τους 10 εξεταζόμενους, 6 είναι κορίτσια και 4 είναι αγόρια, να υπολογίσετε το πλήθος των τοποθετήσεων, αν όλα τα αγόρια πρέπει να βρίσκονται στην ίδια αίθουσα.

Απάντηση

(α) Στο ερώτημα αυτό, θεωρούμε ότι τα δέκα άτομα είναι απλά 10 (διακεκριμένα) άτομα, δηλαδή δε μας ενδιαφέρει το φύλο τους.
Τώρα, όλα τα δυνατά (διατεταγμένα) ζεύγη (i, j) για τα οποία $i + j = 10$ και με τους περιορισμούς $0 \leq j \leq 8$ και $1 \leq i \leq 6$ είναι τα:

$$(8, 2),\ \ (7, 3),\ \ (6, 4),\ \ (5, 5),\ \ (4, 6).$$

Με άλλα λόγια, έχουμε (σύμφωνα με τους περιορισμούς του προβλήματος) 5 περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: 8 μαθητές στην αίθουσα Α και (οι υπόλοιποι) 2 στην αίθουσα Β⇒ $\binom{10}{8}\binom{2}{2} = \binom{10}{8} = 45$ τρόποι (πολλαπλασιαστική αρχή),

Περίπτωση 2: 7 μαθητές στην αίθουσα Α και (οι υπόλοιποι) 7 στην αίθουσα Β⇒ $\binom{10}{7}\binom{3}{3} = \binom{10}{7} = 120$ τρόποι (πολλαπλασιαστική αρχή),

Περίπτωση 3: 6 μαθητές στην αίθουσα Α και (οι υπόλοιποι) 4 στην αίθουσα Β⇒ $\binom{10}{6}\binom{4}{4} = \binom{10}{6} = 210$ τρόποι (πολλαπλασιαστική αρχή),

Περίπτωση 4: 5 μαθητές στην αίθουσα Α και (οι υπόλοιποι) 5 στην αίθουσα Β⇒ $\binom{10}{5}\binom{5}{5} = \binom{10}{5} = 252$ τρόποι (πολλαπλασιαστική αρχή),

Περίπτωση 5: 4 μαθητές στην αίθουσα Α και (οι υπόλοιποι) 6 στην αίθουσα Β⇒ $\binom{10}{4}\binom{6}{6} = \binom{10}{4} = \binom{10}{10-6} = \binom{10}{6} = 210$ τρόποι (πολλαπλασιαστική αρχή)[2].

Σύμφωνα λοιπόν με την **αρχή του αθροίσματος**, υπάρχουν $45 + 120 + 210 + 252 + 210 = 837$ πιθανοί τρόποι τοποθέτησης.

(β) Εδώ έχουμε και περιορισμούς στο φύλο (υπο την έννοια των πιθανών τοποθετήσεων φυσικά!): 6 κορίτσια, 4 αγόρια.
Παρ' όλα αυτά, υπάρχει **ένας** τρόπος (μόνο) για την εν λόγω τοποθέτηση: όλα τα (6) κορίτσια στην αίθουσα Α και όλα τα (4) αγόρια στην αίθουσα Β.

(γ) 6 κορίτσια, 4 αγόρια, όπως στο προηγούμενο ερώτημα.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: είτε όλα τα αγόρια πάνε στην αίθουσα Α είτε όλα στην αίθουσα Β.
Περίπτωση 1: όλα τα αγόρια πάνε στην αίθουσα Α. Τότε δουλεύοντας όπως και στα προηγούμενα, έχουμε

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} + \binom{6}{1} + 1 = 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57$$

τρόπους.
Περίπτωση 2: όλα τα αγόρια πάνε στην αίθουσα Β. Τότε δουλεύοντας όπως και στα προηγούμενα, έχουμε

$$1 + \binom{6}{5} + \binom{6}{4} = 1 + 6 + 15 = 22$$

τρόπους.
Σύμφωνα λοιπόν με την **αρχή του αθροίσματος**, υπάρχουν $57 + 22 = 79$ πιθανοί τρόποι τοποθέτησης. ■

Β4.
(α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ όταν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(x^2 - x + 1)f'(x) = (2x - 1)f(x)$ και η εφαπτομένη στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$ έχει κλίση ίση με 18.

(β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι: $f'(x) + f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $f(1) = e$.

Απάντηση

(α) Πρόκειται για ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών**.
Μεταφράζω (προσεκτικά) τα δεδομένα της άσκησης:
Μας δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

[2] Ας μη ξεχνάμε τον τύπο $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $(k \leq n)$ ο οποίος είναι και εντός σχολικής ύλης!

Η εφαπτομένη στο γράφημα της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$ έχει κλίση ίση με 18 $\Rightarrow$ $f'(2) = 18.$
Βρίσκω τώρα την τιμή $f(2)$:

$$\begin{cases} (x^2 - x + 1)f'(x) = (2x - 1)f(x) \\ \\ f'(2) = 18 & \Rightarrow (2^2 - 2 + 1)\underbrace{f'(2)}_{=18} = (2 \cdot 2 - 1)f(2) \\ \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ f(2) = 18.$$

Τώρα αφού $x^2 - x + 1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ (αφού έχει αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου) και $f(x) \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, έχουμε $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(x^2 - x + 1)f'(x) = (2x - 1)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

με την αρχική συνθήκη $f(2) = 18.$
Τώρα πλέον το πρόβλημα έχει αποκαλυφθεί μπροστά στα μάτια μας και φυσικά εμείς παίρνουμε βραβείο εφευρετικότητας[3]: ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx \\ &\Rightarrow \quad \ln|f(x)| = \int \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\,dx \\ &\Rightarrow \quad \ln|f(x)| = \ln|x^2-x+1| + c \\ &\Rightarrow \quad \ln f(x) = \ln(x^2-x+1) + c. \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη $f(2) = 18$:

$$\begin{aligned} \ln f(2) = \ln(2^2 - 2 + 1) + c \quad &\Rightarrow \quad \ln 18 = \ln 3 + c \\ &\Rightarrow \quad \ln 18 - \ln 3 = c \\ &\Rightarrow \quad c - \ln\left(\frac{18}{3}\right) = \ln 6. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\ln f(x) = \ln(x^2 - x + 1) + \ln 6 = \ln[6(x^2 - x + 1)],$$

δηλαδή (αφού η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1)

$$\boxed{f(x) = 6(x^2 - x + 1), \ \ \forall x \in \mathbb{R}}.$$

[3]Σημείωση: είναι μια απλή διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού χωριζομένων μεταβλητών. Σίγουρα όμως για έναν μαθητή Λυκείου, ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να είναι δύσκολο.

(β) Ακόμη ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.[4]

$$\begin{aligned}
f'(x)+f(x)=2 &\Rightarrow e^x f'(x)+e^x f(x)=2e^x\\
&\Rightarrow e^x f'(x)+(e^x)' f(x)=2e^x\\
&\Rightarrow (e^x f(x))'=2e^x\\
&\Rightarrow \int (e^x f(x))'\,dx = 2\int e^x\,dx\\
&\Rightarrow e^x f(x)=2e^x+c\\
(e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}) &\Rightarrow f(x)=2+ce^{-x}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την αρχική συνθήκη $f(1)=e$:

$$e=2+ce^{-1}\Rightarrow c=e^2-2e.$$

Άρα,

$$\boxed{f(x)=2+(e^2-2e)e^{-x},\ \ \forall x\in\mathbb{R}}\,.$$

■

B5.
Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(α) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)-f(\text{συν}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx=0.$

(β) Να δείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{ημ}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{συν}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx.$

Απάντηση

(α) Θεωρούμε την αντικατάσταση $u=\frac{\pi}{2}-x$.
Τότε $x=\frac{\pi}{2}-u$ και $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$ και $dx=-du$.

Εκτελώ τις αντικαταστάσεις δικαιολογώντας τα διάφορα βήματα:
$\text{ημ}x=\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\text{συν}u$, αφού $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{2}-u\le\frac{\pi}{2}$
και ομοίως, $\text{συν}x=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\text{ημ}u$.
Τέλος, αφού $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Leftrightarrow 0\le\pi-2u\le\pi$,

$$\text{ημ}2x=\text{ημ}\left[2\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]=\text{ημ}(\pi-2u)=\text{ημ}2u.$$

[4] Για τη λύση που ακολουθεί δε χρειάστηκε οποιαδήποτε Θεία παρέμβαση: είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η συνάρτηση $g(x)=e^x$ είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας.

Προχωράμε στην αλλαγή μεταβλητής (αντικατάσταση) στο πιο πάνω ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)-f(\text{συν}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{f(\text{συν}u)-f(\text{ημ}u)}{1+\text{ημ}2u}\,du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{συν}u)-f(\text{ημ}u)}{1+\text{ημ}2u}\,du \\
&\equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{συν}x)-f(\text{ημ}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)-f(\text{συν}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx
\end{aligned}$$

και άρα

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)-f(\text{συν}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx = 0,$$

δηλαδή

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\text{ημ}x)-f(\text{συν}x)}{1+\text{ημ}2x}\,dx = 0.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x$.
Τότε, από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{ημ}x}-e^{\text{συν}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{\text{ημ}x}}{1+\text{ημ}2x} - \frac{e^{\text{συν}x}}{1+\text{ημ}2x}\right) dx = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{ημ}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{συν}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx = 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{ημ}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\text{συν}x}}{1+\text{ημ}2x}\,dx.
\end{aligned}$$

■

-ΤΕΛΟΣ Β ΜΕΡΟΥΣ-